

Дифференциальные уравнения и математическая физика



УДК 517.958:535.14

ПЕРЕПУТЫВАНИЕ ДВУХ КУБИТОВ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ОДНОМОДОВЫМ КВАНТОВЫМ ПОЛЕМ*

*Е. К. Башкиров, М. С. Мастюгин*Самарский государственный университет,
Россия, 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Аннотация

В настоящей работе исследована динамика системы двух двухуровневых естественных или искусственных атомов, один из которых находится в идеальном резонаторе и взаимодействует с модой одномодового теплового поля, а второй свободно перемещается вне резонатора. Для описания динамики системы нами найдены собственные значения и собственные функции гамильтониана модели. С их помощью получено точное выражение для матрицы плотности в случае чистого начального состояния атомов и теплового состояния поля. Найдена редуцированная атомная матрица плотности. Проведено транспонирование атомной матрицы плотности по переменным одного кубита. С ее помощью рассчитан параметр Переса—Хородецких. Проведено численное моделирование параметра атомного перепутывания для различных начальных чистых состояний атомов и среднего числа фотонов в тепловой моде. Найдено, что тепловое поле может индуцировать высокую степень перепутывания кубитов в рассматриваемой модели. При этом имеется возможность управления и контроля за степенью перепутывания за счет изменения интенсивности диполь-дипольного взаимодействия кубитов и температуры резонатора. Показано, что максимальная степень перепутывания кубитов достигается для состояния, в котором возбужден только один из атомов.

Ключевые слова: перепутывание, кубит, тепловой шум, диполь-дипольное взаимодействие, параметр Переса—Хородецких.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1377>

© 2015 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования

Башкиров Е. К., Мастюгин М. С. Перепутывание двух кубитов, взаимодействующих с одномодовым квантовым полем // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 2. С. 205–220. doi: [10.14498/vsgtu1377](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1377).

Сведения об авторах

Евгений Константинович Башкиров (д.ф.-м.н., проф.; bash@samsu.ru; автор, ведущий рецензент), профессор, каф. общей и теоретической физики.

Михаил Сергеевич Мастюгин (mastyugin.mikhail@mail.ru), аспирант, каф. общей и теоретической физики.

* Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного авторами на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

Квантовые перепутанные состояния являются основным ресурсом квантовой информатики [2, 3]. Для приложений в физике квантовых вычислений нужны максимально перепутанные чистые состояния с достаточно большим временем жизни. В настоящее время предложены и реализованы различные схемы генерации и использования долгоживущих перепутанных состояний для атомов и ионов в резонаторах и оптических и магнитных ловушках, сверхпроводящих джозефсоновских колец, примесных спинов в твердых телах и др. [4–8]. Однако в реальных условиях квантовые системы всегда взаимодействуют с окружением. Такое взаимодействие обычно приводит к декогеренции, так что исследуемая система эволюционирует в смешанное перепутанное состояние, которое оказывается непригодным для целей квантовых вычислений. Поэтому с практической точки зрения основная задача при получении и использовании атомных перепутанных состояний заключается в том, чтобы предотвратить, минимизировать или использовать влияние шума. Было высказано большое количество предложений по защите, минимизированию или использованию влияния окружения для создания и сохранения максимально перепутанных состояний, например стратегия кольцевого контроля, коррекция квантовых ошибок, использование избыточного кодирования и др. Однако указанные способы успешно решают проблему только при малой скорости генерации ошибок в исследуемой системе [7].

Недавно в целом ряде работ была высказана идея о том, что в некоторых случаях диссипация и шум могут, напротив, являться источником перепутывания. Впервые такая возможность была рассмотрена в работе [9]. В ней авторы показали, что за счет диссипации два атома (два кубита) в оптическом резонаторе могут перейти в максимально перепутанное состояние. Возможность генерации перепутанных состояний в системе двух и более атомов в резонаторе за счет различных механизмов диссипации рассматривалась позднее в большом количестве работ (см. ссылки в работах [10–13]).

В последнее время ряд работ был посвящен исследованию возможности генерации перепутывания в атомных системах в резонаторах, индуцированного тепловым шумом. Идея о возможности возникновения перепутывания при взаимодействии атомов в резонаторах с тепловым полем принадлежит Питеру Найту с соавторами [14]. В указанной работе впервые было показано, что перепутывание всегда возникает при взаимодействии произвольной системы с большим числом степеней свободы в смешанном состоянии и одиночного кубита в чистом состоянии, и общие результаты проиллюстрированы на примере модели Джейнса—Каммингса одиночного атома в чистом состоянии, взаимодействующего с модой теплового поля в идеальном резонаторе. В своей следующей работе Питер Найт с соавторами [15] показали, что одномодовый тепловой шум может также индуцировать атом-атомное перепутывание в системе двух идентичных двухуровневых атомов в идеальном резонаторе. Указанный эффект для неидентичных атомов с различными константами атом-полевого взаимодействия предсказан в [16], а с различными частотами атомных переходов — в [17]. Перепутывание в двухатомной системе с вырожденным двухфотонным взаимодействием, индуцированное одномодовым тепловым шумом, было рассмотрено в работе [18], а влияние двухмодового теплового шума на перепутывание двух двухуровневых атомов с невырожденными переходами и переходами рамановского типа — в работе [19]. При

этом было показано, что при двухфотонном взаимодействии степень перепутывания атомных состояний может значительно превосходить соответствующую величину для однофотонного взаимодействия. Возможность генерации перепутывания атомов, последовательно пролетающих резонатор с тепловым полем, показана в работах [20–22]).

Как хорошо известно, диполь-дипольное взаимодействие атомных систем является естественным механизмом возникновения атомного перепутывания. Наличие диполь-дипольного взаимодействия, в частности, может привести к значительному увеличению степени перепутывания двух естественных или искусственных атомов, взаимодействующих с модой теплового поля в идеальном резонаторе посредством как однофотонных переходов [23, 24], так и двухфотонных вырожденных [25] и невырожденных переходов [26]. Физически диполь-дипольное взаимодействие можно увеличить, уменьшая относительное расстояние между атомами в резонаторе. Преимущество такой схемы заключается в том, что относительное расстояние между атомами можно легко контролировать. Например, в современных магнитных ловушках Пауля охлажденные атомы могут быть заперты на расстояниях порядка длины волны излучения. В этом случае параметр диполь-дипольного взаимодействия становится сравнимым с константой диполь-фотонного взаимодействия. В результате такие экспериментальные установки могут быть использованы для генерации значительной степени перепутывания атомов даже при наличии шума.

