Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 1. С. 117–135
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1387

УДК 517.958

СВЕРТКИ ПО РАНГАМ И КВАТЕРНИОННЫМ ТИПАМ В АЛГЕБРАХ КЛИФФОРДА

Д. С. Широков[1,2]

[1] Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Россия, 127994, Москва, Б. Каретный пер., 19.
[2] Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5/1.

Аннотация

В работе рассмотрены выражения в вещественных и комплексных алгебрах Клиффорда, называемые свертками или усреднениями. Свертка берется от произвольного элемента алгебры Клиффорда, при этом ведется суммирование по различным элементам фиксированного базиса алгебры Клиффорда. Рассмотрены четные и нечетные свертки, свертки по рангам и свертки по кватернионным типам. Представлена связь сверток с операциями проецирования на выделенные подпространства алгебры Клиффорда — четное и нечетное подпространство, подпространства фиксированных рангов и подпространства фиксированных кватернионных типов. С помощью метода сверток дано решение различных систем коммутаторных уравнений в алгебрах Клиффорда. Особое внимание уделено двум частным случаям — случаям коммутатора и антикоммутатора. Полученные результаты могут применяться при изучении различных уравнений теории поля — уравнений Янга—Миллса, простейшего полевого уравнения и других.

Ключевые слова: алгебры Клиффорда, свертки, операции проецирования, кватернионный тип.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1387

Введение. Алгебра Клиффорда была предложена в 1878 году У. Клиффордом [1]. В своих исследованиях он объединил идеи, связанные с кватернионами Гамильтона [2] и внешней алгеброй Грассмана [3]. В дальнейшем алгебра Клиффорда развивалась усилиями многих известных математиков — Р. Липшицем [4], Э. Картаном, Э. Уиттом, К. Шевалле [5], М. Риссом и другими. Существенное влияние на развитие теории алгебр Клиффорда оказало открытие уравнения Дирака для электрона в 1928 году [6]. В настоящее время алгебры Клиффорда широко применяются в различных разделах современной математики и физики — теории поля [7, 8], робототехнике, небесной механике, обработке сигналов и изображений, вычислительной технике, химии, геометрии.

Образец для цитирования
Широков Д. С. Свертки по рангам и кватернионным типам в алгебрах Клиффорда // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 1. С. 117–135. doi: 10.14498/vsgtu1387.

Сведения об авторе
Дмитрий Сергеевич Широков (к.ф.-м.н.; dm.shirokov@gmail.com), научный сотрудник, лаб. 7 «Обработка биоэлектрической информации»[1]; доцент, каф. ФН-1 «Высшая математика»[2].

В настоящей статье мы рассматриваем выражения в алгебре Клиффорда вида

$$\sum_{A\in S} e_A U e^A, \qquad e_A = (e^A)^{-1},$$

где e^A — элементы базиса алгебры Клиффорда, S есть подмножество множества I всех упорядоченных мультииндексов A длины от 0 до n. Будем называть такие выражения свертками, или усреднениями, в алгебре Клиффорда.

Отметим, что метод сверток напрямую связан с методом усреднения в теории представлений конечных групп [9, 10].

В работе автора [11] изучены полные свертки (случай $S = \mathrm{I}$), простые свертки (множество S состоит из одного элемента) и свертки по сопряженным наборам мультииндексов.

В настоящей работе продолжено изучение сверток в алгебрах Клиффорда. Рассматриваются четные и нечетные свертки (когда множество S содержит мультииндексы четной или нечетной длины), свертки по рангам (участвуют мультииндексы фиксированной длины), свертки по кватернионным типам. Доказываются теоремы о связи различных сверток с проекциями на выделенные подпространства алгебры Клиффорда.

Даны решения систем коммутаторных уравнений в алгебрах Клиффорда

$$e^A X + \epsilon X e^A = q^A, \qquad A \in S \subseteq \mathrm{I}, \qquad \epsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

для неизвестного элемента $X \in C\!\ell(p,q)$ и известных элементов $q^A \in C\!\ell(p,q)$.

Техника сверток напрямую связана с изучением различных уравнений теории поля. Так, в работе [12] рассматривается простейшее полевое уравнение и с помощью техники сверток найдено его общее решение. Там же с помощью техники сверток предложен новый класс решений уравнений Янга—Миллса.

В работе [13] рассмотрены обобщенные свертки, построенные по двум наборам антикоммутирующих элементов алгебры Клиффорда. С помощью обобщенных сверток дано обобщение теоремы Паули [14] на случай алгебры Клиффорда [13] и решен ряд вопросов о связи спинорных и ортогональных групп [15–17].

1. Вещественные и комплексные алгебры Клиффорда, кватернионный тип элемента. Рассмотрим комплексную алгебру Клиффорда $C\!\ell(p,q)$ (или вещественную $C\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$), где $p+q=n$, $n \geqslant 1$. Построение алгебры Клиффорда подробно приведено в [18] и [19]. Будем называть размерностью алгебры Клиффорда $C\!\ell(p,q)$ число n, хотя ее размерность как линейного пространства равна 2^n.

Единичный элемент обозначим через e, а генераторы алгебры Клиффорда $C\!\ell(p,q)$ через e^a, $a = 1,\ldots,n$. Генераторы удовлетворяют определяющим соотношениям

$$e^a e^b + e^b e^a = 2\eta^{ab} e,$$

где $\eta = \|\eta^{ab}\| = \|\eta_{ab}\| = \mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1)$ — диагональная матрица с p единицами и q минус единицами на диагонали. Элементы

$$e^{a_1\ldots a_k} = e^{a_1}\ldots e^{a_k}, \qquad a_1 < \ldots < a_k, \qquad k = 1,\ldots,n,$$

вместе с единичным элементом e образуют базис алгебры Клиффорда. Всего имеется 2^n элементов базиса.

Через I будем обозначать множество мультииндексов длины от 0 до n

$$\mathrm{I} = \{-,\, 1,\, \ldots,\, n,\, 12,\, 13,\, \ldots,\, 1\ldots n\},$$

где через $-$ обозначен пустой мультииндекс, соответствующий единичному элементу алгебры Клиффорда. Итак, мы имеем базис алгебры Клиффорда $\{e^A,\ A \in \mathrm{I}\}$, где A есть произвольный упорядоченный мультииндекс. Обозначим длину мультииндекса A через $|A|$.

Будем рассматривать различные подмножества $S \subseteq \mathrm{I}$:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{Even}} = \{A \in \mathrm{I},\ |A| - \text{четно}\}, \qquad \mathrm{I}_{\mathrm{Odd}} = \{A \in \mathrm{I},\ |A| - \text{нечетно}\},$$

$$\mathrm{I}_k = \{A \in \mathrm{I}, \quad |A| = k\}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\mathrm{I}_{\overline{k}} = \{A \in \mathrm{I}, \quad |A| = k \mod 4\}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Индексы опускаются и поднимаются с помощью матрицы η, т.е. $e_a = \eta_{ab} e^b$, $e^a = \eta^{ab} e_b$. Мы пользуемся соглашением Эйнштейна о суммировании по повторяющемуся нижнему и верхнему индексу. Имеем

$$e_{a_1\ldots a_k} = \eta_{a_1 b_1} \ldots \eta_{a_k b_k} e^{b_k} \ldots e^{b_1} = e_{a_k} \ldots e_{a_1} = (e^{a_1\ldots a_k})^{-1}, \quad a_1 < \ldots < a_k.$$

Произвольный элемент алгебры Клиффорда $U \in C\!\ell(p,q)$ может быть записан в виде

$$U = ue + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \ldots + u_{1\ldots n} e^{1\ldots n} = u_A e^A,$$

где $\{u_A\} = \{u, u_a, u_{a_1 a_2}, \ldots, u_{1\ldots n}\}$ — произвольные комплексные (или вещественные) константы.

