Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 4. С. 603–612
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1424

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ С ДАННЫМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКЕ

А. А. Андреев, Е. А. Максимова

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Рассмотрена система n дифференциальных уравнений в частных производных в матричной записи (система уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу). Поставлены задачи Коши—Гурса и Дарбу для случая, когда характеристические числа матрицы-коэффициента принадлежат интервалу $(0; 1/2)$. Матрица-коэффициент приведена к жордановой форме, что позволило разделить систему на r независимых систем уравнений, по одной для каждой жордановой клетки. В полученных системах матричный коэффициент имеет одно собственное значение из рассматриваемого интервала. Для систем уравнений с одним матричным коэффициентом, представляющим собой жорданову клетку, которая является диагональной или треугольной матрицей, решение может быть получено с использованием известных свойств функций от матрицы. С использованием построенной ранее матрицы Римана рассматриваемой системы уравнений для всех r систем уравнений построена матрица Римана—Адамара. С помощью матрицы Римана—Адамара для каждой системы матричных уравнений в частных производных построено решение задач Коши—Гурса и Дарбу. Решение исходных задач записано в виде прямой суммы решений систем для жордановых клеток. Сформулирована теорема корректности полученных решений.

Ключевые слова: метод Римана, задача Коши–Гурса, Задача Дарбу, дифференциальные уравнения в частных производных, система уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1424

Образец для цитирования

Андреев А. А., Максимова Е. А. Краевые задачи для матричного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу с данными на характеристике // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 603–612. doi: 10.14498/vsgtu1424.

Сведения об авторах

Александр Анатольевич Андреев (к.ф.-м.н.; доц.; andre01071948@yandex.ru; автор, ведущиё переписку), доцент, каф. прикладной математики и информатики.
Екатерина Алексеевна Максимова (ekamaks@bk.ru), ассистент, каф. прикладной математики и информатики.

В настоящее время имеется ряд монографий и статей, посвященных краевым задачам и их корректности для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу и его обобщений. Так, в монографии Р. С. Хайруллина [1] получены общие решения для всех возможных вещественных значений параметров и построены решения задачи Коши. Ранее в работах [2–4] получены решения различных краевых задач для систем двух уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу методом Римана [5], обобщенным на системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Известно, что метод решения задач Коши—Гурса и Дарбу для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$U_{xy} - \frac{b}{x-y}U_x + \frac{a}{x-y}U_y + \frac{c}{(x-y)^2}U = 0$$

в случае $a = b = 1/6$, $c = 0$ С. Геллерстедт [6] впервые применил метод, носящий название метода Римана—Адамара. Позже этот метод был обобщен [7,8] на один класс систем гиперболического типа второго порядка с двумя неизвестными переменными и кратными характеристиками — систему Эйлера—Пуассона—Дарбу.

Рассмотрим следующую систему n дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{G}{\eta-\xi}\frac{\partial U}{\partial\xi} - \frac{G}{\eta-\xi}\frac{\partial U}{\partial\eta} = 0, \tag{1}$$

где $U = (u_1, \ldots, u_n)^\top$, G — действительная $n \times n$-матрица.

В работе [7] построена матрица Римана и с её помощью получено решение задач Коши—Гурса и Дарбу для системы (1) при $n = 2$ и различных собственных значениях квадратной матрицы G из интервала $(0; 1/2)$. В [9,10] получены решения задачи Коши для случаев, когда собственные значения матрицы $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — комлексно-сопряжённые с действительной частью из интервала $(-1/2; 1/2)$.

Необходимо найти решение задач Коши—Гурса и Дарбу для системы (1) в случае, когда спектр квадратной матрицы G принадлежит интервалу $(0; 1/2)$.

