



# Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.958:[531–142.6+536]

## МОДЕЛЬ ИЗИНГА С ДАЛЬНИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ\*

А. А. Бирюков, Я. В. Дегтярева

Самарский государственный университет,  
Россия, 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

### Аннотация

Методом Монте–Карло исследуется фазовый переход в двумерной и трехмерной моделях Изинга с дальним взаимодействием спинов. Область взаимодействия каждого спина с окружающими его спинами характеризуется радиусом  $R$ . На основе численного моделирования показано, что температура фазового перехода  $T_c$  зависит от радиуса  $R$  области взаимодействия между спинами. Построена аналитическая функция  $T_c(R)$ , аппроксимирующая данную зависимость.

**Ключевые слова:** модель Изинга, фазовый переход, критическая температура, метод Монте–Карло, параллельные вычисления.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1376>

**Введение.** Изучение фазовых переходов вещества является актуальной проблемой физики. Существенный интерес представляют фазовые переходы между парамагнитным и ферромагнитным состояниями в магнетиках, при которых скачкообразно меняется намагниченность системы. Переход системы из одной фазы в другую зависит как от внешних условий — изменения температуры, величины внешнего магнитного поля, — так и от ее внутренней структуры — характера взаимодействия между спинами атомов, наличия дефектов, примесей и т. д. Первой моделью, описывающей фазовые переходы в магнетиках, была модель Изинга, предложенная в 1924 году [2]. На первом этапе исследований рассматривались одномерные и двумерные решетки

© 2015 Самарский государственный технический университет.

### Образец для цитирования

Бирюков А. А., Дегтярева Я. В. Модель Изинга с дальним взаимодействием // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 3. С. 415–424. doi: [10.14498/vsgtu1376](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1376).

### Сведения об авторах

*Александр Александрович Бирюков* (к.ф.-м.н., проф.; [biryukov@samsu.ru](mailto:biryukov@samsu.ru); автор, ведущий переписку), зав. кафедрой, каф. общей и теоретической физики.

*Яна Владимировна Дегтярева* ([degt-yana@yandex.ru](mailto:degt-yana@yandex.ru)), аспирант, каф. общей и теоретической физики.

\*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного авторами на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

с взаимодействием ближайших спинов без учета внешнего поля. Пренебрежение действием более дальних спинов и наличием дефектов позволило исследовать критическое поведение модели Изинга аналитическими методами [2–5]. Однако попытки описать аналитически трехмерную модель, а также двумерные модели во внешнем поле и со сложными законами взаимодействия между магнитными моментами, оказались безуспешны. С развитием методов компьютерного моделирования появилась возможность исследовать модели практически любой сложности и при различных внешних условиях [6–9].

При исследовании систем с дальним взаимодействием спинов взаимодействия между спинами, находящимися за пределами ближайших соседей, можно ввести различными способами. Величины взаимодействия между спинами обычно рассматриваются убывающими по степенному закону ( $J \propto r^{-d-\sigma}$ ). В работах [10–12] для двумерных решеток Изинга были найдены значения критического индекса  $\eta$  для различных показателей взаимодействия  $\sigma$  методом Монте—Карло и проведено сравнение с его значениями, предсказанными ренорм-групповым анализом.

В [13] рассмотрены способы введения обменных взаимодействий в различных конфигурациях двумерных решеток между вторыми ближайшими спинами: ферромагнитные и антиферромагнитные связи. Отмечается, что добавление дальних взаимодействий увеличивает температуру фазового перехода между состоянием спинового стекла и неупорядоченной магнитной фазой. В [14, 15] были изучены фазовые диаграммы модели Изинга с взаимодействием первых и вторых ближайших соседей на простой кубической решетке и предложена функциональная форма для свободной энергии. На основе результатов, полученных численными методами, были построены диаграммы равновесия между парамагнитным и ферромагнитным состояниями.

В работе рассматриваются модели Изинга с дальними взаимодействиями, то есть каждый спин взаимодействует со вторыми, третьими и т. д. ближайшими соседями. Предполагается, что величина взаимодействия между спинами убывает с расстоянием по степенному закону. В предложенных моделях Изинга вводится параметр  $R$ , определяющий радиус области взаимодействия любого спина со своими соседями. Методом Монте—Карло определяются температуры фазовых переходов  $T_c$  ферромагнитной модели Изинга и их зависимость от радиуса  $R$ .

