Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 4. С. 624–633

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1379

УДК 517.923

МОДЕЛЬ ОСЦИЛЛЯТОРА С НАРУШЕНИЕМ СИММЕТРИИ*

Д. Б. Волов

Самарский государственный университет путей сообщения,
Россия, 443066, Самара, 1-й Безымянный пер., 18.

Аннотация

Рассмотрены уравнения движения осциллятора с их точными решениями в виде экспонент с дополнительным параметром. Данный параметр характеризует асимметрию колебаний. Показано, что эти уравнения являются частным случаем уравнения Хилла. Получены уравнения для трех видов таких экспонент, в том числе для экспоненты, обладающей свойством унитарности. Найдены лагранжианы и гамильтонианы к этим уравнениям. Доказано, что все уравнения связаны каноническими преобразованиями и, по сути, являются одним и тем же уравнением, выраженным в разных обобщенных координатах и импульсах. Причем решения линейных однородных уравнений одного типа являются одновременно решениями линейных неоднородных уравнений другого. Обсуждается возможность квантования таких систем.

Ключевые слова: уравнение Хилла, уравнение Матье, параметрический резонанс, лагранжиан, гамильтониан, каноническое преобразование, битриальные экспоненты.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1379

Введение. В ряде задач важную роль играют уравнения Хилла [2–6]

$$\partial_0^2 x + \Omega^2(t)\, x = 0,$$

где $\partial_0^2 x$ — вторая производная по времени t от координаты x, $\Omega^2(t)$ — некоторая периодическая функция. В частности, к уравнению такого вида приводит рассмотрение системы, движение которой задано функциями

$$x_1 = \frac{A_1}{e^{-s_1\omega t} + \alpha}, \quad x_2 = \frac{A_2}{e^{-s_2\omega t} + \alpha},$$

где A_1, A_2 — амплитуды колебаний, ω — частота, $s_1 = a + \sqrt{a^2-1}$, $s_2 = a - \sqrt{a^2-1}$, $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \ll 1$. Все экспоненты с таким включением параметра α называются битриальными [7].

Образец для цитирования
Волов Д. Б. Модель осциллятора с нарушением симметрии // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 624–633. doi: 10.14498/vsgtu1379.

Сведения об авторе
Дмитрий Борисович Волов (д.т.н., доц.; volovdm@mail.ru), профессор, каф. физики и химии.

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного автором на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа — 1 сентября 2014).

Известно [7, 8], что данное решение имеет линейное уравнение второго порядка
$$p(t)\partial_0^2 x - \omega q(t)\partial_0 x + \omega^2 x = 0, \tag{1}$$
в котором функции $p(t)$ и $q(t)$ связаны следующими соотношениями:

$$p(t)\, r(t) = s_2\left(1 + \alpha\, \exp\left(s_1 \omega t\right)\right) - s_1\left(1 + \alpha\, \exp\left(s_2 \omega t\right)\right),$$

$$q(t)\, r(t) = s_2^2\left(1 + \alpha\, \exp\left(s_1 \omega t\right)\right) \frac{\left(1 - \alpha\, \exp\left(s_2 \omega t\right)\right)}{\left(1 + \alpha\, \exp\left(s_2 \omega t\right)\right)} - \\ - s_1^2\left(1 + \alpha\, \exp\left(s_2 \omega t\right)\right) \frac{\left(1 - \alpha\, \exp\left(s_1 \omega t\right)\right)}{\left(1 + \alpha\, \exp\left(s_1 \omega t\right)\right)},$$

$$r(t) = s_2 \frac{\left(1 - \alpha\, \exp\left(s_2 \omega t\right)\right)}{\left(1 + \alpha\, \exp\left(s_2 \omega t\right)\right)} - s_1 \frac{\left(1 - \alpha\, \exp\left(s_1 \omega t\right)\right)}{\left(1 + \alpha\, \exp\left(s_1 \omega t\right)\right)}.$$

Уравнение (1) сводится к уравнению Хилла.

Данная система совершает ангармонические колебания вокруг положения равновесия, смещенного относительно нуля. Такую систему мы будем называть m-гармоническим осциллятором. Здесь нас будут интересовать незатухающие колебания m-гармонического осциллятора: $a = 0$ $(s_1 = i,\ s_2 = -i)$.

