Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 1. С. 78–86
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1398

УДК 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

О. А. Репин[1,2]**, *А. В. Тарасенко***[3]

[1] Самарский государственный экономический университет,
Россия, 443090, Самара, ул. Советской Армии, 141.
[2] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
[3] Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия, 443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

Аннотация

Для уравнения с частными производными смешанного типа (уравнение диффузии дробного порядка) в конечной области исследована нелокальная задача, краевое условие которой содержит линейную комбинацию обобщённых операторов дробного интегро-дифференцирования от значений решения на характеристиках со значениями решения и его производной на линии вырождения. Единственность решения задачи доказана с помощью модифицированного метода Трикоми, а существование решения эквивалентно редуцировано к вопросу разрешимости интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: оператор дробного интегро-дифференцирования, краевая задача, интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1398

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,y}u = 0 & (y > 0,\ 0 < \alpha < 1), \\ y^{2m}u_{xx} + y\,u_{yy} + \lambda\,u_y = 0 & (y < 0), \end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\alpha}_{0+,y}$ — частная дробная производная Римана—Лиувилля порядка α от функции $u(x,y)$ по второй переменной [1, с. 341]:

$$(D^{\alpha}_{0+,y}u)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y \frac{u(x,t)dt}{(y-t)^{\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1,\ y > 0),$$

Образец для цитирования
Репин О. А., Тарасенко А. В. Нелокальная задача для уравнения с частной производной дробного порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 1. С. 78–86. doi: 10.14498/vsgtu1398.

Сведения об авторах
Олег Александрович Репин (д.ф.-м.н., проф.; matstat@mail.ru; автор, ведущий переписку), заведующий кафедрой, каф. математической статистики и эконометрики[1]; профессор, каф. прикладной математики и информатики[2].
Анна Валерьевна Тарасенко (к.ф.-м.н., доц.; tarasenko.a.v@mail.ru), доцент, каф. высшей математики.

m — натуральное число, $\lambda = \text{const}$, $(1-2m)/2 \leqslant \lambda < 1$ в конечной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x=0$, $x=1$, $y=1$ соответственно и характеристиками уравнения (1) при $y<0$:

$$AC: \; x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0, \quad BC: \; x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

Пусть $\Omega^+ = \Omega \cap (y>0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (y<0)$, $I \equiv AB$ — единичный интервал $0<x<1$ прямой $y=0$.

Задача. *Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(1,y) = \varphi_2(y), \qquad 0<y<1, \tag{2}$$

$$a(x)\big(I_{0+}^{\alpha_1,\beta_1,\eta_1}\delta(t)u[\Theta_0(t)]\big)(x) + b(x)\big(I_{1-}^{\alpha_2,\beta_2,\eta_2}w(t)u[\Theta_1(t)]\big)(x) + \\ + c(x)u(x,0) + d(x)\lim_{y\to 0-0}(-y)^{\lambda}u_y(x,y) = \gamma(x), \quad x \in I \tag{3}$$

и условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0+0}\big(y^{1-\alpha}u(x,y)\big) = \lim_{y\to 0-0}u(x,y), \quad x \in \overline{I}, \tag{4}$$

$$\lim_{y\to 0+0}\big[y^{1-\alpha}\big(y^{1-\alpha}u(x,y)\big)_y\big] = \lim_{y\to 0-0}(-y)^{\lambda}u_y(x,y), \quad x \in I. \tag{5}$$

Здесь $\varphi_i(y)$ $(i=1,2)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$, $w(x)$ — заданные функции, причем

$$a^2(x)+b^2(x)+c^2(x)+d^2(x) \neq 0, \quad b(0)=0,$$

$$a(x),\, b(x),\, c(x), d(x),\, \gamma(x) \in C^1(\overline{I}) \cap C^3(I),$$

$$y^{1-\alpha}\varphi_1(y),\, y^{1-\alpha}\varphi_2(y) \in C(\overline{I}), \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0;$$