**1. Модель Изинга с дальним взаимодействием.** Рассмотрим двумерную модель Изинга с дальним взаимодействием спинов. Спины расположены в узлах плоской двумерной решетки, состоящей из квадратных клеток. Для описания положения спинов введем прямоугольную систему координат, оси которой направлены вдоль сторон решетки. Будем полагать расстояние между ближайшими спинами вдоль стороны решетки равным единице, так что положение спинов определяется двумя целыми числами  $(i, j)$ , принимающими значения 1, 2, 3, ... . Гамильтониан каждого спина  $S_{ij}$  с координатами  $(i, j)$  определяется выражением

$$H(S_{ij}) = \sum_{lm} \frac{J_0}{r_{lm}^3} S_{ij} S_{lm},$$

где  $r_{lm} = \sqrt{(i-l)^2 + (j-m)^2}$  — расстояние между спинами  $S_{ij}$  и  $S_{lm}$ ,  $J_0$  —

константа взаимодействия между спинами,  $S_{ij} = \pm 1$  для всех  $i, j$ . Индексы  $l, m$  выбираются таким образом, что выполняется соотношение

$$r_{lm} \leq R,$$

где  $R = 1, 2, 3, \dots$ . Случай, когда  $R = 1$ , соответствует модели Изинга с взаимодействием только между ближайшими спинами (классическая модель Изинга), при выборе  $R = 2, 3, \dots$  каждый спин взаимодействует со спинами дальнего расположения внутри круга радиуса  $R$ .

Трехмерная модель Изинга описывается простой кубической решеткой, в узлах которой расположены спины. Длина ребра каждого кубика равна единице, поэтому положение каждого спина  $S_{ijk}$  определяется координатами  $(i, j, k)$ , где  $i, j, k = 1, 2, 3, \dots$ . Гамильтониан спина  $S_{ijk}$  представляется в виде

$$H(S_{ijk}) = \sum_{lmn} \frac{J_0}{r_{lmn}^4} S_{ijk} S_{lmn},$$

где  $r_{lmn} = \sqrt{(i-l)^2 + (j-m)^2 + (k-n)^2}$  — расстояние между спинами  $S_{ijk}$  и  $S_{lmn}$ ,  $J_0$  — константа взаимодействия между спинами,  $S_{ijk} = \pm 1$  для всех  $i, j, k$  суммирование осуществляется по всем спинам, находящимся в области, ограниченной сферой с радиусом  $R$ , т. е.  $r_{lmn} \leq R$ , причем, как и в двумерной модели,  $R = 1$  для случая, когда имеется взаимодействие только с ближайшими спинами, и  $R \geq 2$ , когда имеется взаимодействие со спинами дальнего расположения.

Среднее значение магнитного момента, приходящегося на один спин, для двумерной решетки определяется по формуле

$$\langle M \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N S_{ij} Z^{-1} \exp\left(-\frac{1}{T} H(S_{ij})\right), \quad (1)$$

где

$$Z = \exp\left(-\frac{1}{T} H(+1)\right) + \exp\left(-\frac{1}{T} H(-1)\right). \quad (2)$$

Аналогично, для трехмерной решетки имеем

$$\langle M \rangle = \frac{1}{N^3} \sum_{i,j,k=1}^N S_{ijk} Z^{-1} \exp\left(-\frac{1}{T} H(S_{ijk})\right), \quad (3)$$

где  $Z$  — нормировочная константа, определяемая формулой (2),  $T$  — температура, измеряемая в единицах  $k$  ( $k$  — постоянная Больцмана),  $N$  — линейный размер решетки.