Задача Коши—Гурса. *Найти вектор-функцию $U(\xi,\eta)$, удовлетворяющую следующим условиям*:

1) $U(\xi,\eta) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, *где* $D = \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}$;
2) $U(\xi,\eta)$ *удовлетворяет системе* (1);
3) *выполняются условия*

$$U(0,\eta) = \psi(\eta), \quad \eta \in [0;1]\,, \tag{2}$$

$$\lim_{\eta-\xi\to -0} K\Big(\frac{\eta-\xi}{2}\Big)\Big(\frac{\partial U}{\partial\xi} - \frac{\partial U}{\partial\eta}\Big) = \nu(\xi), \quad \xi \in (0;1), \tag{3}$$

где $\psi(\eta) = (\psi_1(\eta), \ldots, \psi_n(\eta))^\top$, $\nu(\xi) = (\nu_1(\xi), \ldots, \nu_n(\xi))^\top$, $K(t) = t^{2G}$.

Задача Дарбу. *Найти вектор-функцию $U(\xi,\eta)$, удовлетворяющую следующим условиям*:

1) $U(\xi,\eta) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, *где* $D = \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}$;

2) $U(\xi,\eta)$ *удовлетворяет системе* (1);
3) *выполняются условия* (2) *и*

$$U(\xi,\xi)=\tau(\xi), \quad \xi\in[0,1]\,, \tag{4}$$

где $\tau(\eta)=(\tau_1(\eta),\ldots,\tau_n(\eta))^\top$, $\tau(0)=\psi(0)$.

Известно [11], что для любой матрицы G существует матрица перехода Q к жорданову базису такая, что

$$Q^{-1}GQ=\Lambda,$$

где Λ — блочно-диагональная матрица, которая является жордановой формой матрицы G. Матрица Λ состоит из r жордановых клеток

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\Lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \Lambda_2 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \Lambda_r\end{pmatrix}, \quad r\leqslant n,$$

$$\Lambda_k=\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_k & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}}_{l_k}$$

— жорданова клетка порядка l_k, $\sum_{k=1}^{r}l_k=n$, соответствующая собственному значению λ_k. Также известно [11], что одному собственному значению может соответствовать более одной жордановой клетки. Количество s жордановых клеток размера l_k, соответствующих собственному значению λ_k, вычисляется по формуле из [12]:

$$s=\operatorname{rank}((G-\lambda_kE)^{l_k-1})-2\operatorname{rank}((G-\lambda_kE)^{l_k})+\operatorname{rank}((G-\lambda_kE)^{l_k+1}).$$

После преобразования $Q^{-1}GQ=\Lambda$ система (1) примет вид

$$\frac{\partial^2\tilde U}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\Lambda}{\eta-\xi}\frac{\partial\tilde U}{\partial\xi}-\frac{\Lambda}{\eta-\xi}\frac{\partial\tilde U}{\partial\eta}=0, \tag{5}$$

где

$$\tilde U=Q^{-1}U. \tag{6}$$

Очевидно, система уравнений (5) распадается на r независимых систем уравнений вида

$$L\tilde U_{(k)}=\frac{\partial^2\tilde U_{(k)}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\Lambda_k}{\eta-\xi}\frac{\partial\tilde U_{(k)}}{\partial\xi}-\frac{\Lambda_k}{\eta-\xi}\frac{\partial\tilde U_{(k)}}{\partial\eta}=0; \tag{7}$$

условия Коши—Гурса (2), (3) для уравнения (7) будут иметь вид

$$\tilde U_{(k)}(0,\eta)=\tilde\psi_{(k)}(\eta), \quad \eta\in[0;1]\,, \quad \tilde\psi=Q^{-1}\psi \tag{8}$$

$$\lim_{\eta-\xi\to-0}\tilde{K}_{(k)}\Big(\frac{\eta-\xi}{2}\Big)\Big(\frac{\partial\tilde{U}_{(k)}}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{U}_{(k)}}{\partial\eta}\Big)=\tilde{\nu}_{(k)}(\xi), \tag{9}$$
$$\xi\in(0;1),\quad \tilde{\nu}=Q^{-1}\nu,\quad \tilde{K}_{(k)}(t)=t^{\Lambda_k},$$

где $\tilde{U}_{(k)}$, $\tilde{\psi}_{(k)}$, $\tilde{\nu}_{(k)}$ — группы координат вектор-функций, соответствующих жордановой клетке Λ_k. Условия Дарбу (2), (4) примут вид (8) и

$$\tilde{U}_{(k)}(\xi,\xi)=\tilde{\tau}_{(k)}(\xi),\quad \xi\in[0;1]\,,\quad \tilde{\tau}=Q^{-1}\tau. \tag{10}$$

Существенную роль при решении задач (7), (8), (9) и (7), (8), (10) играет так называемая матрица Римана—Адамара.