Обозначим через $C\!\ell_k(p,q)$ векторные подпространства, натянутые на элементы $e^{a_1\ldots a_k}$. Элементы $C\!\ell_k(p,q)$ называются элементами *ранга* k. Имеем

$$C\!\ell(p,q) = \bigoplus_{k=0}^{n} C\!\ell_k(p,q), \qquad \dim C\!\ell_k(p,q) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Рассмотрим проекционные операторы на подпространства $C\!\ell_k(p,q)$

$$\pi_k : C\!\ell(p,q) \to C\!\ell_k(p,q), \qquad \pi_k(U) = \sum_{a_1 < \ldots < a_k} u_{a_1\ldots a_k} e^{a_1\ldots a_k}.$$

Центром алгебры Клиффорда

$$\mathrm{cen} C\!\ell(p,q) = \{U \in C\!\ell(p,q) \,|\, UV = VU \quad \forall V \in C\!\ell(p,q)\}$$

является следующее множество:

$$\mathrm{cen}\, C\!\ell(p,q) = \begin{cases} C\!\ell_0(p,q), & \text{если } n \text{ четно;} \\ C\!\ell_0(p,q) \oplus C\!\ell_n(p,q), & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Алгебра Клиффорда $C\ell(p,q)$ является супералгеброй. Она может быть представлена в виде прямой суммы четного и нечетного подпространства:

$$C\ell(p,q) = C\ell_{\mathrm{Even}}(p,q) \oplus C\ell_{\mathrm{Odd}}(p,q), \quad \dim C\ell_{\mathrm{Even}}(p,q) = \dim C\ell_{\mathrm{Odd}}(p,q) = 2^{n-1},$$

$$C\ell_{\mathrm{Even}}(p,q) = \bigoplus_{k-\mathrm{even}} C\ell_k(p,q), \qquad C\ell_{\mathrm{Odd}}(p,q) = \bigoplus_{k-\mathrm{odd}} C\ell_k(p,q).$$

Представим алгебру Клиффорда $C\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ как прямую сумму четырех подпространств *кватернионных типов* 0, 1, 2 и 3 (см. [20–22]):

$$C\ell^{\mathbb{R}}(p,q) = C\ell^{\mathbb{R}}_{\overline{0}}(p,q) \oplus C\ell^{\mathbb{R}}_{\overline{1}}(p,q) \oplus C\ell^{\mathbb{R}}_{\overline{2}}(p,q) \oplus C\ell^{\mathbb{R}}_{\overline{3}}(p,q), \tag{1}$$

где

$$C\ell^{\mathbb{R}}_{\overline{m}}(p,q) = \bigoplus_{k=m \mod 4} C\ell^{\mathbb{R}}_k(p,q), \qquad m = 0,1,2,3.$$

Соответствующие операции проецирования на подпространства алгебры Клиффорда фиксированного кватернионного типа обозначены через

$$\pi_{\overline{k}} : C\ell(p,q) \to C\ell_{\overline{k}}(p,q), \qquad k = 0,1,2,3.$$

Обозначая для краткости $C\ell^{\mathbb{R}}_{\overline{k}}(p,q)$ через $\overline{\mathbf{k}}$, можем записать свойства для этих подпространств относительно действия коммутатора

$$[U,V] = UV - VU$$

и антикоммутатора

$$\{U,V\} = UV + VU$$

(см. более подробно [20, 21]):

$$\begin{gathered}
[\overline{\mathbf{k}},\overline{\mathbf{k}}] \subseteq \overline{\mathbf{2}}, \quad \{\overline{\mathbf{k}},\overline{\mathbf{k}}\} \subseteq \overline{\mathbf{0}}, \quad [\overline{\mathbf{k}},\overline{\mathbf{2}}] \subseteq \overline{\mathbf{k}}, \quad \{\overline{\mathbf{k}},\overline{\mathbf{0}}\} \subseteq \overline{\mathbf{k}}, \qquad k = 0,1,2,3;\\
[\overline{\mathbf{0}},\overline{\mathbf{1}}] \subseteq \overline{\mathbf{3}}, \quad [\overline{\mathbf{0}},\overline{\mathbf{3}}] \subseteq \overline{\mathbf{1}}, \quad [\overline{\mathbf{1}},\overline{\mathbf{3}}] \subseteq \overline{\mathbf{0}}, \quad \{\overline{\mathbf{1}},\overline{\mathbf{2}}\} \subseteq \overline{\mathbf{3}}, \quad \{\overline{\mathbf{1}},\overline{\mathbf{3}}\} \subseteq \overline{\mathbf{2}}, \quad \{\overline{\mathbf{2}},\overline{\mathbf{3}}\} \subseteq \overline{\mathbf{1}}.
\end{gathered}$$

Комплексную алгебру Клиффорда $C\ell(p,q)$ можно представить в виде прямой суммы восьми следующих подпространств:

$$C\ell(p,q) = \overline{\mathbf{0}} \oplus \overline{\mathbf{1}} \oplus \overline{\mathbf{2}} \oplus \overline{\mathbf{3}} \oplus i\overline{\mathbf{0}} \oplus i\overline{\mathbf{1}} \oplus i\overline{\mathbf{2}} \oplus i\overline{\mathbf{3}}.$$

2. Свертки по рангам. Рассмотрим следующую *свертку генераторов* [18] в алгебре Клиффорда $C\ell(p,q)$:

$$F_1(U) = \sum_{A \in \mathrm{I}_1} e_A U e^A = e_a U e^a, \qquad U \in C\ell(p,q).$$

Теорема 1 [18]. *Для произвольного элемента $U \in C\ell(p,q)$ имеем*

$$F_1(U) = e_a U e^a = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-2k) \pi_k(U).$$

Отметим, что в работе [12] мы представили связь между сверткой генераторов и проекциями на подпространства алгебры Клиффорда фиксированного ранга. Используя эту связь, удалось предъявить класс новых решений уравнений Янга—Миллса.