В работах [15, 17–19, 23–25] рассматривались двухатомные модели, в которых оба естественных или искусственных атома одновременно заперты в оптической ловушке. В то же время для практических применений в квантовой информатике часто необходимо перемещать атомы без потери квантовых корреляций между ними. Для реализации перепутывания атомов в таких условиях предложено большое число различных схем [27–30]. В работе [31] предложена простая схема, в которой только один кубит заперт в ловушке, а другой может свободно перемещаться вне резонатора. Взаимодействие между атомами реализовано не за счёт взаимодействия с общим полем, а благодаря прямому диполь-дипольному взаимодействию. При этом авторы ограничились рассмотрением простейшего начального состояния системы, когда оба атома приготовлены в основном состоянии, а резонатор — в вакуумном состоянии. Представляет значительный интерес исследовать динамику перепутывания между кубитами в рамках модели, предложенной в [31], для теплового состояния поля в резонаторе. В настоящей работе нами исследована динамика перепутывания атомов, приготовленных в некогерентных начальных чистых состояниях, в то время как резонаторное поле находится в одномодовом тепловом состоянии. Заметим, что рассматриваемая в настоящей работе модель может быть также более просто реализована для системы двух сверхпроводящих джозефсоновских кубитов, один из которых взаимодействует со сверхпроводящим LC-контуром (SQIDom).

Рассмотрим модель, состоящую из двух идентичных двухуровневых естественных или искусственных двухуровневых атомов (ридберговских атомов, ионов или сверхпроводящих джозефсоновских контуров). При этом один атом заперт в идеальном резонаторе и взаимодействует с модой теплового квантового электромагнитного поля (колебаниями электронной плотности в сверх-

проводящем LC-контуре в случае джозефсоновских кубитов), а второй атом находится вне резонатора в свободном состоянии. Будем полагать, что расстояние между атомами сравнимо с длиной волны их излучения на рабочем переходе. В этом случае мы должны принять во внимание диполь-дипольное взаимодействие атомов. В результате в рассматриваемой модели взаимодействие между атомами осуществляется только посредством прямого диполь-дипольного взаимодействия. Будем полагать, что частота атомного перехода ω_0 двухуровневого атома, запертого в резонаторе, совпадает с частотой резонаторной моды ω . Гамильтониан такой модели в дипольном приближении и приближении вращающейся волны может быть записан как

$$H = (1/2)\hbar\omega(\sigma_1^z + \sigma_2^z) + \hbar\omega a^+ a + \hbar g(\sigma_1^+ a + a^+ \sigma_1^-) + \hbar J(\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+), \quad (1)$$

где $(1/2)\sigma_i^z$ — оператор инверсии для i -того двухуровневого атома ($i = 1, 2$); $\sigma_i^+ = |+\rangle_{ii}\langle -|$, $\sigma_i^- = |-\rangle_{ii}\langle +|$ — операторы переходов между возбуждённым $|+\rangle_i$ и основным $|-\rangle_i$ состояниями в i -том двухуровневом атоме; a^+ и a — операторы рождения и уничтожения фотонов резонаторной моды; g — эффективная константа атом-полевого взаимодействия; J — параметр прямого диполь-дипольного взаимодействия кубитов.

Будем полагать, что в начальный момент времени кубиты находятся в чистом состоянии, а поле — в тепловом состоянии. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением атом-атомных перепутанных состояний. Информация о перепутанности двух атомов содержится в редуцированной атомной матрице плотности $\rho_{\text{atom}}(t)$. А. Перес и Хородецкие доказали [32, 33], что необходимым и достаточным условием сепарабельности двух кубитов является то, что некая дополнительная матрица $\rho_{\text{atom}}^{T_1}$, полученная путём частичной перестановки индексов (транспонирование по переменным одного кубита) матрицы плотности $\rho_{\text{atom}}(t)$, имеет только неотрицательные собственные значения. Тогда для определения степени атом-атомного перепутывания можно воспользоваться параметром Переса—Хородецких, который определим как

$$\varepsilon = -2 \sum_i \mu_i^-, \quad (2)$$

где μ_i^- — отрицательные собственные значения транспонированной по переменным одного кубита атомной матрицы плотности $\rho_{\text{atom}}^{T_1}$. Отсутствие у частично транспонированной по переменным одного кубита атомной матрицы плотности (2) отрицательных собственных значений означает, как уже было сказано выше, что атомы в любой момент времени остаются неперепутанными, в этом случае полагают $\varepsilon = 0$. Для случая $\varepsilon > 0$ атомы находятся в перепутанном состоянии. Для максимально перепутанного состояния $\varepsilon = 1$.

Рассмотрим теперь динамику параметра перепутывания (2) для различных начальных чистых состояний атомной подсистемы и теплового состояния резонаторного поля

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|. \quad (3)$$

Здесь $|n\rangle$ — одномодовое фоковское состояние поля и вероятности p_n задаются

для теплового поля формулой

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n}^n + 1)^{n+1}},$$

где \bar{n} — среднее число фотонов в моде. Для этой цели предварительно найдем решения временного уравнения Шрёдингера для модели с гамильтонианом (1) в случае чистого фоковского состояния поля и различных начальных чистых состояний кубитов. Для начальной волновой функции полной системы $|\Psi(0)\rangle$ указанное решение можно представить в виде

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\Psi(0)\rangle = \sum_i C_i(0)e^{-iE_it/\hbar}|\Phi_i\rangle, \quad (4)$$

где $|\Psi(0)\rangle = \sum_i C_i(0)|\Phi_i\rangle$; $|\Phi_i\rangle$ и E_i — собственные функции и собственные значения гамильтониана (1) соответственно.

В двухатомном базисе $|-, -, n+2\rangle$, $|+, -, n+1\rangle$, $|-, +, n+1\rangle$, $|+, +, n\rangle$ собственные функции гамильтониана (1) есть

$$|\Phi_{in}\rangle = \xi_{in}(X_{i1n}|-, -, n+2\rangle + X_{i2n}|+, -, n+1\rangle + X_{i3n}|-, +, n+1\rangle + X_{i4n}|+, +, n\rangle) \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{in} &= 1/\sqrt{|X_{i1n}|^2 + |X_{i2n}|^2 + |X_{i3n}|^2 + |X_{i4n}|^2}, \\ X_{i1n} &= 1, \quad X_{i2n} = (-1)^{i+1} \frac{S_n}{\sqrt{n+2}}, \\ X_{i3n} &= \frac{S_n^2 - (n+2)}{(\sqrt{n+2})\alpha}, \quad X_{i4n} = (-1)^{i+1} \frac{S_n(S_n^2 - (n+2) - \alpha^2)}{(\sqrt{n+1}\sqrt{n+2})\alpha}. \end{aligned}$$

Здесь $S_n = A_n$ для нечетных i и $S_n = B_n$ для четных i . Соответствующие собственные значения имеют вид

$$\begin{aligned} E_{1n}/\hbar &= (n+1)\omega + A_n, & E_{2n}/\hbar &= (n+1)\omega - A_n, \\ E_{3n}/\hbar &= (n+1)\omega + B_n, & E_{4n}/\hbar &= (n+1)\omega - B_n, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{W_n + V_n}/2, & B_n &= \sqrt{W_n - V_n}/2, \\ W_n &= 4n + 6 + 2\alpha^2, & V_n &= 2\sqrt{4(n+1)\alpha^2 + (\alpha^2 + 1)}, \quad \alpha = \Gamma/g. \end{aligned}$$

В двухатомном базисе $|-, -, 1\rangle$, $|+, -, 0\rangle$, $|-, +, 0\rangle$ собственные функции и собственные значения гамильтониана (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} |\varphi_1\rangle &= (\alpha^2/\Omega)[|-, -, 1\rangle - (1/\alpha)|-, +, 0\rangle], & E_1 &= 0; \\ |\varphi_2\rangle &= (1/\sqrt{2})[(1/\Omega)|-, -, 1\rangle + |+, -, 0\rangle + (\alpha/\Omega)|-, +, 0\rangle], & E_2/\hbar &= \Omega; \\ |\varphi_3\rangle &= (1/\sqrt{2})[-(1/\Omega)|-, -, 1\rangle + |+, -, 0\rangle - (\alpha/\Omega)|-, +, 0\rangle], & E_2/\hbar &= -\Omega, \end{aligned}$$

где $\Omega = \sqrt{1 + \alpha^2}$.