$\Theta_0(x)$ *и* $\Theta_1(x)$ — *точки пересечения характеристик уравнения* (1), *выходящих из точки* $(x,0) \in I$, *с характеристиками* AC *и* BC *соответственно*; $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)$, $(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)$ — *обобщённые операторы дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса* $F(a,b;c;z)$, *введённые в работе* [2] (*см. также* [1, с. 326, 327] [3, с. 14]) *и имеющие при действительных* α, β, η *и* $x>0$ *следующий вид*:

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}F\Big(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{t}{x}\Big)f(t)\,dt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha>0), \\ \Big(\dfrac{d}{dx}\Big)^n\big(I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f(t)\big)(x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha \leqslant 0,\, n=[-\alpha]+1); \end{cases}$$

$$
(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} F\Big(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; \frac{t-x}{1-x}\Big) f(t)\, dt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha > 0), \\ \Big(-\dfrac{d}{dx}\Big)^n \big(I_{1-}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n} f(t)\big)(x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha \leqslant 0,\, n = [-\alpha]+1), \end{cases}
$$

в частности

$$
(I_{0+}^{0,0,\eta} f)(x) = f(x), \quad (I_{1-}^{0,0,\eta} f)(x) = f(x).
$$

А. Н. Кочубей [4] назвал уравнение (1) при $y > 0$ уравнением диффузии дробного порядка.

При $y < 0$ уравнение (1) является моделью гиперболических уравнений второго порядка, тип и порядок которых вырождаются на одном и том же $(n-1)$-мерном континууме [5, с. 274].

Будем искать решение поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых в области Ω функций $u(x, y)$, таких, что

$$
\begin{gathered}
y^{1-\alpha} u(x,y) \in C(\overline{\Omega^+}), \quad u(x,y) \in C(\overline{\Omega^-}), \\
y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha} u_y)_y \in C(\Omega^+ \cup \{(x,y) : \, 0 < x < 1, y = 0\}), \\
u_{xx} \in C(\Omega^+ \cup \Omega^-), \quad u_{yy} \in C(\Omega^-).
\end{gathered}
$$

2. Единственность решения задачи. Пусть существует решение исследуемой задачи. Введём следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
\lim_{y\to 0+0} y^{1-\alpha} u(x,y) = \tau_1(x), \quad \lim_{y \to 0-0} u(x,y) = \tau_2(x), \\
\lim_{y\to 0+0} y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha} u(x,y))_y = \nu_1(x), \quad \lim_{y\to 0-0} (-y)^\lambda u_y(x,y) = \nu_2(x), \\
\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau(x), \quad \nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu(x).
\end{gathered}
$$

Теорема 1.*В области Ω не может существовать более одного решения задачи (1)–(5), если $0 < \alpha < 1$, $(1-2m)/2 < \lambda < 1$ и если*

$$
\alpha_1 = \alpha_2 = \beta - 1, \tag{6}
$$

и либо

$$
\beta_1 = \beta_2 = 1 - 2\beta, \quad \eta_1 = \eta_2 = 0, \quad \delta(x) = w(x) = 1, \tag{7}
$$

либо

$$
\beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \eta_1 = \eta_2 = 1 - 2\beta, \quad \delta(x) = x^{2\beta - 1}, \quad w(x) = (1-x)^{2\beta-1}, \tag{8}
$$

и выполнении условий

$$
\mu(x) = k_0 a(x) + b(x) - \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} d(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overline{I}, \quad k_0 = -\frac{k_2}{k_1}, \tag{9}
$$

$$
\frac{a(1)}{\mu(1)} \geqslant 0, \quad \frac{b(0)}{\mu(0)} \leqslant 0, \quad \Big[\frac{a(x)}{\mu(x)}\Big]' \leqslant 0, \quad \Big[\frac{b(x)}{\mu(x)}\Big]' \geqslant 0, \quad \frac{c(x)}{\mu(x)} \geqslant 0 \quad \forall x \in \overline{I} \tag{10}
$$