Определение. *Матрицей Римана—Адамара* $W_i(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)$ задачи Коши—Гурса ($i=1$) или Дарбу ($i=2$) будем называть, следуя [7], квадратную матрицу-функцию порядка n

$$W_i(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)=\begin{cases}R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta>\xi_0,\\ V_i(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta<\xi_0,\quad i=1,2,\end{cases}$$

удовлетворяющую следующим требованиям:

1) каждая строка матрицы W_i относительно переменных (ξ,η) является решением системы $L^*W_i=0$;
2) каждый столбец матрицы W_i относительно переменных (ξ_0,η_0) является решением системы (7);
3) $W_i(\xi_0,\eta_0;\xi_0,\eta_0)=E$;
4) $W_i(\xi,\xi;\xi_0,\eta_0)=0$, причем для различных i порядок нуля различен.
5) $\dfrac{\partial}{\partial\xi}\,[W_i]+[W_i]\,\dfrac{\Lambda_k}{\eta-\xi}$ при $\eta=\xi_0$, где

$$[W_i]=\lim_{\varepsilon\to0}\{R(\xi,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0)-V_i(\xi,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0)\}$$

— скачок функции $W_i(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ на линии $\eta=\xi$;

$$W_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=f_1(\Lambda_k)=$$
$$=\Gamma\left(\begin{matrix}\Lambda_k\\ 2\Lambda_k,E-\Lambda_k\end{matrix}\right)\left(\frac{(\eta-\xi)^2}{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right)^{\Lambda_k}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\Lambda_k,\Lambda_k\\ 2\Lambda_k\end{matrix}\,,\frac{1}{\sigma}\right),$$

$$W_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=f_2(\Lambda_k)=$$
$$=\Gamma\left(\begin{matrix}E-\Lambda_k\\ 2E-2\Lambda_k,\Lambda_k\end{matrix}\right)\frac{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)^{E-2\Lambda_k}}{((\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0))^{E-\Lambda_k}}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}E-\Lambda_k,E-\Lambda_k\\ 2E-2\Lambda_k\end{matrix}\,,\frac{1}{\sigma}\right),$$

где Γ — гамма-функция [13], ${}_2F_1\left(\begin{matrix}\Lambda_k,\Lambda_k\\ 2\Lambda_k\end{matrix}\,,\frac{1}{\sigma}\right)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [14].

Если $\tilde{U}_{(k)}(\xi,\eta)$ является решением (7), а $W_i(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)$ — матрица Римана—Адамара этой системы, то, используя свойства матрицы Римана и векторный аналог тождества Грина [15], получаем