**2. Исследование модели численными методами.** Вычисление  $\langle M \rangle$  и его зависимости от температуры  $T$  в рамках предложенных моделей аналитическими методами в соответствии с формулами (1)–(3) представляет значительные трудности. Для решения данной задачи предлагается использовать метод численного моделирования Монте—Карло. Методы компьютерного исследования моделей Изинга со сложными типами взаимодействия между спинами позволяют решить поставленную задачу, однако их точность ограничена

размерами системы. При использовании метода Монте—Карло важно провести расчеты таким образом, чтобы погрешность метода была минимальной. Этого можно достичь увеличением размеров решетки, а также увеличением числа статистических испытаний. Однако в таком случае метод становится ресурсоемким, поскольку время счета экспоненциально возрастает с увеличением числа узлов. Поэтому при исследовании использовался модифицированный алгоритм с применением техники параллельных вычислений. Решетка разбивалась на подобласти, и каждая подобласть обрабатывалась отдельным процессором. В основе такого подхода лежит свойство аддитивности суммы скалярных величин.

Графики зависимости среднего магнитного момента  $\langle M(T) \rangle$  от температуры  $T$  для различных радиусов взаимодействия  $R$  представлены на рис. 1. Из графиков видно, что критическая температура (кривая намагниченности испытывает скачок при температуре фазового перехода  $T_c$ ) возрастает с увеличением радиуса области взаимодействия. Увеличение критической температуры можно объяснить увеличением количества взаимодействующих магнитных моментов. Из анализа графиков следует, что при увеличении  $R$  температура фазового перехода достигает максимального значения и далее остается постоянной. Заметим, что точность определения температуры фазового перехода по графикам на рис. 1 невысока. На точность определения критической температуры существенно влияют эффекты конечных размеров системы [17, 18].

Для более точного определения температуры фазового перехода нами использовался метод кумулянтов четвертого порядка, предложенный К. Биндером и оказавшийся весьма эффективным [19–21]. Его суть заключается в построении температурных зависимостей кумулянтов  $U_N(T)$  четвертого порядка

$$U_N(T) = 1 - \frac{\langle M^4(T) \rangle}{3 \langle M^2(T) \rangle^2}$$

для различных линейных размеров решетки  $N$  и нахождения  $T_c$  из общей точки пересечения кривых этих зависимостей.

В ходе исследования были рассчитаны температуры  $T_c$  двумерных и трехмерных решеток Изинга с периодическими граничными условиями с областями дальних взаимодействий спинов, характеризуемых радиусами  $R$  с размерами: 1, 2, ..., 10. Двумерные решетки брались с размерами  $500 \times 500$  и  $300 \times 300$  спинов, трехмерные —  $300 \times 300 \times 300$ ,  $200 \times 200 \times 200$  спинов. Таким образом, были получены значения  $T_c$ , представленные на рис. 2 маркерами.

На основе анализа результатов можно построить функцию  $T_c(R)$ , которая отражает зависимость между  $T_c$  и  $R$ :

$$T_c(R) = A \exp\left(-\frac{\alpha}{R^2} - \frac{\beta}{R} - C\right), \quad (4)$$

где  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $C$  — константы, зависящие от размерности системы и от величин, характеризующих взаимодействие между спинами.

Для предложенных моделей эмпирическим путем были найдены следующие значения параметров:

$A = 7.32$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1.5$ ,  $C = (1/5)\theta(R - 2)$  для двумерной модели Изинга; здесь  $\theta(x)$  — функция Хевисайда;