Теперь рассмотрим более общие выражения (совпадающие с предыдущими при $m = 1$) — свертки по фиксированным рангам

$$F_m(U) = \sum_{A \in \mathrm{I}_m} e_A U e^A, \qquad \mathrm{I}_m = \{A \in \mathrm{I}, \quad |A| = m\} \qquad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Теорема 2. *Для произвольного элемента $U \in C\!\ell(p,q)$ имеем*

$$F_m(U) = \sum_{A \in \mathrm{I}_m} e_A U e^A = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{km} \left(\sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_k^i C_{n-k}^{m-i} \right) \pi_k(U). \tag{2}$$

Заметим, что, используя свертку Вандермонда $C_n^m = \sum_{i=0}^{m} C_k^i C_{n-k}^{m-i}$, можем записать

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_k^i C_{n-k}^{m-i} = C_n^m - 2 \sum_{i-\mathrm{odd}} C_k^i C_{n-k}^{m-i} = -C_n^m + 2 \sum_{i-\mathrm{even}} C_k^i C_{n-k}^{m-i}.$$

Доказательство. В силу линейности достаточно доказать следующую формулу для произвольного элемента базиса алгебры Клиффорда:

$$\sum_{b_1 < \ldots < b_m} (e^{b_1 \ldots b_m})^{-1} e^{a_1 \ldots a_k} e^{b_1 \ldots b_m} = (-1)^{km} \left(\sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_k^i C_{n-k}^{m-i} \right) e^{a_1 \ldots a_k}.$$

Пусть i — число совпадающих индексов в упорядоченных наборах $a_1 \ldots a_k$ и $b_1 \ldots b_m$. Пусть для определенности $k \geqslant m$. Для каждого i будет $C_k^i C_{n-k}^{m-i}$ различных наборов $b_1 \ldots b_m$. В каждом случае при перестановке местами элементов $e^{b_1 \ldots b_m}$ и $e^{a_1 \ldots a_k}$ будем получать коэффициент $(-1)^{km-i}$. Из этих соображений получаем нужную формулу. При $k < m$ получаем ту же формулу, т.к. $C_k^i = 0$ для $i > k$. $\square$

Приведем несколько примеров $(m = 2, 3, 4, n)$:

$$\begin{aligned}
e_{b_1 b_2} U e^{b_1 b_2} &= \sum_k (C_n^2 - 2k(n-k)) \pi_k(U), \\
e_{b_1 b_2 b_3} U e^{b_1 b_2 b_3} &= \sum_k (-1)^k (C_n^3 - 2(k C_{n-k}^2 + C_k^3)) \pi_k(U), \\
e_{b_1 b_2 b_3 b_4} U e^{b_1 b_2 b_3 b_4} &= \sum_k (C_n^4 - 2(k C_{n-k}^3 + (n-k) C_k^3)) \pi_k(U), \\
e_{1 \ldots n} U e^{1 \ldots n} &= \sum_k (-1)^{k(n+1)} \pi_k(U).
\end{aligned}$$

Рассмотрим систему коммутаторных уравнений по рангам, сначала в частном случае — по генераторам. Верна следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть элемент $X \in C\!\ell(p,q)$ удовлетворяет следующей системе n уравнений для некоторых элементов $q^a \in C\!\ell(p,q)$:*

$$[e^a, X] = q^a, \qquad a = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда система либо не имеет решения, либо имеет единственное с точностью до элемента центра решение вида

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\pi_k(q^a e_a)}{(-1)^k(n-2k)-n} + U_0, & \text{если } n \text{ четно}, \\ \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{\pi_k(q^a e_a)}{(-1)^k(n-2k)-n} + U_0 + U_n, & \text{если } n \text{ нечетно}, \end{cases}$$

где U_0, U_n — произвольные элементы рангов 0 и n соответственно.

Доказательство. Домножим уравнение справа на e_a и просуммируем:

$$e^a X e_a - X e^a e_a = q^a e_a.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-2k) \pi_k(X) - nX = q^a e_a.$$

Расписывая $X = \sum_{k=0}^{n} \pi_k(X)$, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} ((-1)^k(n-2k) - n)\pi_k(X) = \sum_{k=0}^{n} \pi_k(q^a e_a).$$

Выражение $(-1)^k(n-2k)-n$ равняется нулю только при $k=0$ и при $k=n$, если n нечетно. Отсюда получаем утверждение теоремы. $\square$

Теперь рассмотрим более общий случай, а именно систему C_n^m уравнений для неизвестного $X \in C\!\ell(p,q)$ и известных $q^{a_1 \dots a_m} \in C\!\ell(p,q)$ (число m фиксировано) вида

$$e^{a_1 \dots a_m} X + \epsilon X e^{a_1 \dots a_m} = q^{a_1 \dots a_m}, \qquad A = a_1 \dots a_m \in \mathrm{I}_m, \qquad \epsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Утверждение для общего случая довольно громоздко, поэтому опишем лишь сам метод решения таких систем уравнений, который лучше применять уже для конкретных m и ϵ. В частности, при $\epsilon = -1$ и $m = 1$ получаем утверждение из предыдущей теоремы.

Домножая справа каждое уравнение системы на соответствующий обратный элемент и суммируя уравнения, получаем

$$e^{a_1 \dots a_m} X e_{a_1 \dots a_m} + \epsilon X e^{a_1 \dots a_m} e_{a_1 \dots a_m} = q^{a_1 \dots a_m} e_{a_1 \dots a_m}.$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{km} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_k^i C_{n-k}^{m-i} \pi_k(X) + \epsilon X C_n^m = q^{a_1 \dots a_m} e_{a_1 \dots a_m}.$$

Подставляя $X = \sum_{k=0}^{n} \pi_k(X)$, получаем

$$\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{km}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_k^i C_{n-k}^{m-i} + \epsilon C_n^m\right)\pi_k(X) = \sum_{k=0}^{n}\pi_k(q^{a_1\dots a_m}e_{a_1\dots a_m}).$$

Далее действуем так же, как при доказательстве предыдущей теоремы. Система либо не будет иметь решения (в зависимости от элементов $q^{a_1\dots a_m}$), либо будет иметь решение, расписанное через сумму различных проекций. При этом решение будет единственным с точностью до прибавления произвольных элементов некоторых рангов. Эти ранги k определяются тем, при каких k выполнено

$$(-1)^{km}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_k^i C_{n-k}^{m-i} + \epsilon C_n^m = 0$$

и зависят, таким образом, от n, m и ϵ.

3. Четные и нечетные свертки. В работе [11] были рассмотрены *полные свертки* $F(U) = \frac{1}{2^n}e_A U e^A$. Они проецируют произвольный элемент алгебры Клиффорда на центр:

$$F(U) = \frac{1}{2^n}e_A U e^A = \begin{cases} \pi_0(U), & \text{если } n \text{ четно};\\ \pi_0(U) + \pi_n(U), & \text{если } n \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Теперь рассмотрим *четные* и *нечетные свертки*:

$$F_{\mathrm{Even}}(U) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{A\in \mathrm{I_{Even}}} e_A U e^A, \qquad F_{\mathrm{Odd}}(U) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{A\in \mathrm{I_{Odd}}} e_A U e^A.$$

Теорема 4. *Для произвольного элемента алгебры Клиффорда $U \in C\!\ell(p,q)$, $n = p+q$ имеем*

$$F_{\mathrm{Even}}(U) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{A\in \mathrm{I_{Even}}} e_A U e^A = \pi_0(U) + \pi_n(U), \tag{3}$$

$$F_{\mathrm{Odd}}(U) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{A\in \mathrm{I_{Odd}}} e_A U e^A = \pi_0(U) + (-1)^{n+1}\pi_n(U).$$

Рассматриваемые операторы являются проекторами $F_{\mathrm{Even}}^2 = F_{\mathrm{Even}}$, $F_{\mathrm{Odd}}^2 = F_{\mathrm{Odd}}$. В случае нечетного n имеем $F = F_{\mathrm{Even}} = F_{\mathrm{Odd}}$. В случае четного n имеем $F = \frac{1}{2}(F_{\mathrm{Even}} + F_{\mathrm{Odd}})$.