Наконец, гамильтониан (1) имеет еще одну собственную функцию вида

$$\varphi_0 = |-, -, 0\rangle,$$

соответствующую энергии $E_0 = 0$.

Предположим, что рассматриваемая система приготовлена в начальный момент времени в чистом состоянии $|+, -, n + 1\rangle$. В этом случае с использованием соотношений (4)–(6) временную волновую функцию системы можно записать в виде

$$|\Psi(t)\rangle = Z_{1n}|-, -, n + 2\rangle + Z_{2n}|+, -, n + 1\rangle + Z_{3n}|-, +, n + 1\rangle + Z_{4n}|+, +, n\rangle, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{1,n} &= e^{-iE_{1n}t/\hbar} \xi_{1n} Y_{21n} X_{11n} + e^{-iE_{2n}t/\hbar} \xi_{2n} Y_{22n} X_{21n} + \\ &\quad + e^{-iE_{3n}t/\hbar} \xi_{3n} Y_{23n} X_{31n} + e^{-iE_{4n}t/\hbar} \xi_{4n} Y_{24n} X_{41n}, \\ Z_{2,n} &= e^{-iE_{1n}t/\hbar} \xi_{1n} Y_{21n} X_{12n} + e^{-iE_{2n}t/\hbar} \xi_{2n} Y_{22n} X_{22n} + \\ &\quad + e^{-iE_{3n}t/\hbar} \xi_{3n} Y_{23n} X_{32n} + e^{-iE_{4n}t/\hbar} \xi_{4n} Y_{24n} X_{42n}, \\ Z_{3,n} &= e^{-iE_{1n}t/\hbar} \xi_{1n} Y_{21n} X_{13n} + e^{-iE_{2n}t/\hbar} \xi_{2n} Y_{22n} X_{23n} + \\ &\quad + e^{-iE_{3n}t/\hbar} \xi_{3n} Y_{23n} X_{33n} + e^{-iE_{4n}t/\hbar} \xi_{4n} Y_{24n} X_{43n}, \\ Z_{4,n} &= e^{-iE_{1n}t/\hbar} \xi_{1n} Y_{21n} X_{14n} + e^{-iE_{2n}t/\hbar} \xi_{2n} Y_{22n} X_{24n} + \\ &\quad + e^{-iE_{3n}t/\hbar} \xi_{3n} Y_{23n} X_{34n} + e^{-iE_{4n}t/\hbar} \xi_{4n} Y_{24n} X_{44n}. \end{aligned}$$

Здесь $Y_{ijn} = \xi_{jn} X_{jin}^*$.

Если же начальное состояние полной системы выбрать в виде $|+, -, 0\rangle$, то временная функция примет вид

$$|\Psi(t)\rangle = Z_1|-, -, 1\rangle + Z_2|+, -, 0\rangle + Z_3|-, +, 0\rangle, \quad (8)$$

где

$$Z_1 = -\frac{i}{\Omega} \sin \Omega t, \quad Z_2 = \cos \Omega t, \quad Z_3 = -\frac{i\alpha}{\Omega} \sin \Omega t.$$

Теперь с использованием соотношений (7), (8) мы можем найти временную зависимость матрицы плотности полной системы для атомов, приготовленных в чистом состоянии $|+, -\rangle$, и поля, приготовленного в тепловом состоянии (3), т. е. для начальной матрицы плотности системы вида

$$\rho(0) = |+, -\rangle\langle +, -| \rho_F(0) = \sum_n p_n |+, -, n\rangle\langle +, -, n|. \quad (9)$$

После несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_{n=1} p_n \{ Z_{1,n-1} |-, -, n + 1\rangle + Z_{2,n-1} |+, -, n + 1\rangle + \\ &\quad + Z_{3,n-1} |-, +, n + 1\rangle + Z_{4,n-1} |+, +, n - 1\rangle \} \times \\ &\quad \times \{ Z_{1,n-1}^* \langle -, -, n + 1| + Z_{2,n-1}^* \langle +, -, n + 1| + Z_{3,n-1}^* \langle -, +, n + 1| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ Z_{4,n-1}^* \langle +, +, n-1 | \rangle + p_0 \{ Z_1 | -, -, 1 \rangle + Z_2 | +, -, 0 \rangle + Z_3 | -, +, 0 \rangle \} \times \\
 &\quad \times \{ Z_1^* \langle -, -, 1 | + Z_2^* \langle +, -, 0 | + Z_3^* \langle -, +, 0 | \rangle \}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Тогда соответствующую (10) редуцированную атомную матрицу плотности можно представить в виде

$$\rho_{\text{atom}}(t) = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & H & 0 \\ 0 & H^* & W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_{n=1} p_n |Z_{4,n-1}|^2, & V &= \sum_{n=1} p_n |Z_{2,n-1}|^2 + p_0 |Z_2|^2, \\
 W &= \sum_{n=1} p_n |Z_{3,n-1}|^2 + p_0 |Z_3|^2, & H &= \sum_{n=1} p_n Z_{2,n-1} Z_{3,n-1}^* + p_0 Z_2 Z_3^*, \\
 R &= \sum_{n=1} p_n |Z_{1,n-1}|^2.
 \end{aligned}$$

Частично транспонированная по переменным одного кубита атомная матрица плотности (11) имеет всего одно собственное значение, которое может быть отрицательным при условии $RU \geq |H|$. В этом случае параметр Переса–Хородецких можно записать как

$$\varepsilon = \sqrt{(R-U)^2 + 4|H|^2} - R - U. \quad (12)$$

В противном случае $\varepsilon = 0$.