1. Отыскание лагранжианов и гамильтонианов к уравнениям движения подобного типа. Сначала опишем прием, который будет использоваться нами при отыскании лагранжианов к уравнениям движения такого типа на протяжении всей работы.

Исходя из того, что лагранжиан

$$L = e^{-2a\omega t}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \omega^2 \frac{x^2}{2}\right)$$

приводит к уравнению движения

$$(\partial_0^2 - 2a\omega\partial_0 + \omega^2)x = \ddot{x} - 2a\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

с частными решениями $x_1' = A_1 e^{s_1 \omega t}$ и $x_2' = A_2 e^{s_2 \omega t}$, лагранжиан к (1) ищется в форме
$$L = e^{-2a(t)\omega t}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \omega^2 \frac{1}{p(t)} \frac{x^2}{2}\right).$$

Тогда искомый лагранжиан имеет вид

$$L = \exp\left(-\omega \int \left(\frac{q(t)}{p(t)} dt + C_0\right)\right)\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \omega^2 \frac{1}{p(t)} \frac{x^2}{2}\right).$$

Константу C_0 можно без потери общности принять равной нулю. Производные по времени для краткости также будем обозначать точками над соответствующими величинами.

По определению, $p = \partial L/\partial \dot{x}$ — обобщенный импульс, а $H = p\dot{X} - L$ — гамильтониан.

2. Три вида уравнений движения.

2.1. Нецентрированная (неунитарная) битриальная экспонента в решении. При $a = 0$ уравнение (1) существенно упрощается:

$$\partial_0^2 x - \alpha\omega \frac{\left(3-\alpha^2\right)\sin\omega t + \alpha\sin(2\omega t)}{p'(t)}\partial_0 x + \frac{\omega^2\left(1-\alpha^2\right)}{p'(t)}x = 0, \tag{2}$$

$$p'(t) = 1 + \alpha\left(3+\alpha^2\right)\cos\omega t + \alpha^2\left(2+\cos(2\omega t)\right).$$

Его частными решениями будут так называемые нецентрированные битриальные экспоненты [8]:

$$x_1 = A_1\frac{1-\alpha^2}{e^{-i\omega t}+\alpha}, \quad x_2 = A_2\frac{1-\alpha^2}{e^{i\omega t}+\alpha}.$$

Применяя формулы предыдущего раздела, находим лагранжиан к уравнению (2):

$$L_x = \left(\frac{1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2}{1+\alpha\cos\omega t}\right)^2\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\left(1-\alpha^2\right)}{p'(t)}\frac{\omega^2x^2}{2}\right). \tag{3}$$

Для обозначения величин, относящихся к нецентрированным экспонентам, здесь и далее будем пользоваться индексом “x”.

Пренебрегая членами второго порядка малости по α, из (3) получим

$$L \approx (1+\alpha\cos\omega t)^2\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{1+3\alpha\cos\omega t}\frac{\omega^2x^2}{2}\right),$$

и тогда (2) переходит в уравнение Матье [9]:

$$\partial_0^2 x - 3\alpha\omega\sin\omega t\partial_0 x + \omega^2\left[1-3\alpha\cos\omega t\right]x \approx 0.$$

Действительно, заменой

$$Q(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t\frac{q(\tau)}{p(\tau)}d\tau\right)x(t)$$

уравнение (2) сводится к уравнению Хилла, которое, в свою очередь, ввиду малости параметра α приближенно соответствует уравнению Матье [9]

$$\partial_0^2 Q + \omega_n^2\left[1+f_0\sin\omega_p t\right]Q = 0, \tag{4}$$

где $f_0 = \mathrm{const}$, ω_n — собственная частота, ω_p — частота изменения параметра системы. Уравнение (4) хорошо изучено [9, 10]. В частности, известно, что главный параметрический резонанс наблюдается на частоте, близкой к удвоенной собственной частоте колебаний системы $\omega_p \approx 2\omega_n$. Все последующие резонансы происходят на частотах, близких к $\omega_p \approx 2\omega_n/n$, $n = 2, 3, \ldots$, с резким снижением ширины резонанса $\Delta\omega_p$ и амплитуды колебаний при увеличении n [10]. В случае уравнения (2) резонанс наблюдается на $\omega_p \approx \omega_n$ и приводит к незатухающим колебаниям в линейной системе, описываемой этим уравнением. Роль «вязких» членов при ∂_0 в уравнении (2) сводится к «подпитке» энергией системы на первом полупериоде и диссипации ее на втором, так что в итоге колебания не затухают.