Доказательство. В силу линейности достаточно проверить, как действуют рассматриваемые свертки на произвольный элемент алгебры Клиффорда фиксированного ранга $U_k \in C\!\ell_k(p,q)$, $k = 0,\dots,n$. Случай $k = 0$ тривиален, т.к.

$$\sum_{A\in \mathrm{I_{Even}}} e_A e^A = \sum_{A\in \mathrm{I_{Odd}}} e_A e^A = 2^{n-1}.$$

В случае нечетного $k = n$ элементы ранга n лежат в центре, поэтому

$$\sum_{A\in \mathrm{I_{Even}}} e_A e^{1\dots n} e^A = \sum_{A\in \mathrm{I_{Odd}}} e_A e^{1\dots n} e^A = 2^{n-1}e^{1\dots n}.$$

В случае четного $k=n$ элемент $e^{1\ldots n}$ антикоммутирует со всеми нечетными элементами алгебры Клиффорда и коммутирует со всеми четными элементами алгебры Клиффорда, поэтому

$$\sum_{A\in \mathrm{I}_{\mathrm{Even}}} e_A e^{1\ldots n} e^A = -\sum_{A\in \mathrm{I}_{\mathrm{Odd}}} e_A e^{1\ldots n} e^A = 2^{n-1} e^{1\ldots n}.$$

Для всех остальных рангов $k=1,\ldots,n-1$ можем воспользоваться (2), просуммировать по всем четным (или нечетным) m, перегруппировать слагаемые и получить

$$\begin{aligned}\sum_{A\in \mathrm{I}_{\mathrm{Even}}} e_A U_k e^A = \Bigg(\Big(\sum_{i-\mathrm{even}} C_k^i\Big)\Big(\sum_{i-\mathrm{even}} C_{n-k}^i\Big)-\\ -\Big(\sum_{i-\mathrm{odd}} C_k^i\Big)\Big(\sum_{i-\mathrm{odd}} C_{n-k}^i\Big)\Bigg)U_k =\\ =(2^{k-1}2^{n-k-1}-2^{k-1}2^{n-k-1})U_k=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{A\in \mathrm{I}_{\mathrm{Odd}}} e_A U_k e^A = (-1)^k\Bigg(\Big(\sum_{i-\mathrm{even}} C_k^i\Big)\Big(\sum_{i-\mathrm{odd}} C_{n-k}^i\Big)-\\ -\Big(\sum_{i-\mathrm{odd}} C_k^i\Big)\Big(\sum_{i-\mathrm{even}} C_{n-k}^i\Big)\Bigg)U_k =\\ =(-1)^k(2^{k-1}2^{n-k-1}-2^{k-1}2^{n-k-1})U_k=0.\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Теорема 5. *Для произвольного элемента $U\in C\ell(p,q)$ в случае четного $n=p+q$ имеем*

$$\begin{aligned}\pi_0(U) &= \frac{1}{2^n}\Big(\sum_{A\in \mathrm{I}_{\mathrm{Even}}} e_A U e^A + \sum_{A\in \mathrm{I}_{\mathrm{Odd}}} e_A U e^A\Big) = \frac{1}{2^n} e_A U e^A,\\ \pi_n(U) &= \frac{1}{2^n}\Big(\sum_{A\in \mathrm{I}_{\mathrm{Even}}} e_A U e^A - \sum_{A\in \mathrm{I}_{\mathrm{Odd}}} e_A U e^A\Big).\end{aligned}$$

Доказательство. Используя (3), получаем утверждение теоремы. □

Итак, в случае четного n проекцию элемента на подпространства рангов 0 и n можно получить как линейную комбинацию двух рассматриваемых сверток. Если n нечетно, то можем получить только проекцию на центр (с помощью любой из трех рассматриваемых сверток):

$$\pi_{center}(U)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{A\in \mathrm{I}_{\mathrm{Even}}} e_A U e^A = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{A\in \mathrm{I}_{\mathrm{Odd}}} e_A U e^A = \frac{1}{2^n} e_A U e^A,$$

где π_{center} — проекция на центр алгебры Клиффорда.

Теперь рассмотрим системы коммутаторных уравнений по четным и нечетным мультииндексам.

Теорема 6. *Пусть элемент $X \in C\ell(p,q)$ удовлетворяет следующей системе 2^{n-1} уравнений для некоторых элементов $q^A \in C\ell(p,q)$:*

$$e^A X + \epsilon X e^A = q^A, \quad |A| - even, \qquad \epsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Тогда в случае $\epsilon = -1$ (случай коммутатора) система либо не имеет решения, либо имеет решение (единственное с точностью до прибавления произвольных элементов рангов 0 и n):

$$X = -\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{|A|-even} q^A e_A + U_0 + U_n.$$

В случае $\epsilon \neq -1$ система либо не имеет решения, либо имеет единственное решение:

$$X = \frac{1}{2^{n-1}\epsilon}\Bigg(\sum_{|A|-even} q^A e_A - \frac{1}{(\epsilon+1)}(\pi_0(q^A e_A) + \pi_n(q^A e_A)\Bigg).$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{|A|-\mathrm{even}} e^A X e_A + \epsilon X \sum_{|A|-\mathrm{even}} e^A e_A = \sum_{|A|-\mathrm{even}} q^A e_A,$$

откуда

$$2^{n-1}(\pi_0(X) + \pi_n(X)) + \epsilon 2^{n-1} X = \sum_{|A|-\mathrm{even}} q^A e_A.$$

Расписывая элемент по рангам $X = \sum_{k=0}^{n} \pi_k(X)$, получаем решение. □

Теорема 7. *Пусть элемент $X \in C\ell(p,q)$ удовлетворяет следующей системе 2^{n-1} уравнений для некоторых элементов $q^A \in C\ell(p,q)$:*

$$e^A X + \epsilon X e^A = q^A, \quad |A| - odd, \qquad \epsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Тогда в случае $\epsilon = -1$ (случай коммутатора) система либо не имеет решение, либо имеет решение (единственное с точностью до прибавления элементов заданных рангов) вида

$$X = -\frac{1}{2^{n-1}}\Bigg(\sum_{|A|-odd} q^A e_A - \frac{1}{2}\pi_n(\sum_{|A|-odd} q^A e_A)\Bigg) + U_0$$

в случае четного n и

$$X = -\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{|A|-odd} q^A e_A + U_0 + U_n$$

в случае нечетного n.

В случае $\epsilon = 1$ (случай антикоммутатора) система либо не имеет решения, либо имеет решение вида (единственное с точностью до прибавления элементов заданных рангов) вида

$$X = \frac{1}{2^{n-1}}\Big(\sum_{|A|-odd} q^A e_A - \frac{1}{2}\pi_n\Big(\sum_{|A|-odd} q^A e_A\Big)\Big) + U_n$$

в случае четного n и

$$X = \frac{1}{2^{n-1}}\Big(\sum_{|A|-odd} q^A e_A - \frac{1}{2}\pi_0\Big(\sum_{|A|-odd} q^A e_A\Big) - \frac{1}{2}\pi_n\Big(\sum_{|A|-odd} q^A e_A\Big)\Big)$$

в случае нечетного n.