или

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\beta, \tag{11}$$

и либо

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \eta_1 = \eta_2 = 2\beta - 1, \quad \delta(x) = w(x) = 1, \tag{12}$$

либо

$$\beta_1 = \beta_2 = 2\beta - 1, \quad \eta_1 = \eta_2 = 0, \quad \delta(x) = x^{2\beta-1}, \quad w(x) = (1-x)^{2\beta-1}, \tag{13}$$

и выполнении условий

$$E(x) = k_1(a(x) + b(x)) + c(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overline{I}, \tag{14}$$

$$\frac{a(1)}{E(1)} + \frac{b(0)}{E(0)} \geqslant 0, \quad \left[\frac{a(x)}{E(x)}\right]' \leqslant 0, \quad \left[\frac{b(x)}{E(x)}\right]' \geqslant 0, \quad \frac{d(x)}{E(x)} \geqslant 0 \quad \forall x \in \overline{I}, \tag{15}$$

где

$$k_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}, \quad k_2 = -\frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma(1-\beta)}\Big(\frac{2m+1}{4}\Big), \quad \beta = \frac{2m-1+2\lambda}{2(2m+1)}, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Известно [6, 7], что функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесённое из параболической области Ω^+ на линию $y = 0$, имеет вид

$$\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\,\tau''(x). \tag{16}$$

Рассмотрим интеграл

$$I^* = \int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx.$$

Подставим $\nu(x)$ из (16) в I^*. Учитывая, что $\tau(0) = \varphi_1(0) = \tau(1) = \varphi_2(0) = 0$, получим

$$I^* = -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 [\tau'(x)]^2 dx \leqslant 0. \tag{17}$$

Далее на основании результатов работы [8] выпишем функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесённое на $\overline{I}$ из гиперболической части Ω^- смешанной области Ω в двух случаях.

`Первый случай.` Пусть выполняются условия (6)–(10) теоремы 1. Тогда

$$\nu(x) = A_1(x)(D_{0+}^{1-2\beta}\tau)(x) + B_1(x)(D_{1-}^{1-2\beta}\tau)(x) + C_1(x)\tau(x) - \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)\mu(x)}\,\gamma(x), \tag{18}$$

где $(D_{0+}^{1-2\beta}f)(x)$ и $(D_{1-}^{1-2\beta}f)(x)$ — операторы дробного дифференцирования Римана—Лиувилля [1, с. 44];

$$A_1(x) = \frac{a(x)}{\mu(x)}, \quad B_1(x) = \frac{b(x)}{\mu(x)}, \quad C_1(x) = \frac{\Gamma(\beta)c(x)}{\Gamma(2\beta)\mu(x)}.$$

`Второй случай.` Пусть выполняются условия (11)–(15) теоремы 1. Тогда

$$\tau(x) = a_1(x)(I_{0+}^{1-2\beta}\nu)(x) + b_1(x)(I_{1-}^{1-2\beta}\nu)(x) + c_1(x)\nu(x) + \gamma_1(x), \tag{19}$$

где $(I_{0+}^{1-2\beta}f)(x)$ и $(I_{1-}^{1-2\beta}f)(x)$ — дробные интегралы Римана—Лиувилля [1, с. 42];

$$a_1(x) = -k_2\frac{a(x)}{E(x)}, \quad b_1(x) = -k_2\frac{b(x)}{E(x)}, \quad c_1(x) = \frac{d(x)}{E(x)}, \quad \gamma_1 = \frac{\gamma(x)}{k_1 E(x)}.$$

В работе [8] с учетом функционального соотношения (18) или (19) доказано, что $I^* \geqslant 0$. А тогда, учитывая (17), имеем $I^* = 0$.