Рассмотрим также динамику системы для других начальных чистых состояний систем. Выберем в начальный момент времени волновую функцию в виде $|-, +, n+1\rangle$, тогда ее временная эволюция будет описываться вектором состояния (7), если в этом выражении заменить величины Y_{2in} на Y_{3in} , где $i = 1, 2, 3, 4$. Для начального состояния $|-, +, 0\rangle$ временная функция имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle = Z'_1 |-, -, 1\rangle + Z'_2 |+, -, 0\rangle + Z'_3 |-, +, 0\rangle,$$

где

$$Z'_1 = \frac{\alpha}{\Omega^2} (\cos \Omega t - 1), \quad Z'_2 = -\frac{i\alpha}{\Omega} \sin \Omega t, \quad Z'_3 = \frac{1}{\Omega^2} + \frac{\alpha^2}{\Omega^2} \cos \Omega t.$$

Тогда для начального состояния

$$\rho(0) = |-, +\rangle \langle -, + | \rho_F(0) = \sum_n p_n |-, +, n\rangle \langle -, +, n| \quad (13)$$

мы можем использовать формулы (10)–(12) с учетом указанных выше замен.

Для начального состояния $|-, -, n+2\rangle$ формула (7) также остается справедливой при замене величин Y_{2in} на Y_{1in} , где $i = 1, 2, 3, 4$. Для начального

состояния $|-, -, 1\rangle$ временная функция также имеет вид (8) с коэффициентами

$$Z_1 = -\frac{1}{\Omega^2}(\alpha^2 + \cos \Omega t), \quad Z_2 = -\frac{i}{\Omega} \sin \Omega t, \quad Z_3 = -\frac{\alpha}{\Omega^2}(1 - \cos \Omega t).$$

Наконец, начальное состояние $|-, -, 0\rangle$ не эволюционирует с течением времени.

Тогда для начального состояния

$$\rho(0) = |-, -\rangle\langle -, -| \rho_F(0) = \sum_n p_n |-, -, n\rangle\langle -, -, n| \quad (14)$$

мы по-прежнему можем использовать формулу (10) с учетом замены величин Y_{2in} на Y_{1in} . Редуцированная атомная матрица плотности в рассматриваемом случае имеет также вид (11). Однако матричные элементы теперь следующие:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=2} p_n |Z_{4,n-2}|^2, & V &= \sum_{n=2} p_n |Z_{2,n-2}|^2 + p_1 |Z_2|^2, \\ W &= \sum_{n=2} p_n |Z_{3,n-2}|^2 + p_1 |Z_3|^2, & H &= \sum_{n=2} p_n Z_{2,n-2} Z_{3,n-2}^* + p_1 Z_2 Z_3^*, \\ R &= \sum_{n=2} p_n |Z_{1,n-2}|^2 + p_1 |Z_1|^2 + p_0. \end{aligned}$$

Для начального состояния

$$\rho(0) = |+, +\rangle\langle +, +| \rho_F(0) = \sum_n p_n |+, +, n\rangle\langle +, +, n|$$

формулы (7), (10) и (11) остаются справедливыми при замене Y_{2in} на Y_{4in} . При этом элементы редуцированной атомной матрицы плотности есть

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=0} p_n |Z_{4,n}|^2, & V &= \sum_{n=0} p_n |Z_{2,n}|^2, \\ W &= \sum_{n=0} p_n |Z_{3,n}|^2, & H &= \sum_{n=0} p_n Z_{2,n} Z_{3,n}^*, & R &= \sum_{n=0} p_n |Z_{1,n}|^2. \end{aligned}$$

Результаты численного моделирования параметра атом-атомного перепутывания (12) для начальных условий (9), (13) и (14) приведены на рис. 1, 2.

На рис. 1 представлена зависимость параметра перепутывания от интенсивности диполь-дипольного взаимодействия атомов для поля с $\bar{n} = 1$. Из рисунка видно, что для начальных состояний атомов $|+, -\rangle$ и $|-, +\rangle$ увеличение интенсивности диполь-дипольного взаимодействия приводит к увеличению степени перепутывания кубитов. Для состояния $|-, -\rangle$ указанная зависимость является немотонной. Для области значений интенсивности дипольного взаимодействия $J < 2g$ увеличение J ведет к росту максимальной степени перепутывания атомов, а для области значений интенсивности $J > 2g$ — к уменьшению перепутывания.

На рис. 2 показана временная зависимость параметра перепутывания для различных значений среднего числа тепловых фотонов в резонаторе. Из рисунка видно, что для слабых тепловых полей $\bar{n} < 3$ степень перепутывания

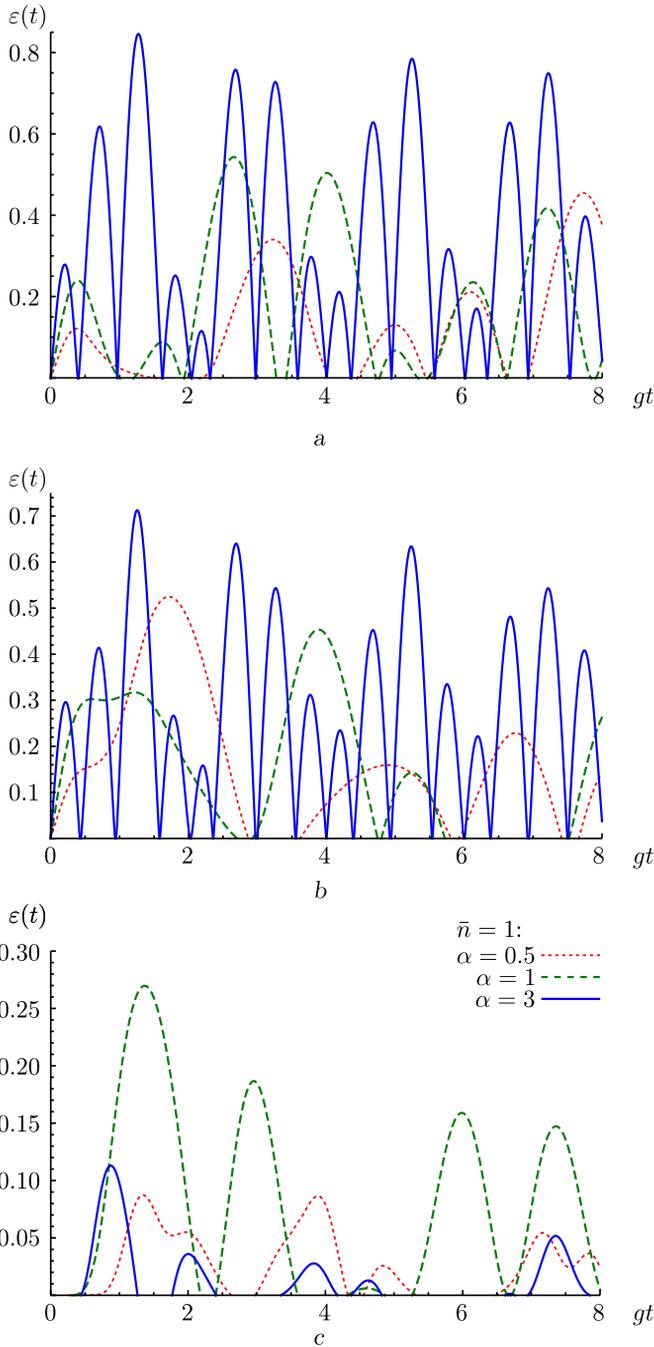


Рис. 1. (online в цвете) Временная зависимость параметра перепутывания $\varepsilon(t)$ от интенсивности диполь-дипольного взаимодействия для начальных состояний (9) (рис. a), (13) (рис. b) и (14) (рис. c). Среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 1$. Интенсивность диполь-дипольного взаимодействия α равна 0.5 (пунктирная линия), 1 (штриховая линия) и 3 (сплошная линия)