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}_{(k)}(\xi_0,\eta_0) = \Bigg(&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\xi_0-2\varepsilon}\Big[W_i\Big(\frac{\partial \tilde{U}_{(k)}}{\partial\eta}-\frac{\partial \tilde{U}_{(k)}}{\partial\xi}\Big)-\\
&-\Big(\frac{\partial W_i}{\partial\eta}-\frac{\partial W_i}{\partial\xi}-4W_i\frac{\Lambda_k}{\eta-\xi}\Big)\tilde{U}_{(k)}\Big]_{\eta=\xi+\varepsilon}\,d\xi-\\
&-\int_{\xi_0-2\varepsilon}^{0}\Big[W_i\frac{\partial \tilde{U}_{(k)}}{\partial\xi}-\frac{\partial W_i}{\partial\xi}\tilde{U}_{(k)}-2W_i\frac{\Lambda_k}{\eta-\xi}\tilde{U}_{(k)}\Big]_{\eta=\xi_0-\varepsilon}\,d\xi-\\
&-\int_{\xi_0-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big[W_i\frac{\partial \tilde{U}_{(k)}}{\partial\eta}-\frac{\partial W_i}{\partial\eta}\tilde{U}_{(k)}-2W_i\frac{\Lambda_k}{\eta-\xi}\tilde{U}_{(k)}\Big]_{\xi=0}\,d\eta+\\
&+\int_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0}\Big[W_i\frac{\partial \tilde{U}_{(k)}}{\partial\eta}-\frac{\partial W_i}{\partial\eta}\tilde{U}_{(k)}-2W_i\frac{\Lambda_k}{\eta-\xi}\tilde{U}_{(k)}\Big]_{\xi=\xi_0-2\varepsilon}\,d\eta-\\
&-\int_{\xi_0-2\varepsilon}^{0}\Big[W_i\frac{\partial \tilde{U}_{(k)}}{\partial\xi}-\frac{\partial W_i}{\partial\xi}\tilde{U}_{(k)}-2W_i\frac{\Lambda_k}{\eta-\xi}\tilde{U}_{(k)}\Big]_{\eta=\eta_0}\,d\xi+\\
&+\int_{\eta_0}^{\xi_0+\varepsilon}\Big[W_i\frac{\partial \tilde{U}_{(k)}}{\partial\eta}-\frac{\partial W_i}{\partial\eta}\tilde{U}_{(k)}-2W_i\frac{\Lambda_k}{\eta-\xi}\tilde{U}_{(k)}\Big]_{\xi=0}\,d\eta-\\
&-\int_0^{\xi_0-2\varepsilon}\Big[W_i\frac{\partial \tilde{U}_{(k)}}{\partial\xi}-\frac{\partial W_i}{\partial\xi}\tilde{U}_{(k)}-2W_i\frac{\Lambda_k}{\eta-\xi}\tilde{U}_{(k)}\Big]_{\eta=\xi_0+\varepsilon}\,d\xi\Bigg).
\end{aligned}
$$

Очевидно, $\tilde{U}_{(k)}(\xi_0,\eta_0)$ можно записать в виде

$$
\tilde{U}_{(k)}(\xi_0,\eta_0)=\sum_{j=1}^{l_k} I(\lambda_k,u_{(k)j})e_j, \tag{11}
$$

где $e_j=(e_{j1},e_{j2},\ldots,e_{jl_k})^\top$; $e_{ji}=0$, $i\neq j$; $e_{jj}=1$; $u_{(k)j}$ — компоненты вектора $\tilde{U}_{(k)}$; l_k — размер жордановой клетки Λ_k;

$$
\begin{aligned}
I(\Lambda_k,u_{(k)j}) = \Bigg(&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\xi_0-2\varepsilon}\Big[W_i\Big(\frac{\partial u_{(k)j}}{\partial\eta}-\frac{\partial u_{(k)j}}{\partial\xi}\Big)-\\
&-\Big(\frac{\partial f_i(\Lambda_k)}{\partial\eta}-\frac{\partial f_i(\Lambda_k)}{\partial\xi}-4f_i(\Lambda_k)\frac{\Lambda_k}{\eta-\xi}\Big)u_{(k)j}\Big]_{\eta=\xi+\varepsilon}\,d\xi-\\
&-\int_{\xi_0-2\varepsilon}^{0}\Big[f_i(\Lambda_k)\frac{\partial u_{(k)j}}{\partial\xi}-\frac{\partial f_i(\Lambda_k)}{\partial\xi}u_{(k)j}-2f_i(\Lambda_k)\frac{\Lambda_k}{\eta-\xi}u_{(k)j}\Big]_{\eta=\xi_0-\varepsilon}\,d\xi-\\
&-\int_{\xi_0-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big[f_i(\Lambda_k)\frac{\partial u_{(k)j}}{\partial\eta}-\frac{\partial f_i(\Lambda_k)}{\partial\eta}u_{(k)j}-2f_i(\Lambda_k)\frac{\Lambda_k}{\eta-\xi}u_{(k)j}\Big]_{\xi=0}\,d\eta+\\
&+\int_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0}\Big[f_i(\Lambda_k)\frac{\partial u_{(k)j}}{\partial\eta}-\frac{\partial f_i(\Lambda_k)}{\partial\eta}u_{(k)j}-2f_i(\Lambda_k)\frac{\Lambda_k}{\eta-\xi}u_{(k)j}\Big]_{\xi=\xi_0-2\varepsilon}\,d\eta-
\end{aligned}
$$