Далее схема доказательства тождества $u(x,y) \equiv 0$ аналогична [8, 9]. $\square$

Теорема 2. *В области Ω не может существовать более одного решения задачи* (1)–(5), *если* $0 < \alpha < 1$, $\lambda = (1-2m)/2$ $(\beta = 0)$,

$$E_1(x) = 2d(x) - a(x) - b(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{I},$$

$$\Big(\frac{b(x)-a(x)}{E_1(x)}\Big)' \leqslant 0, \quad \frac{c(x)}{E_1(x)} \leqslant 0 \quad \forall x \in \bar{I}.$$

Доказательство теоремы 2 непосредственно следует из равенства $I^* = 0$ с учётом соотношения [10]

$$\nu(x) = A_2(x)\tau'(x) + B_2(x)\tau(x) + \gamma_2(x), \tag{20}$$

где

$$A_2(x) = \frac{b(x)-a(x)}{E_1(x)}, \quad B_2(x) = -\frac{2c(x)}{E_1(x)}, \quad \gamma_2(x) = \frac{2\gamma(x)}{E_1(x)}.$$

3. Существование решения задачи. Интегрируя (16) дважды от 0 до x и учитывая условия (2), получим

$$\tau(x) = \Gamma(1+\alpha)\left[\int_0^x (x-\xi)\nu(\xi)d\xi - x\int_0^1 (1-\xi)\nu(\xi)d\xi\right]. \tag{21}$$

Рассмотрим вначале случай $(1-2m)/2 < \lambda < 1$. Исключив $\nu(x)$ из (18) и (21), будем иметь

$$\tau(x) + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2\beta)}\left\{x\int_0^1 (1-\xi)\left[A_1(\xi)\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi \frac{\tau(t)dt}{(\xi-t)^{1-2\beta}} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - B_1(\xi)\frac{d}{d\xi}\int_\xi^1 \frac{\tau(t)dt}{(t-\xi)^{1-2\beta}} + \Gamma(2\beta)C_1(\xi)\tau(\xi) - \frac{\Gamma(\beta)\gamma(\xi)}{\mu(\xi)}\right]d\xi\right\} -$$
$$- \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2\beta)}\left\{\int_0^x (x-\xi)\left[A_1(\xi)\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi \frac{\tau(t)dt}{(\xi-t)^{1-2\beta}} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - B_1(\xi)\frac{d}{d\xi}\int_\xi^1 \frac{\tau(t)dt}{(t-\xi)^{1-2\beta}} + \Gamma(2\beta)C_1(\xi)\tau(\xi) - \frac{\Gamma(\beta)\gamma(\xi)}{\mu(\xi)}\right]d\xi\right\}.$$

Проинтегрировав в полученном выражении двойные интегралы по частям, а затем поменяв порядок интегрирования, получим

$$\tau(x) + \int_0^1 K(x,t)\tau(t)dt = f(x), \tag{22}$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} K_1(x,t), & t \leqslant x, \\ K_2(x,t), & t \geqslant x, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K_1(x,t) = -\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2\beta)} x \Bigg[\int_t^x \frac{[(1-\xi)A_1(\xi)]' d\xi}{(\xi - t)^{1-2\beta}} + \\ + \int_x^1 \frac{[(1-\xi)B_1(\xi)]' d\xi}{(\xi - t)^{1-2\beta}} + \int_0^t \frac{[(1-\xi)B_1(\xi)]' d\xi}{(t-\xi)^{1-2\beta}} \Bigg] + \\ + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2\beta)} \Bigg[\int_t^x \frac{[(x-\xi)A_1(\xi)]'_\xi d\xi}{(\xi - t)^{1-2\beta}} + \int_0^t \frac{[(x-\xi)B_1(\xi)]'_\xi d\xi}{(t-\xi)^{1-2\beta}} \Bigg] + \\ + \Gamma(1+\alpha)\xi(x-1)c_1(\xi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2(x,t) = -\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2\beta)} x \Bigg[\int_t^1 \frac{[(1-\xi)A_1(\xi)]' d\xi}{(\xi - t)^{1-2\beta}} - \\ - \int_0^x \frac{[(1-\xi)B_1(\xi)]' d\xi}{(t-\xi)^{1-2\beta}} - \int_x^1 \frac{[(1-\xi)B_1(\xi)]' d\xi}{(t-\xi)^{1-2\beta}} \Bigg] + \\ + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2\beta)} \int_0^x \frac{[(x-\xi)B_1(\xi)]'_\xi d\xi}{(t-\xi)^{1-2\beta}} + \Gamma(1+\alpha)x(1-\xi)c_1(\xi); \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2\beta)} \left[x \int_0^1 \frac{(1-\xi)\gamma(\xi)}{\mu(\xi)} d\xi - \int_0^x \frac{(x-\xi)\gamma(\xi)}{\mu(\xi)} d\xi \right].$$