В случае $\epsilon \neq \pm 1$ система либо не имеет решения, либо имеет единственное решение вида

$$X = \frac{1}{2^{n-1}\epsilon}\Big(\sum_{|A|-odd} q^A e_A - \frac{1}{\epsilon+1}\pi_0\Big(\sum_{|A|-odd} q^A e_A\Big) + \frac{1}{\epsilon-1}\pi_n\Big(\sum_{|A|-odd} q^A e_A\Big)\Big)$$

в случае четного n и

$$X = \frac{1}{2^{n-1}\epsilon}\Big(\sum_{|A|-odd} q^A e_A - \frac{1}{\epsilon+1}\pi_0\Big(\sum_{|A|-odd} q^A e_A\Big) - \frac{1}{\epsilon+1}\pi_n\Big(\sum_{|A|-odd} q^A e_A\Big)\Big)$$

в случае нечетного n.

Доказательство. Имеем

$$\sum_{|A|-\mathrm{odd}} e^A X e_A + \epsilon X \sum_{|A|-\mathrm{odd}} e^A e_A = \sum_{|A|-\mathrm{odd}} q^A e_A.$$

Отсюда в случае четного n имеем

$$2^{n-1}\big((\epsilon+1)\pi_0(X) + (\epsilon-1)\pi_n(X)\big) + \epsilon 2^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\pi_k(X) = \sum_{|A|-\mathrm{odd}} q^A e_A,$$

а в случае нечетного n —

$$2^{n-1}\big((\epsilon+1)\pi_0(X) + (\epsilon+1)\pi_n(X)\big) + \epsilon 2^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\pi_k(X) = \sum_{|A|-\mathrm{odd}} q^A e_A.$$

Рассматривая всевозможные случаи, получаем утверждение теоремы. □

4. Свертки по кватернионным типам. Несложно подсчитать размерности подпространств (1) кватернионных типов $d_m(n) = \dim C\ell_{\overline{m}}(p,q) = \sum_k C_n^{4k+m}$, $m = 0,1,2,3$:

$$d_0(n) = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}, \qquad d_1(n) = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\sin\frac{\pi n}{4},$$

$$d_2(n) = 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}} \cos\frac{\pi n}{4}, \qquad d_3(n) = 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}} \sin\frac{\pi n}{4}.$$

Будем рассматривать следующие *свертки по кватернионным типам* (нормировать на множители $d_m(n)$ в дальнейшем иногда не будем):

$$F_{\overline{0}}(U) = \frac{1}{d_0(n)} \sum_{A \in \mathrm{I}_{\overline{0}}} e_A U e^A, \qquad F_{\overline{1}}(U) = \frac{1}{d_1(n)} \sum_{A \in \mathrm{I}_{\overline{1}}} e_A U e^A,$$
$$F_{\overline{2}}(U) = \frac{1}{d_2(n)} \sum_{A \in \mathrm{I}_{\overline{2}}} e_A U e^A, \qquad F_{\overline{3}}(U) = \frac{1}{d_3(n)} \sum_{A \in \mathrm{I}_{\overline{3}}} e_A U e^A.$$

Теорема 8. *Пусть U_k — элемент алгебры Клиффорда $C\ell(p,q)$ ранга k. При $k = 1, \ldots, n-1$ свертки равны следующим величинам:*

$$\begin{aligned}
\sum_{A \in \mathrm{I}_{\overline{0}}} e_A U_k e^A &= 2^{\frac{n-2}{2}} \cos\Big(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi n}{4}\Big) U_k,\\
\sum_{A \in \mathrm{I}_{\overline{1}}} e_A U_k e^A &= (-1)^{k+1} 2^{\frac{n-2}{2}} \sin\Big(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi n}{4}\Big) U_k,\\
\sum_{A \in \mathrm{I}_{\overline{2}}} e_A U_k e^A &= -2^{\frac{n-2}{2}} \cos\Big(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi n}{4}\Big) U_k,\\
\sum_{A \in \mathrm{I}_{\overline{3}}} e_A U_k e^A &= (-1)^k 2^{\frac{n-2}{2}} \sin\Big(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi n}{4}\Big) U_k.
\end{aligned} \tag{4}$$

При $k = 0$ и $k = n$ имеем (для $m = 0, 1, 2, 3$)

$$\sum_{A \in \mathrm{I}_{\overline{m}}} e_A e^A = d_m(n) e, \qquad \sum_{A \in \mathrm{I}_{\overline{m}}} e_A e^{1\ldots n} e^A = (-1)^{m(n+1)} d_m(n) e^{1\ldots n}. \tag{5}$$

Заметим, что формулы (5) не являются частным случаем формул (4). Как следствие теоремы, имеем следующие формулы для сверток по кватернионным типам от произвольного элемента алгебры Клиффорда $U \in C\ell(p,q)$:

$$\sum_{A \in \mathrm{I}_{\overline{0}}} e_A U e^A = \sum_{k=0}^{3} 2^{\frac{n-2}{2}} \cos\Big(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi n}{4}\Big) \pi_{\overline{k}}(U) + 2^{n-2}\big(\pi_0(U) + \pi_n(U)\big),$$

$$\sum_{A \in \mathrm{I}_{\overline{1}}} e_A U e^A = \sum_{k=0}^{3} (-1)^{k+1} 2^{\frac{n-2}{2}} \sin\Big(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi n}{4}\Big) \pi_{\overline{k}}(U) + {}$$
$$+ 2^{n-2}\big(\pi_0(U) + (-1)^{n+1}\pi_n(U)\big), \tag{6}$$

$$\sum_{A \in \mathrm{I}_{\overline{2}}} e_A U e^A = \sum_{k=0}^{3} -2^{\frac{n-2}{2}} \cos\Big(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi n}{4}\Big) \pi_{\overline{k}}(U) + 2^{n-2}\big(\pi_0(U) + \pi_n(U)\big),$$

$$\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{3}}} e_A U e^A = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k 2^{\frac{n-2}{2}} \sin\Big(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi n}{4}\Big)\pi_{\overline{k}}(U)+ \\ + 2^{n-2}\big(\pi_0(U)+(-1)^{n+1}\pi_n(U)\big).$$

Доказательство. Формулы для рангов $k=0$ и $k=n$ очевидны и следуют из формул для размерности соответствующих подпространств. Для остальных $k=1,\ldots,n-1$, используя (2), имеем

$$\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{0}}} e_A U_k e^A = \Bigg(\Big(\sum_{i=0 \mod 4} C_k^i\Big)\Big(\sum_{i=0 \mod 4} C_{n-k}^i\Big)- \\ -\Big(\sum_{i=1 \mod 4} C_k^i\Big)\Big(\sum_{i=3 \mod 4} C_{n-k}^i\Big)+\Big(\sum_{i=2 \mod 4} C_k^i\Big)\Big(\sum_{i=2 \mod 4} C_{n-k}^i\Big)- \\ -\Big(\sum_{i=3 \mod 4} C_k^i\Big)\Big(\sum_{i=1 \mod 4} C_{n-k}^i\Big)\Bigg)U_k = \\ = \big(d_0(k)d_0(n-k)-d_1(k)d_3(n-k)+d_2(k)d_2(n-k)-d_3(k)d_1(n-k)\big)U_k.$$