$$
- \int_{\xi_0 - 2\varepsilon}^{0} \Big[f_i(\Lambda_k) \frac{\partial u_{(k)j}}{\partial \xi} - \frac{\partial f_i(\Lambda_k)}{\partial \xi} u_{(k)j} - 2 f_i(\Lambda_k) \frac{\Lambda_k}{\eta - \xi} u_{(k)j} \Big]_{\ \eta = \eta_0} d\xi +
$$
$$
+ \int_{\eta_0}^{\xi_0 + \varepsilon} \Big[f_i(\Lambda_k) \frac{\partial u_{(k)j}}{\partial \eta} - \frac{\partial f_i(\Lambda_k)}{\partial \eta} u_{(k)j} - 2 f_i(\Lambda_k) \frac{\Lambda_k}{\eta - \xi} u_{(k)j} \Big]_{\ \xi = 0} d\eta -
$$
$$
- \int_{0}^{\xi_0 - 2\varepsilon} \Big[f_i(\Lambda_k) \frac{\partial u_{(k)j}}{\partial \xi} - \frac{\partial f_i(\Lambda_k)}{\partial \xi} u_{(k)j} - 2 f_i(\Lambda_k) \frac{\Lambda_k}{\eta - \xi} u_{(k)j} \Big]_{\ \eta = \xi_0 + \varepsilon} d\xi \Bigg). \tag{12}
$$

Известно [16], что если Λ_k — жорданова клетка, то функция от матрицы $I(\Lambda_k, u_{(k)j})$ может быть записана в виде

$$
I(\Lambda_k, u_{(k)j}) = \begin{pmatrix} I(\lambda_k, u_{(k)j}) & \frac{I'_{\lambda_k}(\lambda_k, u_{(k)j})}{1!} & \vdots & \frac{I^{(l_j-1)}_{\lambda_k}(\lambda_k, u_{(k)j})}{(l_j-1)!} \\ 0 & I(\lambda_k, u_{(k)j}) & \vdots & \frac{I^{(l_j-2)}_{\lambda_k}(\lambda_k, u_{(k)j})}{(l_j-2)!} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I(\lambda_k, u_{(k)j}) \end{pmatrix}. \tag{13}
$$

Подставляя (13) в (11), после некоторых преобразований получаем

$$
\tilde{U}_{(k)}(\xi_0, \eta_0) = EI(\lambda, \tilde{U}_{(k)}) + \sum_{j=1}^{l_k - 1} \frac{H^j_{l_k}}{j!} I^{(j)}_{\lambda_k}(\lambda_k, \tilde{U}_{(k)}),
$$

где H_{l_k} — $l_k \times l_k$-матрица вида

$$
H_{l_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.
$$

Подстановкой в тождество (12) собственного значения λ_k матрицы W_1 Римана—Адамара задачи Коши—Гурса с существенным использованием свойств этой матрицы и применением соответствующих краевых условий (8), (9) предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ получим