Отыскивая гамильтониан и обобщенный импульс к уравнению (2), имеем

$$H_x = \frac{1+\alpha\cos\omega t}{(1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2)^2}\frac{p_x^2}{2} + \frac{\left(1-\alpha^2\right)\left(1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2\right)^2}{p'(t)}\frac{\omega^2 x^2}{2},$$

где

$$p_x = \frac{\left(1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2\right)^2}{1+\alpha\cos\omega t}\dot{x}.$$

В квантовом случае ($[x,\, p_x] = i$) для операторов рождения и уничтожения $a,\, a^\dagger$, полагая $[a,\, a] = \left[a^\dagger,\, a^\dagger\right] = 0$ и учитывая, что

$$1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2 = \left(e^{i\omega t}+\alpha\right)\left(e^{-i\omega t}+\alpha\right),$$

после ряда громоздких преобразований находим, что

$$\left[a,\, a^\dagger\right] = 1/\left(2\omega\left(1-\alpha^2\right)^2\right) \neq f(t).$$

Эта величина не зависит от времени и будет отличаться от соответствующего выражения для обычных экспонент (без α в решениях) только лишь множителем $\left(1-\alpha^2\right)^2$. Данное свойство при соответствующей нормировке делает возможным интерпретацию квантовых уровней нецентрированного m-гармонического осциллятора в терминах частиц. Но здесь мы ограничимся рассмотрением классического варианта.

`2.2. Центрированная (унитарная) битриальная экспонента в решении.` Для центрированных решений

$$y_1 = A_1\frac{1+\alpha e^{-i\omega t}}{1+\alpha e^{i\omega t}}\, e^{i\omega t}, \quad y_2 = A_2\frac{1+\alpha e^{i\omega t}}{1+\alpha e^{-i\omega t}}\, e^{-i\omega t} \tag{5}$$

уравнения

$$\partial_0^2 y - \frac{2\alpha\omega\sin\omega t}{1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2}\partial_0 y + \left(\frac{1-\alpha^2}{1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2}\right)^2\omega^2 y = 0, \tag{6}$$

получаемых из (2) заменой $y = \alpha + x$, лагранжиан имеет вид

$$L_y = \left(1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2\right)\left(\frac{\dot{y}^2}{2} - \left(\frac{1-\alpha^2}{1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2}\right)^2\frac{\omega^2 y^2}{2}\right),$$

а гамильтониан —

$$H_y = \frac{1}{1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2}\left(\frac{p_y^2}{2} + (1-\alpha^2)^2\frac{\omega^2 y^2}{2}\right),$$

где

$$p_y = \left(1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2\right)\dot{y}.$$

В работе [8] приводится общее доказательство унитарности центрированных экспонент. Для величин, связанных с ними, будем использовать индекс “y”.

В квантовом случае после ряда трудоемких выкладок находим, что

$$\left[a,\, a^\dagger\right] = 1/\left(-2\omega\left(1-\alpha^2\right)\right) \neq f(t).$$

Эта величина опять не зависит от времени, так что представление в терминах частиц может быть проведено и в унитарном случае.