Далее, пользуясь формулами для коэффициентов и тригонометрическими тождествами, получаем первое из утверждений теоремы. Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Согласно доказанной теореме, свертки по мультииндексам фиксированных кватернионных типов сводятся к операциям проецирования на подпространства кватернионных типов и операциям проецирования на ранги 0 и n. Однако в случае четного n верно и обратное: можно выразить операции проецирования на подпространства кватернионных типов через четыре рассматриваемые свертки и две дополнительные свертки по рангам 0 и n. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 9. *Для произвольного элемента $U\in C\!\ell(p,q)$ в случае четного $n=p+q$ имеем*

$$\pi_{\overline{0}}(U) = 2^{\frac{-n-2}{2}}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\cos\Big(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi n}{4}\Big)\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{k}}} e_A U e^A + 2^{-2}(U+e_{1\ldots n}Ue^{1\ldots n}),$$

$$\pi_{\overline{1}}(U) = 2^{\frac{-n-2}{2}}\sum_{k=0}^{3}\sin\Big(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi n}{4}\Big)\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{k}}} e_A U e^A + 2^{-2}(U-e_{1\ldots n}Ue^{1\ldots n}),$$

$$\pi_{\overline{2}}(U) = 2^{\frac{-n-2}{2}}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\cos\Big(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi n}{4}\Big)\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{k}}} e_A U e^A + 2^{-2}(U+e_{1\ldots n}Ue^{1\ldots n}),$$

$$\pi_{\overline{3}}(U) = 2^{\frac{-n-2}{2}}\sum_{k=0}^{3}(-1)\sin\Big(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi n}{4}\Big)\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{k}}} e_A U e^A + 2^{-2}(U-e_{1\ldots n}Ue^{1\ldots n}).$$

Доказательство. Добавляем к рассматриваемым выше четырем уравнениям (6) два следующих уравнения:

$$eUe=\sum_{k=0}^{3}\pi_{\overline{k}}(U),\qquad e_{1\dots n}Ue^{1\dots n}=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\pi_{\overline{k}}(U).$$

Получающаяся квадратная матрица размера 6 рассматриваемой линейной системы уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix}
2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & 2^{\frac{n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & -2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & -2^{\frac{n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & 2^{n-2} & 2^{n-2}\\
2^{\frac{n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & 2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & -2^{\frac{n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & -2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & 2^{n-2} & -2^{n-2}\\
-2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & -2^{\frac{n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & 2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & 2^{\frac{n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & 2^{n-2} & 2^{n-2}\\
-2^{\frac{n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & -2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & 2^{\frac{n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & 2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & 2^{n-2} & -2^{n-2}\\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен

$$2^{3n}\Big(\cos^2\Big(\frac{\pi n}{4}\Big)-\sin^2\Big(\frac{\pi n}{4}\Big)\Big).$$

В случае нечетного n определитель равен нулю и матрица необратима. В случае $n=0 \mod 4$ определитель равен 2^{3n}, а в случае $n=2 \mod 4$ определитель равен -2^{3n} и матрица обратима. Можем записать в случае четного n, что определитель матрицы равен $(-1)^{n/2}2^{3n}$.

Обратная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix}
2^{\frac{-n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & -2^{\frac{-n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & -2^{\frac{-n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & 2^{\frac{-n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & 2^{-2} & 2^{-2}\\
-2^{\frac{-n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & 2^{\frac{-n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & 2^{\frac{-n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & -2^{\frac{-n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & 2^{-2} & -2^{-2}\\
-2^{\frac{-n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & 2^{\frac{-n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & 2^{\frac{-n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & -2^{\frac{-n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & 2^{-2} & 2^{-2}\\
2^{\frac{-n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & -2^{\frac{-n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & -2^{\frac{-n-2}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4}) & 2^{\frac{-n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4}) & 2^{-2} & -2^{-2}\\
2^{-n} & 2^{-n} & 2^{-n} & 2^{-n} & 0 & 0\\
2^{-n} & -2^{-n} & 2^{-n} & -2^{-n} & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем в случае четного n связь между проекциями на кватернионные типы и свертками, указанную в формулировке теоремы. $\square$

Заметим, что в случае нечетного n выписанная матрица необратима. Более того, имеем

$$\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{0}}} e_AUe^A=\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{3}}} e_AUe^A,\qquad \sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{2}}} e_AUe^A=\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{1}}} e_AUe^A,$$

а значит

$$e_AUe^A=2\Big(\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{0}}} e_AUe^A+\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{2}}} e_AUe^A\Big)=2\Big(\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{1}}} e_AUe^A+\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{3}}} e_AUe^A\Big)=$$

$$=2\Big(\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{0}}} e_AUe^A+\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{1}}} e_AUe^A\Big)=2\Big(\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{2}}} e_AUe^A+\sum_{A\in \mathrm{I}_{\overline{3}}} e_AUe^A\Big).$$

Теперь рассмотрим системы коммутаторных уравнений по кватернионным типам, как это делалось выше для рангов, четных и нечетных сверток:

$$e^A X + \epsilon X e^A = q^A, \qquad |A| = m \mod 4, \qquad m = 0,1,2,3, \qquad \epsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

В силу громоздкости получающегося утверждения в общем случае рассмотрим в следующий теореме только случай $\epsilon = -1$ (случай коммутатора). В других случаях система уравнений решается аналогично.

Теорема 10. *Пусть элемент $X \in C\ell(p,q)$ алгебры Клиффорда размерности $p+q=n \geqslant 5$ удовлетворяет следующей системе уравнений для некоторых элементов $q^A \in C\ell(p,q)$:*

$$[e^A, X] = q^A, \quad \forall |A| = m \mod 4, \qquad m = 0,1,2,3.$$

Тогда система либо не имеет решения, либо имеет решение вида (единственное с точностью до прибавления указанных произвольных элементов фиксированных рангов)

$$X = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi_k\left(\sum_{|A|=0 \mod 4} q^A e_A\right)}{\cos(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi n}{4}) - \cos(\frac{\pi n}{4}) - 2^{\frac{n-2}{2}}} + U_0 + U_n$$

в случае $m=0$,

$$X = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi_k\left(\sum_{|A|=1 \mod 4} q^A e_A\right)}{(-1)^{k+1}\sin(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi n}{4}) - \sin(\frac{\pi n}{4}) - 2^{\frac{n-2}{2}}} - \\ - \frac{\pi_n\left(\sum_{|A|=1 \mod 4} q^A e_A\right)}{2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4})} + U_0$$

в случае $m=1$ и четного n,

$$X = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi_k\left(\sum_{|A|=1 \mod 4} q^A e_A\right)}{(-1)^{k+1}\sin(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi n}{4}) - \sin(\frac{\pi n}{4}) - 2^{\frac{n-2}{2}}} + U_0 + U_n$$

в случае $m=1$ и нечетного n,

$$X = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi_k\left(\sum_{|A|=2 \mod 4} q^A e_A\right)}{-\cos(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi n}{4}) + \cos(\frac{\pi n}{4}) - 2^{\frac{n-2}{2}}} + U_0 + U_n$$

в случае $m=2$,

$$X = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi_k\left(\sum_{|A|=3 \mod 4} q^A e_A\right)}{(-1)^{k}\sin(\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi n}{4}) + \sin(\frac{\pi n}{4}) - 2^{\frac{n-2}{2}}} - \\ - \frac{\pi_n\left(\sum_{|A|=3 \mod 4} q^A e_A\right)}{2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4})} + U_0$$

в случае $m=3$ *и четного* n,

$$X=\frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi_k\left(\sum_{|A|=3 \mod 4}q^A e_A\right)}{(-1)^k\sin(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi n}{4})+\sin(\frac{\pi n}{4})-2^{\frac{n-2}{2}}}+U_0+U_n$$

в случае $m=3$ *и нечетного* n.