$$
I(\lambda_k, \tilde{U}_{(k)}) = 2^{2\lambda_k - 1} K_1(\lambda_k) \int_0^{\xi} \nu(t) \big[(\eta - t)(t - \xi) \big]^{-\lambda_k} dt +
$$
$$
+ K_1(\lambda_k) \xi^{-\lambda_k} \int_0^{\xi} \Big(\psi'(t) + \frac{\lambda_k}{t} \psi(t) \Big) \Big(\frac{t^2}{\eta - t} \Big)^{\lambda_k} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \lambda_k, \lambda_k \\ 2\lambda_k \end{matrix} ; \frac{t(\eta - \xi)}{\xi(\eta - t)} \right) dt +
$$
$$
+ (\eta - \xi)^{-\lambda_k} \int_{\xi}^{\eta} \Big(\psi'(t) + \frac{\lambda_k}{t} \psi(t) \Big) t^{\lambda_k} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \lambda_k, 1 - \lambda_k \\ 2\lambda_k \end{matrix} ; \frac{\xi(\eta - t)}{t(\eta - \xi)} \right) dt.
$$

Для задачи Дарбу функция $I(\lambda_k, \tilde{U}_{(k)})$ будет иметь вид

$$I(\lambda_k, \tilde{U}_{(k)}) = 2(1-2\lambda_k)K_2(\lambda_k)(\eta-\xi)^{1-2\lambda}\int_0^{\xi}\tau(t)\big[(\eta-t)(\xi-t)\big]^{\lambda_k-1}dt+$$
$$+K_2(\lambda_k)\frac{(\eta-\xi)^{1-2\lambda_k}}{\xi^{1-\lambda_k}}\int_0^{\xi}\Big(\psi'(t)+\frac{\lambda_k}{t}\psi(t)\Big)\times$$
$$\times\frac{t}{(\eta-t)^{1-\lambda_k}}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1-\lambda_k, 1-\lambda_k\\ 2-2\lambda_k\end{matrix};\frac{t(\eta-\xi)}{\xi(\eta-t)}\right)dt+$$
$$+(\eta-\xi)^{-\lambda_k}\int_{\xi}^{\eta}\Big(\psi'(t)+\frac{\lambda_k}{t}\psi(t)\Big)t^{\lambda_k}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\lambda_k, 1-\lambda_k\\ 2\lambda_k\end{matrix};\frac{\xi(\eta-t)}{t(\eta-\xi)}\right)dt,$$

где

$$K_1(\lambda_k)=\frac{\Gamma(1-2\lambda_k)}{\Gamma(1-\lambda_k)\Gamma(1-\lambda_k)},\quad K_2(\lambda_k)=\frac{\Gamma(2\lambda_k)}{\Gamma(\lambda_k)\Gamma(\lambda_k)}.$$

Решение задачи Коши—Гурса и Дарбу уравнения (5) можно записать в виде прямой суммы [17] решений вспомогательных систем (7):

$$\tilde{U}(\xi,\eta)=\oplus\sum_{k=1}^{r}\tilde{U}_{(k)}(\xi,\eta).$$

Выполняя в полученных выражениях замену (6), получим решения исходных задач. Полученный результат согласуется с результатами А. А. Андреева [7] для системы двух уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что полученные решения удовлетворяют уравнению и начальным данным. Из самого способа получения решений и их вида следует единственность решения поставленных задач. Таким образом, справедлива

Теорема. *Если $\tau(x)\in C^3\,[0;1]$ и $\nu(x)\in C^2(0;1)$, то полученные решения есть классические решения задач Коши—Гурса и Дарбу для уравнения (1) и они корректны по Адамару.*

ORCID
Александр Анатольевич Андреев: http://orcid.org/0000-0002-6611-6685
Екатерина Алексеевна Максимова: http://orcid.org/0000-0002-8839-9620

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хайруллин Р. С. *Задача Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу*. Казань: Казанский университет, 2014. 275 с.
2. Андреев А. А. Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа / *Дифференциальные уравнения*: сб. науч. тр. пед. ин-тов РСФСР. Т. 16. Рязань: Рязан. гос. пед. ин-т, 1980. С. 9–14.
3. Андреев А. А. О методе Римана для одной системы уравнений гиперболического типа с кратными характеристиками / *Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1981. С. 13–16.
4. Elianu I. P. Recherches sur les systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du type de Laplace // *Studii şi cercetări matematice, Academia Republicii Populate Române, Institutul de Matematica*, 1953. vol. 4, no. 1–2. pp. 155–196.
5. Riemann B. Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite // *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, 1860. vol. 8. pp. 43–65, https://eudml.org/doc/135717 (дата обращения: 08.08.2015).