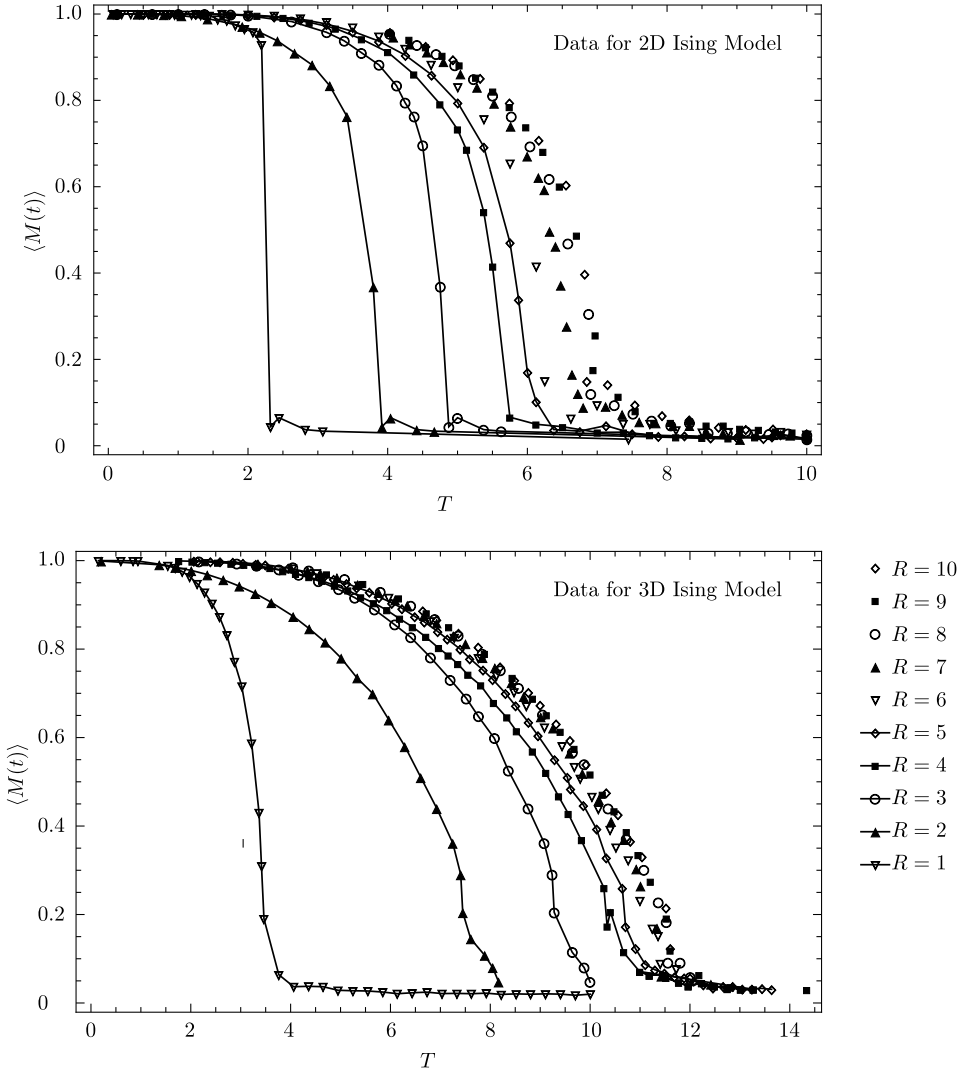


Рис. 1. Зависимость среднего магнитного момента  $\langle M(T) \rangle$  от температуры  $T$  для различных радиусов взаимодействия  $R$  для двумерной (сверху) и трехмерной (снизу) моделей Изинга

[Figure 1. The dependence of the average magnetic moment ( $\langle M(T) \rangle$ ) on the temperature  $T$  for different interaction radii ( $R$ ) for 2D (top) and 3D (bottom) Ising Models]

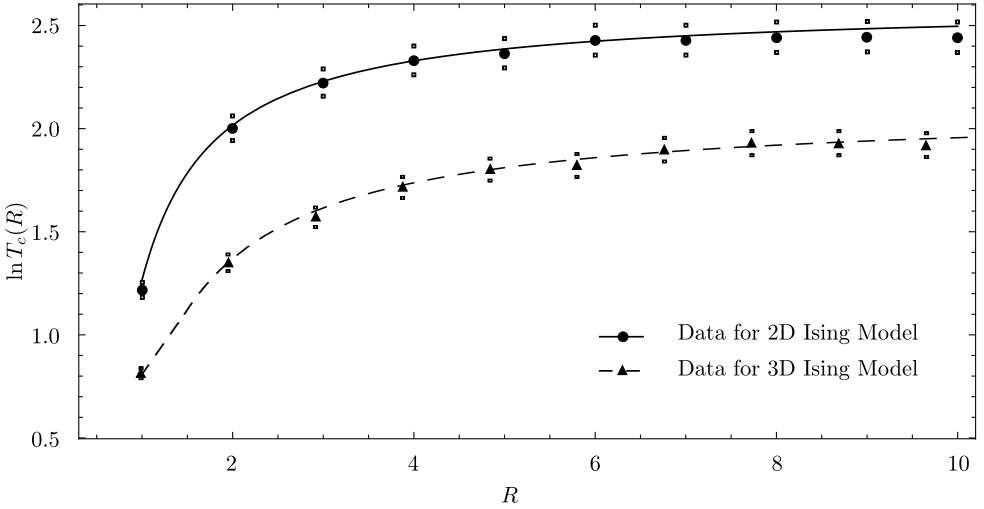


Рис. 2. Зависимость критической температуры (маркеры) от различных радиусов области взаимодействия и аппроксимация зависимости  $T_c(R)$  аналитической функцией (линии) для моделей Изинга с дальними взаимодействиями