Доказательство. Имеем для $m=0,1,2,3$

$$\sum_{|A|=m \mod 4}e^A X e_A - X\sum_{|A|=m \mod 4}e^A e_A=\sum_{|A|=m \mod 4}q^A e_A.$$

Пользуясь (4) и (5), получаем для случая $m=0$

$$2^{\frac{n}{2}-1}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\Big(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi n}{4}\Big)\pi_k(X)+\Big(2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\cos\Big(\frac{\pi n}{4}\Big)\Big)\pi_0(X)+$$
$$+\Big(2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\cos\Big(\frac{\pi n}{4}\Big)\Big)\pi_n(X)-\Big(2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\cos\Big(\frac{\pi n}{4}\Big)\Big)X=\sum_{|A|=0 \mod 4}q^A e_A.$$

В случаях $m=1,2,3$ действуем аналогично. Далее рассматриваем всевозможные случаи. Заметим, что выражения, стоящие в формулировке теоремы в знаменателях, не обращаются в ноль ни для какого k при $n\geqslant 5$. □

Отметим, что можно сформулировать аналог этой теоремы и для случая $n\leqslant 4$. В этом случае некоторые коэффициенты из доказательства предыдущей теоремы будут обнуляться для фиксированных рангов k. В таком случае решение будет содержать в качестве слагаемого вместо проекции на соответствующий ранг — произвольный элемент указанного ранга. Например, для $m=0$ коэффициент обнуляется при $n=4$ и $k=2$:

$$\cos\Big(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi n}{4}\Big)-\cos\Big(\frac{\pi n}{4}\Big)-2^{\frac{n-2}{2}}=0,$$

а значит, вместо проекции π_2 в качестве слагаемого будет присутствовать произвольный элемент U_2.

Заметим, что в случае размерностей $n\leqslant 3$ понятие кватернионного типа совпадает с понятием ранга элемента алгебры Клиффорда, поэтому все сводится к рассмотрению коммутаторных уравнений по рангам (см. рассуждения в конце параграфа 2).

Заключение. В настоящей статье представлены и доказаны утверждения для сверток в алгебрах Клиффорда разного вида, построенных с помощью фиксированного базиса алгебры Клиффорда. Доказанные утверждения могут непосредственно применяться при решении уравнений в формализме алгебр Клиффорда, как это было сделано в работе [12] при изучении уравнений Янга—Миллса и простейшего полевого уравнения.

Заметим, что во всех теоремах настоящей статьи мы могли рассматривать не генераторы алгебры Клиффорда e^a, а произвольный набор элементов алгебры Клиффорда $\gamma^a\in C\ell(p,q)$, который удовлетворяет определяющим соотношениям $\gamma^a\gamma^b+\gamma^b\gamma^a=2\eta^{ab}e$. Этот набор может порождать другой базис γ^A

алгебры Клиффорда $C\ell(p,q)$, но в некоторых случаях нечетной размерности n этот набор может не порождать новый базис $C\ell(p,q)$ (см. более подробно [13]). В работе [13] рассматриваются обобщенные свертки, построенные по двум таким наборам γ^a, β^a.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ 14–11–00687, Математический институт им. В. А. Стеклова).

ORCID
Дмитрий Сергеевич Широков: http://orcid.org/0000-0002-2407-9601

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Clifford W. K. Application of Grassmann's Extensive Algebra // *American Journal of Mathematics*, 1878. vol. 1, no. 4. pp. 350–358. doi: 10.2307/2369379.
2. Hamilton W. R. II. On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra // *Philosophical Magazine Series 3*, 1844. vol. 25, no. 163. pp. 489–495. doi: 10.1080/14786444408644923.
3. Grassmann H. *Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik*. Leipzig: Verlag von Otto Wigand, 1844. xxxii+282 pp., Internet Archive Identifier: dielinealeausde00grasgoog ; Grassmann H. *Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. xxxii+282 pp.. doi: 10.1017/CBO9781139237352
4. Lipschitz R. *Untersuchungen über die Summen von Quadraten*. Bonn: Max Cohen und Sohn, 1886. 147 pp.
5. Chevalley C. *Collected works*. vol. 2: The algebraic theory of spinors and Clifford algebras / eds. Pierre Cartier and Catherine Chevalley. Berlin: Springer, 1997. xiv+ 214 pp.
6. Dirac P. A. M. The Quantum Theory of the Electron // *Proc. R. Soc. (A)*, 1928. vol. 117, no. 778. pp. 610–624. doi: 10.1098/rspa.1928.0023 ; Dirac P. A. M. The Quantum Theory of the Electron / *Special Theory of Relativity* / The Commonwealth and International Library: Selected Readings in Physics, 1970. pp. 237–256. doi: 10.1016/b978-0-08-006995-1.50017-x.
7. Hestenes D., Sobczyk G. *Clifford Algebra to Geometric Calculus. A Unified Language for Mathematics and Physics*. Reidel Publishing Company, 1984. 314 pp.
8. Марчук Н. Г. *Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда*. Ижевск: РХД, 2009. 304 с.
9. Dixon J. D. Computing Irreducible Representations of Groups // *Math. Comp.*, 1970. vol. 24, no. 111. pp. 707–712. doi: 10.2307/2004848.
10. Babai L., Friedl K. Approximate representation theory of finite groups // *Foundations of Computer Science*, 1991. pp. 733–742. doi: 10.1109/sfcs.1991.185442.
11. Shirokov D. S. *Method of averaging in Clifford algebras*, 2015. 15 pp., arXiv: 1412.0246 [math-ph]
12. Marchuk N. G., Shirokov D. S. *New class of gauge invariant solutions of Yang–Mills equations*, 2014. 35 pp., arXiv: 1406.6665 [math-ph]
13. Shirokov D. S. *Method of generalized contractions and Pauli's theorem in Clifford algebras*, 2014. 14 pp., arXiv: 1409.8163 [math-ph]
14. Pauli W. Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac // *Annales de l'institut Henri Poincaré*, 1936. vol. 6, no. 2. pp. 109–136.
15. Широков Д. С. Обобщение теоремы Паули на случай алгебр Клиффорда // *Докл. РАН*, 2011. Т. 440, № 5. С. 1–4.
16. Широков Д. С. Теорема Паули при описании n-мерных спиноров в формализме алгебр Клиффорда // *ТМФ*, 2013. Т. 175, № 1. С. 11–34. doi: 10.4213/tmf8384.
17. Широков Д. С. Использование обобщённой теоремы Паули для нечётных элементов алгебры Клиффорда для анализа связей между спинорными и ортогональными группами произвольных размерностей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 1(30). С. 279–287. doi: 10.14498/vsgtu1176.

18. Marchuk N. G., Shirokov D. S. Unitary spaces on Clifford algebras // *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 2008. vol. 18, no. 2. pp. 237–254, arXiv: 0705.1641 [math-ph]. doi: 10.1007/s00006-008-0066-y.
19. Lounesto P. *Clifford Algebras and Spinors* / London Mathematical Society Lecture Note Series. vol. 239. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. ix+306 pp. ; Lounesto P. *Clifford Algebras and Spinors* (second edition) / London Mathematical Society Lecture Note Series. vol. 286. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. ix+338 pp.. doi: 10.1017/cbo9780511526022
20. Широков Д. С. Классификация элементов алгебр Клиффорда по кватернионным типам // *ДАН*, 2009. Т. 427, № 6. С. 758–760.
21. Shirokov D. S. Quaternion typification of Clifford algebra elements // *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 2012. vol. 22, no. 1. pp. 243-256. doi: 10.1007/s00006-011-0288-2.
22. Shirokov D. S. Development of the method of quaternion typification of clifford algebra elements // *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 2012. vol. 22, no. 2. pp. 483–497, arXiv: 0903.3494 [math-ph]. doi: 10.1007/s00006-011-0304-6.