[Figure 1. (color online) The time dependence of the entanglement parameter $\varepsilon(t)$ on the dipole-dipole interaction strength for initial states: for Eqn. (9) see Fig. a, for Eqn. (13) see Fig. b, and for Eqn. (14) see Fig. c. The mean value of the thermal photons number $\bar{n} = 1$. The dipole-dipole interaction strength $\alpha = 0.5$ (dotted line), $\alpha = 1$ (dashed line), and $\alpha = 3$ (solid line)]

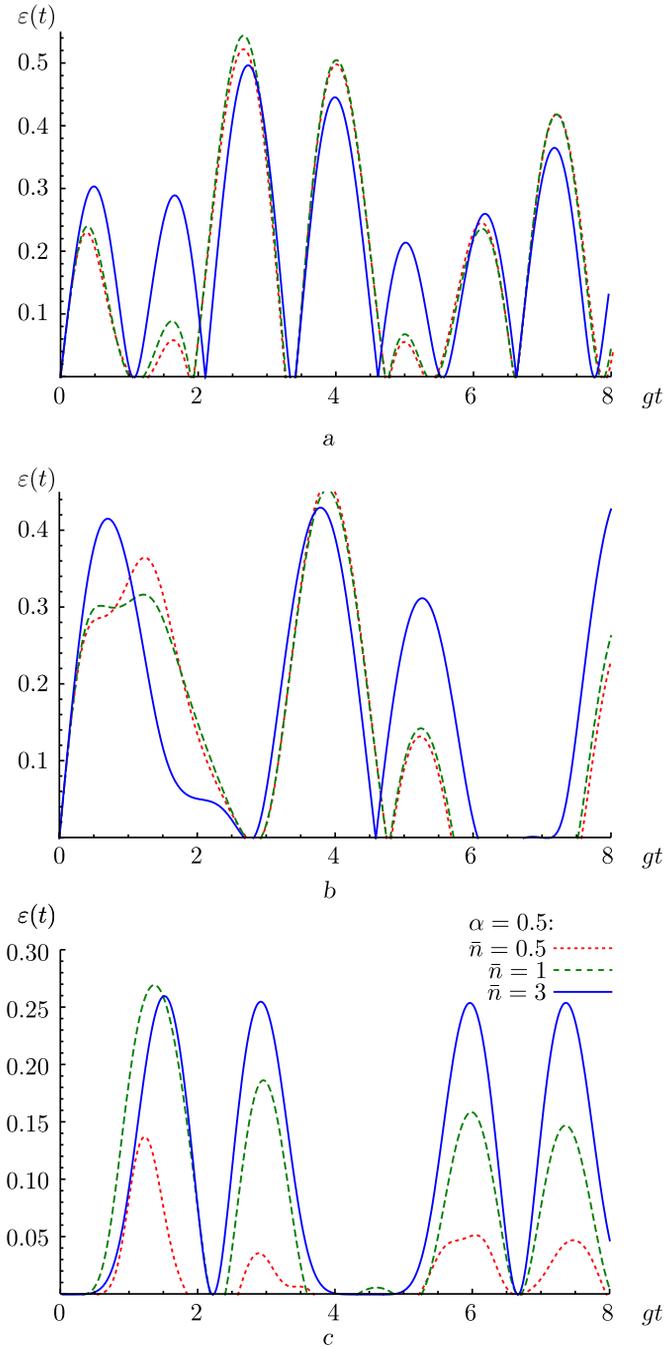


Рис. 2. (online в цвете) Временная зависимость параметра перепутывания $\varepsilon(t)$ от интенсивности теплового поля для начальных состояний (9) (рис. а), (13) (рис. b) и (14) (рис. с). Интенсивность дипольного взаимодействия $\alpha = 1$. Среднее число фотонов в тепловом поле \bar{n} равно 0.5 (пунктирная линия), 1 (штриховая линия) и 3 (сплошная линия)

[Figure 2. (color online) The time dependence of the entanglement parameter $\varepsilon(t)$ on the thermal field intensity for initial states: for Eqn. (9) see Fig. a, for Eqn. (13) see Fig. b, and for Eqn. (14) see Fig. c. The dipole-dipole interaction strength $\alpha = 0.5$. The mean value of the thermal photons number $\bar{n} = 0.5$ (dotted line), $\bar{n} = 1$ (dashed line), and $\bar{n} = 3$ (solid line)]

увеличивается с увеличением среднего числа фотонов в моде. Для интенсивных тепловых полей с ростом среднего числа фотонов в моде максимальное значение атомного перепутывания резко уменьшается.

Таким образом, в настоящей работе нами показано, что тепловое поле может индуцировать высокую степень перепутывания двух кубитов, один из которых заперт в резонаторе, а второй может перемещаться вне его. При этом имеется возможность управления и контроля за степенью перепутывания за счет изменения интенсивности диполь-дипольного взаимодействия кубитов (расстояния между ними) и температуры резонатора (среднего числа фотонов в резонаторе). Как показано в последнее время, степень атомного перепутывания кубитов существенно возрастает при наличии атомной когерентности в системе [34, 35]. При описании динамики перепутывания кубитов важен также учет диссипативных процессов, возникающих за счёт взаимодействия кубитов с окружением. Такие взаимодействия приводят к распаду квантовых корреляций между кубитами, или декогеренции. Учет влияния атомной когерентности и окружения на динамику перепутывания кубитов, оценка времени декогеренции и рассмотрение других механизмов контроля перепутывания в рамках рассмотренной в настоящей работе модели будет предметом нашей следующей работы.