В силу сделанных предположений относительно гладкости известных функций можно заключить, что

$$K(x,t) \in C(\overline{I} \times \overline{I}) \cap C^3(I \times I), \quad f(x) \in C^1(\overline{I}) \cap C^3(I).$$

Таким образом, уравнение (22) есть уравнение Фредгольма второго рода относительно $\tau(x)$, безусловная разрешимость которого в требуемом классе функций следует из единственности решения задачи.

При выполнении условий (11)–(15) теоремы 1, используя функциональные соотношения (19) и (21), существование решения задачи (1)–(5) также сведем к разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Пусть теперь $\lambda = (1-2m)/2$, $\beta = 0$.

Исключив $\nu(x)$ из соотношений (20) и (21), после несложных вычислений придём к уравнению

$$\tau(x) + \int_0^1 K_3(x,\xi)\tau(\xi)d\xi = F(x), \tag{23}$$

где

$$K_3(x,\xi) = \begin{cases} K_4(x,\xi), & \xi \leqslant x, \\ K_5(x,\xi), & \xi \geqslant x, \end{cases}$$

$$K_4(x,\xi) = \Gamma(1+\alpha)[(x-1)(A_2(\xi)+\xi A_2'(\xi)) + \xi(1-x)B_2(\xi)],$$

$$K_5(x,\xi) = \Gamma(1+\alpha)x[(1-\xi)(A_2'(\xi)+B_2(\xi)) - A_2(\xi)],$$

$$F(x) = \Gamma(1+\alpha)\left[\int_0^x (x-\xi)\gamma_2(\xi)d\xi - x\int_0^1 (1-\xi)\gamma_2(\xi)d\xi\right].$$

В силу сделанных ранее предположений относительно гладкости известных функций можно заключить, что $K_3(x,\xi) \in C(\bar{I}\times\bar{I}) \cap C^3(I\times I)$, $F(x) \in C^1(\bar{I}) \cap C^3(I)$.

Следовательно, уравнение (23) есть уравнение Фредгольма второго рода относительно $\tau(x)$, безусловная разрешимость которого в требуемом классе функций следует из единственности решения задачи (1)–(5).

ORCID
Олег Александрович Репин: http://orcid.org/0000-0003-1522-3955
Анна Валерьевна Тарасенко: http://orcid.org/0000-0002-0487-8262

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function // *Math. Rep. Coll. Gen. Educ., Kyushu Univ.*, 1978. vol. 11, no. 2. pp. 135–143.
3. Репин О. А. *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов*. Саратов, 1992. 164 с.
4. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка // *Диффер. уравн.*, 1990. Т. 26, № 4. С. 660–670.
5. Бицадзе А. Н. *Некоторые классы уравнений в частных производных*. М.: Наука, 1981. 448 с.
6. Геккиева С. Х. Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной // *Известия КБНЦ РАН*, 2001. № 2(7). С. 78–80.
7. Килбас А. А., Репин О. А. О разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного типа с частной дробной производной Римана—Лиувилля // *Диффер. уравн.*, 2010. Т. 46, № 10. С. 1453–1460.
8. Репин О. А., Кумыкова С. К. Нелокальная задача с дробными производными для уравнения смешанного типа // *Изв. вузов. Матем.*, 2014. № 8. С. 79–85.
9. Репин О. А., Кумыкова С. К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области // *Диффер. уравн.*, 2012. Т. 48, № 8. С. 1140–1149.
10. Репин О. А., Кумыкова С. К. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа, порядок которого вырождается вдоль линии изменения типа // *Изв. вузов. Матем.*, 2013. № 8. С. 57–65.