[Figure 2. The dependence of the critical temperature (markers) on different radii of the interaction region and analytical approximation (lines) of  $T_c(R)$  depending for Ising Models with long-range interactions]

$A = 13.46$ ,  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = 1$ ,  $C = 0$  для трехмерной модели Изинга.

На рис. 2 показано соответствие между результатами численного эксперимента (маркеры) и аппроксимирующей функцией (линия). Сопоставление графиков функций  $T_c(R)$  и их численного значения с результатами численного моделирования показывает, что предложенные функции (4) адекватно отображают зависимость температуры фазового перехода от радиуса области взаимодействия спинов.

**Заключение.** Исследование модели Изинга с дальними взаимодействиями между спинами показало, что температура фазового перехода зависит от радиуса области, в которой имеется взаимодействие между спинами. На основе результатов численного моделирования был найден явный вид функции  $T_c(R)$ , отображающей эту зависимость. Феноменологические постоянные этой функции зависят от размерности решетки и величин, характеризующих взаимодействие между спинами. В работе рассматривалось взаимодействие с конкретными параметрами. Представляет интерес исследование зависимости  $T_c(R)$  в модели Изинга с дальними взаимодействиями от характеристик взаимодействия.

**Благодарности.** Компьютерное моделирование проводилось на суперкомпьютере «Сергей Королёв» на базе Самарского государственного аэрокосмического университета им. С. П. Королёва.