ORCIDс

Евгений Константинович Башкиров: <http://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

Мастюгин Михаил Сергеевич: <http://orcid.org/0000-0002-8375-0821>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Башкиров Е. К., Мастюгин М. С. Перепутывание двух кубитов, взаимодействующих с одноименным квантованным полем / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 79–80.
2. Nielsen M. A., Chuang I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. xxxii+676 pp.. doi: [10.1017/cbo9780511976667](https://doi.org/10.1017/cbo9780511976667)
3. Schumacker D., Westmoreland M. D. *Quantum Processes, Systems, and Information*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. xii+469 pp.. doi: [10.1017/cbo9780511814006](https://doi.org/10.1017/cbo9780511814006).
4. Blatt R., Wineland D. Entangled states of trapped atomic ions // *Nature*, 2008. vol. 453, no. 7198. pp. 1008–1013. doi: [10.1038/nature07125](https://doi.org/10.1038/nature07125).
5. You J. Q., Nori F. Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits // *Nature*, 2011. vol. 474, no. 7353. pp. 589–597, arXiv: [1202.1923](https://arxiv.org/abs/1202.1923) [quant-ph]. doi: [10.1038/nature10122](https://doi.org/10.1038/nature10122).
6. Saffman M., Walker T. G., Mølmer K. Quantum information with Rydberg atoms // *Rev. Mod. Phys.*, 2010. vol. 82, no. 3. pp. 2313–2363, arXiv: [0909.4777](https://arxiv.org/abs/0909.4777) [quant-ph]. doi: [10.1103/revmodphys.82.2313](https://doi.org/10.1103/revmodphys.82.2313).
7. Buluta I., Ashhab F., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation // *Rep. Prog. Phys.*, 2011. vol. 74, no. 10, 104401, arXiv: [1002.1871](https://arxiv.org/abs/1002.1871) [quant-ph]. doi: [10.1088/0034-4885/74/10/104401](https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401).
8. Gühne O., Tóth G. Entanglement detection // *Physics Reports*, 2014. vol. 474, no. 1–6. pp. 1–75, arXiv: [0811.2803](https://arxiv.org/abs/0811.2803) [quant-ph]. doi: [10.1016/j.physrep.2009.02.004](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.02.004).
9. Plenio M. B., Huelda S. F., Beige A. , Knight P. L. Cavity-loss-induced generation of entangled atoms // *Phys. Rev. A*, 1999. vol. 59, no. 3. pp. 2468–2475. doi: [10.1103/physreva.59.2468](https://doi.org/10.1103/physreva.59.2468).
10. Башкиров Е. К., Ступацкая М. П. Перепутывание двух атомов, взаимодействующих с

- тепловым электромагнитным полем // *Компьютерная оптика*, 2011. Т. 35, № 2. С. 243–249.
11. Башкиров Е. К., Мастюгин М. С. Перепутывание двух сверхпроводящих кубитов, взаимодействующих с двухмодовым тепловым полем // *Компьютерная оптика*, 2013. Т. 37, № 3. С. 278–285.
 12. Башкиров Е. К., Мастюгин М. С. Влияние диполь-дипольного взаимодействия и атомной когерентности на перепутывание двух атомов с вырожденными двухфотонными переходами // *Оптика и спектроскопия*, 2014. Т. 116, № 4. С. 678–683. doi: [10.7868/S0030403414040060](https://doi.org/10.7868/S0030403414040060).
 13. Bashkirov E. K., Mastyugin M. S. The dynamics of entanglement in two-atom Tavis–Cummings model with non-degenerate two-photon transitions for four-qubits initial atom-field entangled states // *Optics Communications*, 2014. vol. 313. pp. 170–174. doi: [10.1016/j.optcom.2013.10.007](https://doi.org/10.1016/j.optcom.2013.10.007).
 14. Bose S., Fuentes-Guridi I., Knight P. L., Vedral V. Subsystem purity as an enforcer of entanglement // *Phys. Rev. Lett.*, 2001. vol. 87, no. 5, 050401. doi: [10.1103/physrevlett.87.050401](https://doi.org/10.1103/physrevlett.87.050401).
 15. Kim M. S., Lee J., Ahn D., Knight P. L. Entanglement induced by a single-mode heat environment // *Phys. Rev. A*, 2002. vol. 65, no. 4, 040101, arXiv: [quant-ph/0109052](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0109052). doi: [10.1103/physreva.65.040101](https://doi.org/10.1103/physreva.65.040101).
 16. Zhou L., Yi X. X., Song H.-S., Quo Y.-Q. Entanglement of two atoms through different couplings and thermal noise // *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2004. vol. 6, no. 9. pp. 378–382, arXiv: [quant-ph/0308086](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0308086). doi: [10.1088/1464-4266/6/9/003](https://doi.org/10.1088/1464-4266/6/9/003).
 17. Башкиров Е. К. Перепутанные состояния в системе двух неидентичных атомов, взаимодействующих с тепловым полем // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2006. № 3(43). С. 21–29.
 18. Zhou L., Song H.-S., Li C. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement // *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2002. vol. 4, no. 6. pp. 425–429. doi: [10.1088/1464-4266/4/6/310](https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310).
 19. Bashkirov E. K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise // *Laser Phys. Lett.*, 2006. vol. 3, no. 3. pp. 145–150. doi: [10.1002/lapl.200510081](https://doi.org/10.1002/lapl.200510081).
 20. Ghosh B., Majumdar A. S., Nayak N. Effects of cavity-field statistics on atomic entanglement in the Jaynes–Cummings model // *Int. J. Quantum Inform.*, 2007. vol. 05, no. 01n02. pp. 169–177, arXiv: [quant-ph/0603039](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0603039). doi: [10.1142/s0219749907002840](https://doi.org/10.1142/s0219749907002840).
 21. Yan X.-Q. Entanglement sudden death of two atoms successive passing a cavity // *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009. vol. 41, no. 4. pp. 1645–1650. doi: [10.1016/j.chaos.2008.07.007](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.07.007).
 22. Liao Q., Fang G., Ahmad M. A., Liu S. Sudden birth of entanglement between two atoms successively passing a thermal cavity // *Optics Communications*, 2011. vol. 284, no. 1. pp. 301–305. doi: [10.1016/j.optcom.2010.09.043](https://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.09.043).
 23. Aguiar L. S., Munhoa P. P., Vidiella-Barranco A., Roversi J. A. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms in a cavity interacting with a thermal field // *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2005. vol. 7, no. 12. pp. S769–S771. doi: [10.1088/1464-4266/7/12/049](https://doi.org/10.1088/1464-4266/7/12/049).
 24. Башкиров Е. К., Ступацкая М. П. Перепутывание двух дипольно связанных атомов // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*, 2009. Т. 12, № 2. С. 85–89.
 25. Liao Xiang-Ping, Fang Mao-Fa, Cai Jian-Wu, Zheng Xiao-Juan The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms interacting with a thermal field via a two-photon process // *Chinese Phys. B*, 2008. vol. 17, no. 6. pp. 2137–2142. doi: [10.1088/1674-1056/17/6/032](https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/6/032).
 26. Bashkirov E. K., Stupatskaya M. P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise // *Laser Phys.*, 2009. vol. 19, no. 3. pp. 525–530. doi: [10.1134/s1054660x09030281](https://doi.org/10.1134/s1054660x09030281).
 27. Marr C., Beige A., Rempe G. Entangled-state preparation via dissipation-assisted adiabatic passages // *Phys. Rev. A*, 2003. vol. 68, no. 3, 033817, arXiv: [quant-ph/0305116](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0305116). doi: [10.1103/physreva.68.033817](https://doi.org/10.1103/physreva.68.033817).