`2.3. «Экспонента Хилла» в решении.` Известно [9], что уравнение (6) как уравнение вида

$$\partial_0^2 y + p_1(t)\partial_0 y + p_2(t) y = 0$$

приводится заменой

$$z = y\exp\left(\frac{1}{2}\int p_1(t)dt\right)$$

к уравнению Хилла

$$\partial_0^2 z + P(t) z = 0, \tag{7}$$

где

$$P(t) = p_2(t) - \frac{1}{2}\partial_0\left(p_1(t)\right) - \frac{1}{4}p_1^2(t).$$

Тогда в нашем случае

$$z = y\sqrt{1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2} \tag{8}$$

и

$$P(t) = \omega^2\left(1 - \frac{3\alpha\left(\alpha+\left(1+\alpha^2\right)\cos\omega t+\alpha\cos^2\omega t\right)}{\left(1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2\right)^2}\right).$$

В соответствии с (8) и (5) получаем, что решения уравнения Хилла (7) здесь даются выражениями

$$z_1 = A_1\sqrt{\frac{1+\alpha e^{-i\omega t}}{1+\alpha e^{i\omega t}}}\left(e^{i\omega t}+\alpha\right), \quad z_2 = A_2\sqrt{\frac{1+\alpha e^{i\omega t}}{1+\alpha e^{-i\omega t}}}\left(e^{-i\omega t}+\alpha\right),$$

которые мы будем называть «экспонентами Хилла». Для величин, связанных экспонентой Хилла, будем использовать индекс “z”.

Поскольку уравнение (7) не содержит первых производных по времени, лагранжиан и гамильтониан к нему записываются наиболее просто ($p_z = \dot z$):

$$L_z = \frac{\dot z^2}{2} - \frac{\omega^2 z^2}{2}P(t),$$

$$H_z = \frac{p_z^2}{2} + \frac{\omega^2 z^2}{2}P(t).$$

В квантовом случае, проводя необходимые преобразования, находим, что

$$\left[a,\, a^\dagger\right] = 1/2\omega\left(1-\alpha^2\right) \neq f(t).$$

Так что трактовка в терминах частиц будет возможна и в случае диагонализированных уравнений (7).

3. Канонические преобразования. В механике при изучении уравнения вида (6) его сначала приводят (путем рассмотренного выше преобразования) к виду, не содержащему первой производной по времени, то есть к уравнению Хилла. По сути, уравнения (6) и (7) являются одним и тем же уравнением, выраженным в разных обобщенных координатах и импульсах. Поэтому такие уравнения должны быть связаны каноническим преобразованием. Однако прямое нахождение производящей функции F приводит к громоздким малоинформативным выражениям $\left(\dfrac{\partial F}{\partial t} = H_z - H_y\right)$. К счастью, для подтверждения того факта, что преобразования являются каноническими, достаточно удостовериться в выполнении правил для скобок Пуассона [10] в каждом из трех случаев, а затем учесть, что все три вида координат связаны явными выражениями.

Таким образом, убеждаемся, что для всех трех уравнений (2), (6), (7) и их гамильтонианов справедливо каноническое преобразование

$$\{x, p_x\} \mapsto \{y, p_y\} \mapsto \{z, p_z\}\,.$$

В первом из этих уравнений координата x совпадает с декартовой, во втором ($y = \alpha + x$) — решения выражаются в унитарной форме, в третьем уравнении импульс $p_z = \dot{z}$ и гамильтониан с лагранжианом выражаются в наиболее простом виде. Преимущества использования того или иного вида обобщенных координат и импульсов проявляются в решении данной конкретной задачи, но всегда можно выполнить каноническое преобразование от одних координат к другим. При $\alpha = 0$ различие в этих трех случаях вообще исчезает, а m-гармонический осциллятор превращается в обычный гармонический.

Поскольку теперь ясно, что уравнение одно и то же, представление его в той или иной форме не затрагивает свойств коммутации и в квантовом случае, что и следовало ожидать.

4. Полная ортонормированная система решений и уравнения к ней. Итак, все три рассмотренных уравнения оказались связанными каноническими преобразованиями. Однако, если иметь в виду их приближения к уравнениям Матье типа (4), можно заметить, что найденные уравнения и их точные решения соответствуют лишь одному резонансному значению $\omega_p \approx \omega_n$ в диаграмме Айнса—Стретта [9]. Чтобы найти решения для любого собственного значения n системы, нужно несколько модифицировать полученные ранее уравнения. Воспользуемся тем, что битриальные экспоненты вида

$$y_1 = A_1(n)\left(\frac{1+\alpha e^{-i\omega_0 t}}{1+\alpha e^{i\omega_0 t}}\, e^{i\omega_0 t}\right)^n, \quad y_2 = A_2(n)\left(\frac{1+\alpha e^{i\omega_0 t}}{1+\alpha e^{-i\omega_0 t}}\, e^{-i\omega_0 t}\right)^n, \qquad (9)$$