Поступила в редакцию 15/XII/2014;
в окончательном варианте — 17/II/2015;
принята в печать — 25/II/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 117–135

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1387

MSC: 15A66, 70S15

CONTRACTIONS ON RANKS AND QUATERNION TYPES IN CLIFFORD ALGEBRAS

D. S. Shirokov[1,2]

[1] A. A. Kharkevich Institute for Information Transmission Problems,
Russian Academy of Sciences,
19, Bolshoy Karetny per., Moscow, 127994, Russian Federation.
[2] N. E. Bauman Moscow State Technical University,
5/1, 2-ya Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russian Federation.

Abstract

In this paper we consider expressions in real and complex Clifford algebras, which we call contractions or averaging. We consider contractions of arbitrary Clifford algebra element. Each contraction is a sum of several summands with different basis elements of Clifford algebra. We consider even and odd contractions, contractions on ranks and contractions on quaternion types. We present relation between these contractions and projection

How to cite Reference
Shirokov D. S. Contractions on ranks and quaternion types in Clifford algebras, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 117–135. doi: 10.14498/vsgtu1387. (In Russian)

Author Details
Dmitry S. Shirokov (Cand. Phys. & Math. Sci.; dm.shirokov@gmail.com), Scientific Researcher, Lab. 7 “Bioelectric Information Processing”[1]; Assistant Professor, Dept. of Higher Mathematics[2].

operations onto fixed subspaces of Clifford algebras — even and odd subspaces, subspaces of fixed ranks and subspaces of fixed quaternion types. Using method of contractions we present solutions of system of commutator equations in Clifford algebras. The cases of commutator and anticommutator are the most important. These results can be used in the study of different field theory equations, for example, Yang–Mills equations, primitive field equation and others.

Keywords: Clifford algebras, contractions, projection operations, quaternion type.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1387

Acknowledgments. This work was supported by Russian Science Foundation (RSF 14–11–00687, Steklov Mathematical Institute).

ORCID
Dmitry S. Shirokov: http://orcid.org/0000-0002-2407-9601

REFERENCES

1. Clifford W. K. Application of Grassmann's Extensive Algebra, *American Journal of Mathematics*, 1878, vol. 1, no. 4, pp. 350–358. doi: 10.2307/2369379.
2. Hamilton W. R. II. On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra, *Philosophical Magazine Series 3*, 1844, vol. 25, no. 163, pp. 489–495. doi: 10.1080/14786444408644923.
3. Grassmann H. *Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik*. Leipzig, Verlag von Otto Wigand, 1844, xxxii+282 pp., Internet Archive Identifier: dielinealeausde00grasgoog ; Grassmann H. *Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik*. Cambridge, Cambridge University Press, 2012, xxxii+282 pp.. doi: 10.1017/CBO9781139237352
4. Lipschitz R. *Untersuchungen über die Summen von Quadraten*. Bonn, Max Cohen und Sohn, 1886, 147 pp.
5. Chevalley C. *Collected works*, vol. 2, The algebraic theory of spinors and Clifford algebras, eds. Pierre Cartier and Catherine Chevalley. Berlin, Springer, 1997, xiv+ 214 pp.
6. Dirac P. A. M. The Quantum Theory of the Electron, *Proc. R. Soc. (A)*, 1928, vol. 117, no. 778, pp. 610–624. doi: 10.1098/rspa.1928.0023 ; Dirac P. A. M. The Quantum Theory of the Electron, *Special Theory of Relativity*, The Commonwealth and International Library: Selected Readings in Physics, 1970, pp. 237–256. doi: 10.1016/b978-0-08-006995-1.50017-x.
7. Hestenes D., Sobczyk G. *Clifford Algebra to Geometric Calculus. A Unified Language for Mathematics and Physics*. Reidel Publishing Company, 1984, 314 pp.
8. Marchuk N. G. *Uravneniia teorii polia i algebry Klifforda* [Equations of Field Theory and Clifford Algebras]. Izhevsk, Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika, 2009, 304 pp. (In Russian)
9. Dixon J. D. Computing Irreducible Representations of Groups, *Math. Comp.*, 1970, vol. 24, no. 111, pp. 707–712. doi: 10.2307/2004848.
10. Babai L., Friedl K. Approximate representation theory of finite groups, *Foundations of Computer Science*, 1991, pp. 733–742. doi: 10.1109/sfcs.1991.185442.
11. Shirokov D. S. *Method of averaging in Clifford algebras*, 2015, 15 pp., arXiv: 1412.0246 [math-ph]
12. Marchuk N. G., Shirokov D. S. *New class of gauge invariant solutions of Yang–Mills equations*, 2014, 35 pp., arXiv: 1406.6665 [math-ph]
13. Shirokov D. S. *Method of generalized contractions and Pauli's theorem in Clifford algebras*, 2014, 14 pp., arXiv: 1409.8163 [math-ph]

14. Pauli W. Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac, *Annales de l'institut Henri Poincaré*, 1936, vol. 6, no. 2, pp. 109–136.
15. Shirokov D. S. Extension of Pauli's theorem to Clifford algebras, *Dokl. Math.*, 2011, T. 84, № 2, C. 699–701. doi: 10.1134/s1064562411060329.
16. Shirokov D. S. Pauli theorem in the description of n -dimensional spinors in the Clifford algebra formalism, *Theoret. and Math. Phys.*, 2013, vol. 175, no. 1, pp. 454–474. doi: 10.1007/s11232-013-0038-9.
17. Shirokov D. S. The use of the generalized Pauli's theorem for odd elements of Clifford algebra to analyze relations between spin and orthogonal groups of arbitrary dimensions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2013, no. 1(30), pp. 279–287 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1176.
18. Marchuk N. G., Shirokov D. S. Unitary spaces on Clifford algebras, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 2008, vol. 18, no. 2, pp. 237–254, arXiv: 0705.1641 [math-ph]. doi: 10.1007/s00006-008-0066-y.
19. Lounesto P. *Clifford Algebras and Spinors*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 239. Cambridge, Cambridge University Press, 1997, ix+306 pp. ; Lounesto P. *Clifford Algebras and Spinors* (second edition), London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 286. Cambridge, Cambridge University Press, 2001, ix+338 pp.. doi: 10.1017/cbo9780511526022
20. Shirokov D. S. Classification of elements of clifford algebras according to quaternionic types, *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 80, no. 1, pp. 610–612. doi: 10.1134/S1064562409040401.
21. Shirokov D. S. Quaternion typification of Clifford algebra elements, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 2012, vol. 22, no. 1, pp. 243-256. doi: 10.1007/s00006-011-0288-2.
22. Shirokov D. S. Development of the method of quaternion typification of clifford algebra elements, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 2012, vol. 22, no. 2, pp. 483–497, arXiv: 0903.3494 [math-ph]. doi: 10.1007/s00006-011-0304-6.

Received 15/XII/2014;
received in revised form 17/II/2015;
accepted 25/II/2015.