28. Mancini S, Bose S. Engineering an interaction and entanglement between distant atoms // *Phys. Rev. A*, 2004. vol. 70, no. 2, 022307, arXiv: [quant-ph/0111055](#). doi: [10.1103/physreva.70.022307](#).
29. Chimczak G. Efficient generation of distant atom entanglement via cavity decay // *Phys. Rev. A*, 2005. vol. 71, no. 5, 052305. doi: [10.1103/physreva.71.052305](#).
30. Lu M., Xia Y., Shen L.-T., Song J., An N. B. Shortcuts to adiabatic passage for population transfer and maximum entanglement creation between two atoms in a cavity // *Phys. Rev. A*, 2014. vol. 89, no. 1, 012326, arXiv: [1310.5323](#) [quant-ph]. doi: [10.1103/physreva.89.012326](#).
31. Guo Y.-Q., Cao H.-J., Song H.-S. *Field tuned atom-atom entanglement via dipole-dipole interaction*, 2005. 7 pp., arXiv: [quant-ph/0509142](#)
32. Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // *Phys. Rev. Lett.*, 1996. vol. 77, no. 8. pp. 1413–1415, arXiv: [quant-ph/9604005](#). doi: [10.1103/physrevlett.77.1413](#).
33. Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions // *Phys. Lett. A*, 1996. vol. 223, no. 1–2. pp. 1–8, arXiv: [quant-ph/9605038](#). doi: [10.1016/s0375-9601\(96\)00706-2](#).
34. Hu Y.-H., Fang M.-F., Wu Q. Atomic coherence control on the entanglement of two atoms in two-photon processes // *Chinese Phys.*, 2007. vol. 16, no. 8. pp. 2407–2414. doi: [10.1088/1009-1963/16/8/042](#).
35. Hu Y.-H., Fang M.-F. Coherence-Enhanced Entanglement Induced by a Two-Mode Thermal Field // *Commun. Theor. Phys.*, 2010. vol. 54, no. 3. pp. 421–426. doi: [10.1088/0253-6102/54/3/08](#).

Поступила в редакцию 17/XII/2014;
 в окончательном варианте — 14/II/2015;
 принята в печать — 08/IV/2015.

MSC: 81V80, 81P45

ENTANGLEMENT OF TWO QUBITS INTERACTING
WITH ONE-MODE QUANTUM FIELD**E. K. Bashkirov, M. S. Mastuygin*Samara State University,
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russian Federation.

Abstract

In the present paper we investigate the dynamics of the system of two two-level natural or artificial atoms, in which only one atom couples to a thermal one-mode field in finite-Q cavity, since one of them can move around the cavity. For the description of the dynamics of the system we find the eigenvalues and eigenfunctions of a Hamiltonian of the system. With their help we derive the exact expression for a density matrix of the system in case of a pure initial state of atoms and a thermal state of a field. The reduced atomic density matrix is found. The one-qubit transposing of an atomic density matrix is carried out. With its help the Peres–Horodecki criterium is calculated. Numerical calculations of entanglement parameter is done for different initial pure states of atoms and mean photon numbers in a thermal mode. It is found that the thermal field can induce a high degree of qubits entanglement in considered model. Thus we have derived that one can use the strength of dipole-dipole interaction and cavity temperature for entanglement control in the considered system. It is shown also that the maximum degree of entanglement is reached for one-atom excited state.

Keywords: entanglement, qubit, thermal noise, dipole-dipole interaction, Peres–Horodecki criterium.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1377>

ORCIDs

Eugene K. Bashkirov: <http://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

Michail S. Mastuygin: <http://orcid.org/0000-0002-8375-0821>

© 2015 Samara State Technical University.

Please cite this article in press as:

Bashkirov E. K., Mastuygin M. S. Entanglement of two qubits interacting with one-mode quantum field, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 205–220. doi: [10.14498/vsgtu1377](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1377). (In Russian)

Authors Details:

Eugene K. Bashkirov (Dr. Phys. & Math. Sci.; bash@samsu.ru; Corresponding Author), Professor, Dept. of General and Theoretical Physics.

Michail S. Mastuygin (mastuygin.mikhail@mail.ru), Postgraduate Student, Dept. of General and Theoretical Physics.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

REFERENCES

1. Bashkirov E. K., Mastuyugin M. S. Entanglement of two qubits interacting with one-mode quantum field, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 79–80 (In Russian).
2. Nielsen M. A., Chuang I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge, Cambridge University Press, 2010, xxxii+676 pp.. doi: [10.1017/cbo9780511976667](https://doi.org/10.1017/cbo9780511976667)
3. Schumacker D., Westmoreland M. D. *Quantum Processes, Systems, and Information*. Cambridge, Cambridge University Press, 2010, xii+469 pp.. doi: [10.1017/cbo9780511814006](https://doi.org/10.1017/cbo9780511814006).
4. Blatt R., Wineland D. Entangled states of trapped atomic ions, *Nature*, 2008, vol. 453, no. 7198, pp. 1008–1013. doi: [10.1038/nature07125](https://doi.org/10.1038/nature07125).
5. You J. Q., Nori F. Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits, *Nature*, 2011, vol. 474, no. 7353, pp. 589–597, arXiv: [1202.1923](https://arxiv.org/abs/1202.1923) [quant-ph]. doi: [10.1038/nature10122](https://doi.org/10.1038/nature10122).
6. Saffman M., Walker T. G., Mølmer K. Quantum information with Rydberg atoms, *Rev. Mod. Phys.*, 2010, vol. 82, no. 3, pp. 2313–2363, arXiv: [0909.4777](https://arxiv.org/abs/0909.4777) [quant-ph]. doi: [10.1103/revmodphys.82.2313](https://doi.org/10.1103/revmodphys.82.2313).
7. Buluta I., Ashhab F., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation, *Rep. Prog. Phys.*, 2011, vol. 74, no. 10, 104401, arXiv: [1002.1871](https://arxiv.org/abs/1002.1871) [quant-ph]. doi: [10.1088/0034-4885/74/10/104401](https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401).
8. Gühne O., Tóth G. Entanglement detection, *Physics Reports*, 2014, vol. 474, no. 1–6, pp. 1–75, arXiv: [0811.2803](https://arxiv.org/abs/0811.2803) [quant-ph]. doi: [10.1016/j.physrep.2009.02.004](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.02.004).
9. Plenio M. B., Huelda S. F., Beige A., Knight P. L. Cavity-loss-induced generation of entangled atoms, *Phys. Rev. A*, 1999, vol. 59, no. 3, pp. 2468–2475. doi: [10.1103/physreva.59.2468](https://doi.org/10.1103/physreva.59.2468).
10. Bashkirov E. K., Stupatskaya M. P. Entanglement of two atoms interacting with a thermal electromagnetic field, *Computer Optics*, 2011, vol. 35, no. 2, pp. 243–249 (In Russian).
11. Bashkirov E. K., Mastuyugin M. S. Entanglement of two superconducting qubits interacting with two-mode thermal field, *Computer Optics*, 2013, vol. 37, no. 3, pp. 278–285 (In Russian).
12. Bashkirov E. K., Mastuyugin M. S. The influence of the dipole-dipole interaction and atomic coherence on the entanglement of two atoms with degenerate two-photon transitions, *Optics and Spectroscopy*, 2014, vol. 116, no. 4, pp. 630–634. doi: [10.1134/S0030400X14040067](https://doi.org/10.1134/S0030400X14040067).
13. Bashkirov E. K., Mastuyugin M. S. The dynamics of entanglement in two-atom Tavis–Cummings model with non-degenerate two-photon transitions for four-qubits initial atom-field entangled states, *Optics Communications*, 2014, vol. 313, pp. 170–174. doi: [10.1016/j.optcom.2013.10.007](https://doi.org/10.1016/j.optcom.2013.10.007).
14. Bose S., Fruentes-Guridi I., Knight P. L., Vedral V. Subsystem purity as an enforcer of entanglement, *Phys. Rev. Lett.*, 2001, vol. 87, no. 5, 050401. doi: [10.1103/physrevlett.87.050401](https://doi.org/10.1103/physrevlett.87.050401).
15. Kim M. S., Lee J., Ahn D., Knight P. L. Entanglement induced by a single-mode heat environment, *Phys. Rev. A*, 2002, vol. 65, no. 4, 040101, arXiv: [quant-ph/0109052](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0109052). doi: [10.1103/physreva.65.040101](https://doi.org/10.1103/physreva.65.040101).
16. Zhou L., Yi X. X., Song H.-S., Quo Y.-Q. Entanglement of two atoms through different couplings and thermal noise, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2004, vol. 6, no. 9, pp. 378–382, arXiv: [quant-ph/0308086](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0308086). doi: [10.1088/1464-4266/6/9/003](https://doi.org/10.1088/1464-4266/6/9/003).
17. Bashkirov E. K. Entanglement in the system of two nonidentical atoms interacting with thermal noise, *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2006, no. 3(43), pp. 21–29 (In Russian).
18. Zhou L., Song H.-S., Li C. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2002, vol. 4, no. 6, pp. 425–429. doi: [10.1088/1464-4266/4/6/310](https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310).