Поступила в редакцию 05/XI/2014;
в окончательном варианте — 11/I/2015;
принята в печать — 25/II/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 78–86

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1398

MSC: 35M12

NONLOCAL PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

O. A. Repin[1,2]**, *A. V. Tarasenko***[3]

[1] Samara State Economic University,
141, Sovetskoy Armii st., Samara, 443090, Russian Federation.
[2] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.
[3] Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russian Federation.

Abstract

A nonlocal problem is investigated for the partial differential equation (diffusion equation of fractional order) in a finite domain. The boundary condition contains a linear combination of generalized operators of fractional integro-differentiation used on the solution in the characteristics and the solution and its derivative in the degenerating line. The uniqueness of the solution is proved by a modified Tricomi method. The existence of the solution is equivalently reduced to the question of the solvability of Fredholm integral equations of the second kind.

Keywords: operator of fractional integro-differentiation, boundary value problem, Fredholm integral equation of the second kind.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1398

ORCID
Oleg A. Repin: http://orcid.org/0000-0003-1522-3955
Anna V. Tarasenko: http://orcid.org/0000-0002-0487-8262

REFERENCES

1. Samko St. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*. New York, NY, Gordon and Breach, 1993, xxxvi+976 pp.
2. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function, *Math. Rep. Coll. Gen. Educ., Kyushu Univ.*, 1978, vol. 11, no. 2, pp. 135–143.

How to cite Reference
R e p i n O. A., T a r a s e n k o A. V. Nonlocal problem for partial differential equations of fractional order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 78–86. doi: 10.14498/vsgtu1398. (In Russian)

Authors Details
Oleg A. Repin (Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; matstat@mail.ru; Corresponding Author), Head of Department, Dept. of Mathematical Statistics and Econometrics[1]; Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science[2].
Anna V. Tarasenko (Cand. Phys. & Math. Sci.; tarasenko.a.v@mail.ru), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics.

3. Repin O. A. *Kraevye zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii giperbolicheskogo i smeshannogo tipov* [Boundary value problems with shift for equations of hyperbolic and mixed type]. Saratov, 1992, 164 pp. (In Russian)
4. Kochubei A. N. Fractional-order diffusion, *Differ. Equ.*, 1990, vol. 26, no. 4, pp. 485–492.
5. Bitsadze A. N. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some Classes of Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1981, 448 pp. (In Russian)
6. Gekkieva S. Kh. An analog of the Tricomi problem for a mixed type equation with a partial fractional derivative, *Izvestiya Kabardino-Balkarskaya Nauchnoogo Tsentra RAN*, 2001, no. 2(7), pp. 78–80 (In Russian).
7. Kilbas A. A., Repin O. A. Solvability of a boundary value problem for a mixed-type equation with a partial Riemann–Liouville fractional derivative, *Differ. Equ.*, 2010, vol. 46, no. 10, pp. 1457–1464. doi: 10.1134/S0012266110100095.
8. Repin O. A., Kumykova S. K. A nonlocal problem with fractional derivatives for the mixed type equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014, vol. 58, no. 8, pp. 65–70. doi: 10.3103/S1066369X14080088.
9. Repin O. A., Kumykova S. K. On a boundary value problem with shift for an equation of mixed type in an unbounded domain, *Differ. Equ.*, 2012, vol. 48, no. 8, pp. 1127–1136. doi: 10.1134/S0012266112080083.
10. Repin O. A., Kumykova S. K. A nonlocal problem for a mixed-type equation whose order degenerates along the line of change of type, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 8, pp. 49–56. doi: 10.3103/S1066369X13080069.

Received 05/XI/2014;
received in revised form 11/I/2015;
accepted 25/II/2015.