**ORCIDс**

Александр Александрович Бирюков: <http://orcid.org/0000-0003-3955-1726>

Яна Владимировна Дегтярева: <http://orcid.org/0000-0003-2820-7049>

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бирюков А. А., Дегтярева Я. В. Дальнее взаимодействие в модели Изинга / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 85–86.
2. Ising E. *Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus*: Dissertation, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Hamburgischen Universität Hamburg, 1924, [http://www.fh-augsburg.de/~harsch/germanica/Chronologie/20Jh/Ising/isi\\_intr.html](http://www.fh-augsburg.de/~harsch/germanica/Chronologie/20Jh/Ising/isi_intr.html).
3. Onsager L. Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition // *Phys. Rev.*, 1944. vol. 65, no. 3-4. pp. 117–149. doi: [10.1103/physrev.65.117](https://doi.org/10.1103/physrev.65.117).
4. Yang C. N. The Spontaneous Magnetization of a Two-Dimensional Ising Model // *Phys. Rev.*, 1952. vol. 85, no. 5. pp. 808–816. doi: [10.1103/physrev.85.808](https://doi.org/10.1103/physrev.85.808).
5. Зиновьев Ю. М. Спонтанная намагниченность в двумерной модели Изинга // *ТМФ*, 2003. Т. 136, №3. С. 444–462. doi: [10.4213/tmf236](https://doi.org/10.4213/tmf236).
6. Binder K., Heermann D. W. *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics* / Graduate Texts in Physics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010, xiv+200 pp. doi: [10.1007/978-3-642-03163-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-03163-2).
7. Муртазаев А. К., Камилев И. К., Бабаев А. Б. Критическое поведение трехмерной модели Изинга с замороженным беспорядком на кубической решетке // *ЖТЭФ*, 2004. №6. С. 1377–1383, <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/r/index/r/126/6/p1377?a=list>.
8. Прудников В. В., Прудников П. В., Вакилов А. Н., Криницын А. С. Компьютерное моделирование критического поведения трехмерной неупорядоченной модели Изинга // *ЖЭТФ*, 2007. №132. С. 417–425, <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/r/index/r/132/2/p417?a=list>.
9. Бирюков А. А., Дегтярева Я. В., Шлеенков М. А. Компьютерное моделирование модели Изинга методом Монте-Карло во внешнем постоянном магнитном поле // *Вестник молодых ученых и специалистов СамГУ*, 2012. №1. С. 78–82.
10. Picco M. *Critical behavior of the Ising model with long range interactions*, 2012. 5 pp., arXiv: [1207.1018](https://arxiv.org/abs/1207.1018) [cond-mat.stat-mech]
11. Blanchard T., Picco M., Rajapour M. A. Influence of long-range interactions on the critical behavior of the Ising model // *EPL (Europhysics Letters)*, 2013. vol. 101, no. 5, 56003, arXiv: [1211.6758](https://arxiv.org/abs/1211.6758) [cond-mat.stat-mech]. doi: [10.1209/0295-5075/101/56003](https://doi.org/10.1209/0295-5075/101/56003).
12. Angelini M. C., Parisi G., Ricci-Tersenghi F. Relations between short-range and long-range Ising models // *Phys. Rev. E*, 2014. vol. 89, no. 6, 062120, arXiv: [1401.6805](https://arxiv.org/abs/1401.6805) [cond-mat.stat-mech]. doi: [10.1103/physreve.89.062120](https://doi.org/10.1103/physreve.89.062120).
13. Ramírez-Pastor A. J., Nieto F., Vogel E. E. Ising lattices with  $\pm J$  second-nearest-neighbor interactions // *Phys. Rev. B*, 1997. vol. 55, no. 21. pp. 14323–14329. doi: [10.1103/physrevb.55.14323](https://doi.org/10.1103/physrevb.55.14323).
14. dos Anjos R. A., Roberto Viana J., Ricardo de Sousa J., Plascak J. A. Three-dimensional Ising model with nearest- and next-nearest-neighbor interactions // *Phys. Rev. E*, 2007. vol. 76, no. 2, 022103. doi: [10.1103/physreve.76.022103](https://doi.org/10.1103/physreve.76.022103).
15. Cirillo E. N. M., Gonnella G., Pelizzola A. Critical behavior of the three-dimensional Ising model with nearest-neighbor, next-nearest-neighbor, and plaquette interactions // *Phys. Rev. E*, 1997. vol. 55, no. 1. pp. R17–R20. doi: [10.1103/physreve.55.r17](https://doi.org/10.1103/physreve.55.r17).
16. Соболев И. М. *Численные методы Монте-Карло*. М.: Наука, 1973. 313 с.
17. Ferdinand A. E., Fisher M. E. Bounded and Inhomogeneous Ising Models. I. Specific-Heat Anomaly of a Finite Lattice // *Phys. Rev.*, 1969. vol. 185, no. 2. pp. 832–846. doi: [10.1103/physrev.185.832](https://doi.org/10.1103/physrev.185.832).
18. Fisher M. E., Barber M. N. Scaling Theory for Finite-Size Effects in the Critical Region // *Phys. Rev. Lett.*, 1972. vol. 28, no. 23. pp. 1516–1519. doi: [10.1103/physrevlett.28.1516](https://doi.org/10.1103/physrevlett.28.1516).
19. Муртазаев А. К., Камилев И. К., Магомедов М. А. Кластерные алгоритмы метода Монте-Карло, конечно-размерный скейлинг и критические индексы сложных решеточных моделей // *ЖЭТФ*, 2001. Т. 120, №6. С. 1535–1543, <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/r/index/r/120/6/p1535?a=list>.

20. Loison D. Monte Carlo cluster algorithm for ferromagnetic Hamiltonians  $H=J\sum_{\langle ij \rangle}(S_i \cdot S_j)^3$  // *Phys. Lett. A*, 1999. vol. 257, no. 1–2. pp. 83–87. doi: [10.1016/s0375-9601\(99\)00278-9](https://doi.org/10.1016/s0375-9601(99)00278-9).
21. Камиллов И. К., Муртазаев А. К., Алиев Х. К. Исследование фазовых переходов и критических явлений методами Монте–Карло // *УФН*, 1999. Т. 169, № 7. С. 773–795. doi: [10.3367/UFNr.0169.199907d.0773](https://doi.org/10.3367/UFNr.0169.199907d.0773).

Поступила в редакцию 17/XII/2014;  
в окончательном варианте — 19/III/2015;  
принята в печать — 08/VIII/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki  
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 3, pp. 415–424

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1376>

MSC: 82B20; 65C05

## THE ISING MODEL WITH LONG-RANGE INTERACTIONS\*

*A. A. Biryukov, Ya. V. Degtyareva*

Samara State University,  
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russian Federation.