6. Gellerstedt S. *Sur un problème aux limites pour une équation linèaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte*. Uppsala: Almqvist och Wiksells, 1935. vii+92 pp.
7. Андреев А. А. Задачи Коши–Гурса и Дарбу для системы уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу / *Дифференциальные уравнения с частными производными*: Межвуз. сб. научн. тр.. Куйбышев: Куйбышев. гос. пед. ин-т, 1983. С. 53–57.
8. Спицин В.Л. О методе Римана–Адамара для одной системы гиперболического типа второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1999. №7. doi: 10.14498/vsgtu205.
9. Андреев А. А., Максимова Е. А. Решение задачи Коши для одной системы гиперболического типа с сингулярными характеристиками / *Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием* (15–17 сентября 2011 г.). Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2011. С. 11–17.
10. Максимова Е. А. О задаче Коши для n-мерной системы уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу на плоскости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №1(26). С. 21–30. doi: 10.14498/vsgtu1050.
11. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. М.: Наука, 1988. 549 с.
12. Тыртышников Е. Е. *Матричный анализ и линейная алгебра*. М.: Физматлит, 2007. 476 с.
13. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables* / A Wiley-Interscience Publication. Selected Government Publications / eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1984. xiv+1046 pp.
14. *Higher transcendental functions*. vol. I / Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology / ed. A. Erdélyi. Malabar, Florida: Robert E. Krieger Publishing Company, 1981. xxvi+302 pp.
15. Бицадзе А.В. *Уравнения смешанного типа*. М.: Наука, 1959. 164 с.
16. Lancaster P., Tismenetsky M. *The theory of matrices* / Computer Science and Applied Mathematics. Orlando: Academic Press (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers), 1985. xv+570 pp.
17. Marcus M., Minc H. *A survey of matrix theory and matrix inequalities*. Boston: Allyn and Bacon, Inc, 1964. xvi+180 pp.

Поступила в редакцию 17/III/2015;
в окончательном варианте — 18/VI/2015;
принята в печать — 08/VIII/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 603–612

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1424

MSC: 35L52

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR MATRIX EULER–POISSON–DARBOUX EQUATION WITH DATA ON A CHARACTERISTIC

A. A. Andreev, E. A. Maksimova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

We consider the system of n partial differential equations in matrix notation (the system of Euler–Poisson–Darboux equations). For the system we formulate the Cauchy–Goursat and Darboux problems for the case when the eigenvalues of the coefficient matrix lie in $(0; 1/2)$. The coefficient matrix is reduced to the Jordan form, which allows to separate the system to the r independent systems, one for each Jordan cell. The coefficient matrix in the obtained systems has the only one eigenvalue in the considered interval. For a system of equations having the only coefficient matrix in form of Jordan cell, which is the diagonal or triangular matrix, we can construct the solution using the properties of matrix functions. We form the Riemann–Hadamard matrices for each of r systems using the Riemann matrix for the considered system, constructed before. That allow to find out the solutions of the Cauchy–Goursat and Darboux problems for each system of matrix partial differential equations. The solutions of the original problems are represented in form of the direct sum of the solutions of systems for Jordan cells. The correctness theorem for the obtained solutions is formulated.