где $n \in \mathbb{Z}$, образуют полную ортонормированную систему функций [7]. Восстанавливая через вронскиан уравнения движения к этим функциям, как это делалось в [8], получим уравнение, отличающееся от (6) только множителем n^2 перед третьим членом:

$$\partial_0^2 y - \frac{2\alpha\omega_0 \sin\omega_0 t}{1+2\alpha\cos\omega_0 t+\alpha^2}\,\partial_0 y + n^2\omega_0^2\left(\frac{1-\alpha^2}{1+2\alpha\cos\omega_0 t+\alpha^2}\right)^2 y = 0. \qquad (10)$$

Теперь, ввиду того, что мы расширили область решений до $n \neq 1$, нам пришлось заменить ω из уравнения (6) на ω_0 и принять $n = \omega/\omega_0$. Анализ решений (9) уравнения (10) в рядах Фурье показывает, что оно имеет непрерывные периодические решения при значениях $n \in \mathbb{Q}$. При $\alpha = 0$ экспоненты (9) переходят в обычные $\sim e^{\pm i\omega t} = e^{\pm i\omega_0 n t}$.

Несмотря на простоту включения параметра n в (10), для нас более важна диагональная форма уравнения, переходящая в (7) при $n = 1$. Действуя аналогичным [8] образом, получаем

$$\partial_0^2 z + \omega_0^2 \left(\frac{n^2 \left(1-\alpha^2\right)^2 + \alpha \cos\omega_0 t \cdot \left(1 + \alpha\cos\omega_0 t + \alpha^2\right) + \alpha^2}{\left(1 + 2\alpha\cos\omega_0 t + \alpha^2\right)^2} \right) z = 0. \tag{11}$$

Его решениями будут функции

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1(n) \left(\frac{1 + \alpha e^{-i\omega_0 t}}{1 + \alpha e^{i\omega_0 t}}\, e^{i\omega_0 t} \right)^n \sqrt{1 + 2\alpha\cos\omega_0 t + \alpha^2}, \\ z_2 &= A_2(n) \left(\frac{1 + \alpha e^{i\omega_0 t}}{1 + \alpha e^{-i\omega_0 t}}\, e^{-i\omega_0 t} \right)^n \sqrt{1 + 2\alpha\cos\omega_0 t + \alpha^2}, \end{aligned} \tag{12}$$

в чем легко убедиться прямой подстановкой. Важно, что при $n = 1/2$ уравнение (11) и, соответственно, его решения (12) перестают зависеть от α, что на первый взгляд неочевидно. Однако это свойство легко доказывается подстановкой условия $n = 1/2$ в уравнения (11) или решения (12).

Для дальнейших исследований представляют интерес многомерные аналоги рассмотренных уравнений. Так, например, в трехмерном евклидовом случае уравнение (11) соответствует стационарному уравнению Шредингера для задачи о движении электрона в периодическом поле решетки твердого тела [11]. Однако в данной работе мы не будем касаться этих вопросов.

5. Линейные однородные и неоднородные уравнения с решениями в битриальных экспонентах. Вернемся к уравнениям при $n = 1$. Линейная комбинация $y = A_1 y_1 + A_2 y_2$ центрированных битриальных экспонент

$$y_1 = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{e^{-i\omega t} + \alpha}, \quad y_2 = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{e^{i\omega t} + \alpha}$$

одновременно является решением однородного уравнения

$$\partial_0^2 y - \frac{2\alpha\omega\sin\omega t}{1 + 2\alpha\cos\omega t + \alpha^2}\, \partial_0 y + \left(\frac{1-\alpha^2}{1 + 2\alpha\cos\omega t + \alpha^2} \right)^2 \omega^2 y = 0$$