19. Bashkirov E. K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise, *Laser Phys. Lett.*, 2006, vol. 3, no. 3, pp. 145–150. doi: [10.1002/lapl.200510081](https://doi.org/10.1002/lapl.200510081).
20. Ghosh B., Majumdar A. S., Nayak N. Effects of cavity-field statistics on atomic entanglement in the Jaynes–Cummings model, *Int. J. Quantum Inform.*, 2007, vol. 05, no. 01n02, pp. 169–177, arXiv: [quant-ph/0603039](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0603039). doi: [10.1142/s0219749907002840](https://doi.org/10.1142/s0219749907002840).
21. Yan X.-Q. Entanglement sudden death of two atoms successive passing a cavity, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, vol. 41, no. 4, pp. 1645–1650. doi: [10.1016/j.chaos.2008.07.007](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.07.007).
22. Liao Q., Fang G., Ahmad M. A., Liu S. Sudden birth of entanglement between two atoms successively passing a thermal cavity, *Optics Communications*, 2011, vol. 284, no. 1, pp. 301–305. doi: [10.1016/j.optcom.2010.09.043](https://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.09.043).
23. Aguiar L. S., Munhoa P. P., Vidiella-Barranco A., Roversi J. A. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms in a cavity interacting with a thermal field, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2005, vol. 7, no. 12, pp. S769–S771. doi: [10.1088/1464-4266/7/12/049](https://doi.org/10.1088/1464-4266/7/12/049).
24. Bashkirov E. K., Stupatskaya M. P. Entanglement of Two Dipole-Coupled Atoms, *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy*, 2009, vol. 12, no. 2, pp. 85–89 (In Russian).
25. Liao Xiang-Ping, Fang Mao-Fa, Cai Jian-Wu, Zheng Xiao-Juan The entanglement of two dipole–dipole coupled atoms interacting with a thermal field via a two-photon process, *Chinese Phys. B*, 2008, vol. 17, no. 6, pp. 2137–2142. doi: [10.1088/1674-1056/17/6/032](https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/6/032).
26. Bashkirov E. K., Stupatskaya M. P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise, *Laser Phys.*, 2009, vol. 19, no. 3, pp. 525–530. doi: [10.1134/s1054660x09030281](https://doi.org/10.1134/s1054660x09030281).
27. Marr C., Beige A., Rempe G. Entangled-state preparation via dissipation-assisted adiabatic passages, *Phys. Rev. A*, 2003, vol. 68, no. 3, 033817, arXiv: [quant-ph/0305116](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0305116). doi: [10.1103/physreva.68.033817](https://doi.org/10.1103/physreva.68.033817).
28. Mancini S, Bose S. Engineering an interaction and entanglement between distant atoms, *Phys. Rev. A*, 2004, vol. 70, no. 2, 022307, arXiv: [quant-ph/0111055](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0111055). doi: [10.1103/physreva.70.022307](https://doi.org/10.1103/physreva.70.022307).
29. Chimczak G. Efficient generation of distant atom entanglement via cavity decay, *Phys. Rev. A*, 2005, vol. 71, no. 5, 052305. doi: [10.1103/physreva.71.052305](https://doi.org/10.1103/physreva.71.052305).
30. Lu M., Xia Y., Shen L.-T., Song J., An N. B. Shortcuts to adiabatic passage for population transfer and maximum entanglement creation between two atoms in a cavity, *Phys. Rev. A*, 2014, vol. 89, no. 1, 012326, arXiv: [1310.5323](https://arxiv.org/abs/1310.5323) [quant-ph]. doi: [10.1103/physreva.89.012326](https://doi.org/10.1103/physreva.89.012326).
31. Guo Y.-Q., Cao H.-J., Song H.-S. *Field tuned atom-atom entanglement via dipole-dipole interaction*, 2005, 7 pp., arXiv: [quant-ph/0509142](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0509142)
32. Peres A. Separability Criterion for Density Matrices, *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 77, no. 8, pp. 1413–1415, arXiv: [quant-ph/9604005](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9604005). doi: [10.1103/physrevlett.77.1413](https://doi.org/10.1103/physrevlett.77.1413).
33. Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions, *Phys. Lett. A*, 1996, vol. 223, no. 1–2, pp. 1–8, arXiv: [quant-ph/9605038](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9605038). doi: [10.1016/s0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/s0375-9601(96)00706-2).
34. Hu Y.-H., Fang M.-F., Wu Q. Atomic coherence control on the entanglement of two atoms in two-photon processes, *Chinese Phys.*, 2007, vol. 16, no. 8, pp. 2407–2414. doi: [10.1088/1009-1963/16/8/042](https://doi.org/10.1088/1009-1963/16/8/042).
35. Hu Y.-H., Fang M.-F. Coherence-Enhanced Entanglement Induced by a Two-Mode Thermal Field, *Commun. Theor. Phys.*, 2010, vol. 54, no. 3, pp. 421–426. doi: [10.1088/0253-6102/54/3/08](https://doi.org/10.1088/0253-6102/54/3/08).

Received 17/XII/2014;
 received in revised form 14/II/2015;
 accepted 08/IV/2015.