Keywords: Riemann method, Cauchy–Goursat problem, Darboux problem, partial differential equations, system of Euler–Poisson–Darboux equations.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1424

ORCID
Aleksander A. Andreev: http://orcid.org/0000-0002-6611-6685
Ekaterina A. Maksimova: http://orcid.org/0000-0002-8839-9620

REFERENCES

1. Khairullin R. S. *Zadacha Koshi dlia uravneniia Eilera–Puassona–Darbu* [The Cauchy problem for the Euler–Poisson–Darboux equation]. Kazan, Kazan Univ., 2014, 275 pp. (In Russian)

Please cite this article in press as:
Andreev A. A., Maksimova E. A. Boundary value problems for matrix Euler–Poisson–Darboux equation with data on a characteristic, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 603–612. doi: 10.14498/vsgtu1424. (In Russian)

Authors Details:
Aleksander A. Andreev (Cand. Phys. & Math. Sci.; andre01071948@yandex.ru; Corresponding Author), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.
Ekaterina A. Maksimova (ekamaks@bk.ru), Assistant, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.

2. Andreev A. A. On a class of systems of differential equations of hyperbolic type, *Differentsial'nye uravneniia* [Partial differential equations], vol. 16. Ryazan, Ryazan. Gos. Ped. Inst., 1980, pp. 9–14 (In Russian).
3. Andreev A. A. On the Riemann method for one system hyperbolic equations with multiple characteristics, *Correct Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics*. Novosibirsk, IM SOAN SSSR, 1981, pp. 13–16 (In Russian).
4. Elianu I. P. Recherches sur les systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du type de Laplace, *Studii şi cercetări matematice, Academia Republicii Populate Române, Institutul de Matematica*, 1953, vol. 4, no. 1–2, pp. 155–196.
5. Riemann B. Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, 1860, vol. 8, pp. 43–65, Retrieved from https://eudml.org/doc/135717 (August 08, 2015).
6. Gellerstedt S. *Sur un problème aux limites pour une équation linèaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte*. Uppsala, Almqvist och Wiksells, 1935, vii+92 pp.
7. Andreev A. A. The Cauchy-Goursat and Darboux problems for a system of Euler–Poisson–Darboux equations, *Differentsial'nye uravneniia s chastnymi proizvodnymi* [Partial differential equations]. Kuybyshev, Kuybyshev. Gos. Ped. Inst., 1983, pp. 53–57 (In Russian).
8. Spitsyn V. L. About a Hadamard-Riemann method for the one system of second-order hyperbolic type, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 1999, no. 7, pp. 19–26 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu205.
9. Andreev A. A., Maksimova E. A. The solution of the Cauchy problem for a system of hyperbolic type with singular characteristics, *Proceedings of the Eighth All-Russian Scientific Conference with international participation* (15–17 September 2011). Part 3, Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara, Samara State Technical Univ., 2011, pp. 11–17 (In Russian).
10. Maksimova E. A. On Cauchy Problem for system of n Euler–Poisson–Darboux equations in the plane, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2012, no. 1(26), pp. 21–30 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1050.
11. Gantmakher F. R. *Teoriia matrits* [Theory of matrices]. Moscow, Nauka, 1988, 549 pp. (In Russian)
12. Tyrtyshnikov E. E. *Matrichnyi analiz i lineinaia algebra* [Matrix analysis and linear algebra]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 476 pp. (In Russian)
13. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, A Wiley-Interscience Publication. Selected Government Publications, eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun. New York, John Wiley & Sons, Inc, 1984, xiv+1046 pp.
14. *Higher transcendental functions*, vol. I, Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology, ed. A. Erdélyi. Malabar, Florida, Robert E. Krieger Publishing Company, 1981, xxvi+302 pp.
15. Bitsadze A. V. *Equations of the mixed type*. Oxford, London, New York, Paris, Pergamon Press, 1964, xiii+160 pp.
16. Lancaster P., Tismenetsky M. *The theory of matrices*, Computer Science and Applied Mathematics. Orlando, Academic Press (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers), 1985, xv+570 pp.
17. Marcus M., Minc H. *A survey of matrix theory and matrix inequalities*. Boston, Allyn and Bacon, Inc, 1964, xvi+180 pp.

Received 17/III/2015;
received in revised form 18/VI/2015;
accepted 08/VIII/2015.