### Abstract

The phase transition in the two-dimensional and three-dimensional Ising models with long-range spin interactions are studied with the Monte–Carlo method. The interaction region between spins is characterized by the radius  $R$ . Results based on numerical simulations have shown the critical temperature  $T_c$  dependence from the spin interaction radius  $R$ . Analytical function  $T_c(R)$  approximating this dependence is designed.

**Keywords:** Ising model, phase transition, critical temperature, Monte–Carlo method, parallel calculations.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1376>

**Acknowledgments.** Computer simulation has been performed on the supercomputer “Sergey Korolyov” at Samara State Aerospace University.

### ORCIDs

Alexander A. Biryukov: <http://orcid.org/0000-0003-3955-1726>

Yana V. Degtyarova: <http://orcid.org/0000-0003-2820-7049>

© 2015 Samara State Technical University.

Please cite this article in press as:

Biryukov A. A., Degtyareva Ya. V. The Ising model with long-range interactions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 3, pp. 415–424. doi: [10.14498/vsgtu1376](https://doi.org/10.14498/vsgtu1376). (In Russian)

### Authors Details:

*Alexander A. Biryukov* (Cand. Phys. & Math. Sci.; [biryukov@samsu.ru](mailto:biryukov@samsu.ru); Corresponding Author), Head of Dept., Dept. of General & Theoretical Physics.

*Yana V. Degtyarova* ([degt-yana@yandex.ru](mailto:degt-yana@yandex.ru)), Postgraduate Student, Dept. of General & Theoretical Physics.

\*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.



## REFERENCES

1. Biryukov A. A., Degtyareva Ya. V. A Long-Range Interaction in the Ising model, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 85–86 (In Russian).
2. Ising E. *Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus*, Dissertation, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Hamburgischen Universität Hamburg, 1924, [http://www.fh-augsburg.de/~harsch/germanica/Chronologie/20Jh/Ising/isi\\_intr.html](http://www.fh-augsburg.de/~harsch/germanica/Chronologie/20Jh/Ising/isi_intr.html).
3. Onsager L. Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition, *Phys. Rev.*, 1944, vol. 65, no. 3-4, pp. 117–149. doi: [10.1103/physrev.65.117](https://doi.org/10.1103/physrev.65.117).
4. Yang C. N. The Spontaneous Magnetization of a Two-Dimensional Ising Model, *Phys. Rev.*, 1952, vol. 85, no. 5, pp. 808–816. doi: [10.1103/physrev.85.808](https://doi.org/10.1103/physrev.85.808).
5. Zinoviev Yu. M. Spontaneous Magnetization in the Two-Dimensional Ising Model, *Theoret. and Math. Phys.*, 2003, vol. 136, no. 3, pp. 1280–1296. doi: [10.1023/A:1025651332465](https://doi.org/10.1023/A:1025651332465).
6. Binder K., Heermann D. W. *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics*, Graduate Texts in Physics. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2010, xiv+200 pp. doi: [10.1007/978-3-642-03163-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-03163-2).
7. Murtazaev A. K., Kamilov I. K., Babaev A. B. Critical behavior of a cubic-lattice 3D Ising model for systems with quenched disorder, *J. Exp. Theor. Phys.*, 2004, vol. 99, no. 6, pp. 1201–1206. doi: [10.1134/1.1854807](https://doi.org/10.1134/1.1854807).
8. Prudnikov V. V., Prudnikov P. V., Vakilov A. N., Krinitsyn A. S. Computer simulation of the critical behavior of 3D disordered ising model, *J. Exp. Theor. Phys.*, 2007, vol. 105, no. 2, pp. 371–378. doi: [10.1134/S1063776107080092](https://doi.org/10.1134/S1063776107080092).
9. Biriukov A. A., Degtiareva Ya. V., Shleenkov M. A. Komp'uternoe modelirovanie modeli Izinga metodom Monte–Karlo vo vneshnem postoiannom magnitnom pole [Monte Carlo simulation of the Ising Model in a constant external magnetic field], *Vestnik molodykh uchenykh i spetsialistov SamGU*, 2012, no. 1, pp. 78–82 (In Russian).
10. Picco M. *Critical behavior of the Ising model with long range interactions*, 2012, 5 pp., arXiv: [1207.1018](https://arxiv.org/abs/1207.1018) [cond-mat.stat-mech]
11. Blanchard T., Picco M., Rajabpour M. A. Influence of long-range interactions on the critical behavior of the Ising model, *EPL (Europhysics Letters)*, 2013, vol. 101, no. 5, 56003, arXiv: [1211.6758](https://arxiv.org/abs/1211.6758) [cond-mat.stat-mech]. doi: [10.1209/0295-5075/101/56003](https://doi.org/10.1209/0295-5075/101/56003).
12. Angelini M. C., Parisi G., Ricci-Tersenghi F. Relations between short-range and long-range Ising models, *Phys. Rev. E*, 2014, vol. 89, no. 6, 062120, arXiv: [1401.6805](https://arxiv.org/abs/1401.6805) [cond-mat.stat-mech]. doi: [10.1103/physreve.89.062120](https://doi.org/10.1103/physreve.89.062120).
13. Ramírez-Pastor A. J., Nieto F., Vogel E. E. Ising lattices with  $\pm J$  second-nearest-neighbor interactions, *Phys. Rev. B*, 1997, vol. 55, no. 21, pp. 14323–14329. doi: [10.1103/physrevb.55.14323](https://doi.org/10.1103/physrevb.55.14323).
14. dos Anjos R. A., Roberto Viana J., Ricardo de Sousa J., Plascak J. A. Three-dimensional Ising model with nearest- and next-nearest-neighbor interactions, *Phys. Rev. E*, 2007, vol. 76, no. 2, 022103. doi: [10.1103/physreve.76.022103](https://doi.org/10.1103/physreve.76.022103).
15. Cirillo E. N. M., Gonnella G., Pelizzola A. Critical behavior of the three-dimensional Ising model with nearest-neighbor, next-nearest-neighbor, and plaquette interactions, *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 55, no. 1, pp. R17–R20. doi: [10.1103/physreve.55.r17](https://doi.org/10.1103/physreve.55.r17).
16. Sobol' I. M. *Chislennyye metody Monte–Karlo* [Numerical Monte-Carlo methods]. Moscow, Nauka, 1973, 313 pp. (In Russian)
17. Ferdinand A. E., Fisher M. E. Bounded and Inhomogeneous Ising Models. I. Specific-Heat Anomaly of a Finite Lattice, *Phys. Rev.*, 1969, vol. 185, no. 2, pp. 832–846. doi: [10.1103/physrev.185.832](https://doi.org/10.1103/physrev.185.832).
18. Fisher M. E., Barber M. N. Scaling Theory for Finite-Size Effects in the Critical Region, *Phys. Rev. Lett.*, 1972, vol. 28, no. 23, pp. 1516–1519. doi: [10.1103/physrevlett.28.1516](https://doi.org/10.1103/physrevlett.28.1516).
19. Murtazaev A. K., Kamilov I. K., Magomedov M. A. Cluster algorithms of the Monte Carlo method, finite-size scaling, and critical exponents of complex lattice models, *J. Exp. Theor. Phys.*, 2001, vol. 93, no. 6, pp. 1330–1336. doi: [10.1134/1.1435757](https://doi.org/10.1134/1.1435757).

20. Loison D. Monte Carlo cluster algorithm for ferromagnetic Hamiltonians  $H=J\sum_{\langle i,j \rangle}(S_i \cdot S_j)^3$ , *Phys. Lett. A*, 1999, vol. 257, no. 1–2, pp. 83–87. doi: [10.1016/s0375-9601\(99\)00278-9](https://doi.org/10.1016/s0375-9601(99)00278-9).
21. Kamilov I. K., Murtazaev A. K., Aliev. Kh. K. Monte Carlo studies of phase transitions and critical phenomena, *Phys. Usp.*, 1999, vol. 42, no. 7, pp. 689–709. doi: [10.1070/PU1999v042n07ABEH000498](https://doi.org/10.1070/PU1999v042n07ABEH000498).

Received 17/XII/2014;  
received in revised form 19/III/2015;  
accepted 08/VIII/2015.