и неоднородного уравнения

$$\begin{aligned} \partial_0^2 y - \alpha\omega \frac{\left(3-\alpha^2\right)\sin\omega t + \alpha\sin(2\omega t)}{p'(t)} \partial_0 y + \frac{\omega^2\left(1-\alpha^2\right)}{p'(t)} y = \\ = \left(A_1 + A_2\right) \frac{\alpha\omega^2\left(1-\alpha^2\right)}{p'(t)}, \end{aligned}$$

$$p'(t) = 1 + \alpha\left(3 + \alpha^2\right)\cos\omega t + \alpha^2\bigl(2 + \cos(2\omega t)\bigr).$$

Линейная комбинация $x = A_1 x_1 + A_2 x_2$ нецентрированных битриальных экспонент

$$x_1 = \frac{1-\alpha^2}{e^{-i\omega t}+\alpha}, \quad x_2 = \frac{1-\alpha^2}{e^{i\omega t}+\alpha}$$

одновременно является решением однородного уравнения

$$\partial_0^2 x - \alpha\omega \frac{\left(3-\alpha^2\right)\sin\omega t + \alpha \sin(2\omega t)}{p'(t)}\,\partial_0 x + \frac{\omega^2\left(1-\alpha^2\right)}{p'(t)} x = 0$$

и неоднородного уравнения

$$\partial_0^2 x - \frac{2\alpha\omega\sin\omega t}{1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2}\partial_0 x + \Big(\frac{1-\alpha^2}{1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2}\Big)^2\omega^2 x = \\ = -\left(A_1+A_2\right)\alpha\omega^2\Big(\frac{1-\alpha^2}{1+2\alpha\cos\omega t+\alpha^2}\Big)^2.$$

В этом нет ничего удивительного, поскольку решение неоднородного уравнения есть сумма решений однородного и неоднородного, а $y_1 = x_1 + \alpha$, $y_2 = x_2 + \alpha$.

Тогда лагранжиан взаимодействующего нецентрированного осциллятора $L_{int} = L_n + yJ$ равен лагранжиану свободного центрированного осциллятора L, где J — источник.

6. Выводы. Таким образом, при построении модели колебаний ангармонического осциллятора специального вида найдены уравнения движения и их точные решения, а также лагранжианы и гамильтонианы к ним. Поскольку уравнения линейные, их полная ортонормированная система решений может быть использована в качестве базиса пространства функций.

ORCID
Дмитрий Борисович Волов: http://orcid.org/0000-0001-5129-4692

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Волов Д. Б. Модель осциллятора с нарушением симметрии / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 110–111.
2. Magnus W., Winkler S. *Hill's Equation* / Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. vol. 20. New York, London, Sydney: Interscience Publ., 1966. viii+127 pp.
3. Varró S. A new class of exact solutions of the Klein–Gordon equation of a charged particle interacting with an electromagnetic plane wave in a medium // *Laser Phys. Lett.*, 2014. vol. 11, no. 1, 016001. doi: 10.1088/1612-2011/11/1/016001.
4. Takara M., Toyoshima M., Seto H., Hoshino Y., Miura Y. Polymer-modified gold nanoparticles via RAFT polymerization: a detailed study for a biosensing application // *Polym. Chem.*, 2014. vol. 5, no. 3. pp. 931–939. doi: 10.1039/c3py01001e.
5. Vázquez C., Collado J., Fridman L. Super twisting control of a parametrically excited overhead crane // *Journal of the Franklin Institute*, 2014. vol. 351, no. 4. pp. 2283–2298. doi: 10.1016/j.jfranklin.2013.02.011.
6. Lei H., Xu B. High-order analytical solutions around triangular libration points in the circular restricted three-body problem // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2013. vol. 434, no. 2. pp. 1376–1386. doi: 10.1093/mnras/stt1099.

7. Волов Д. Б. Некоторые уравнения на основе одномерных хаотических динамик // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. №1(30). С. 334–342. doi: 10.14498/vsgtu1175.
8. Волов Д. Б. Об унитарности битриальных операторов в явном виде обобщенного уравнения // *Вестник СамГУПС*, 2013. №4. С. 107–112.
9. Magnus K., Popp K., Sextro W. *Schwingungen. Physikalische Grundlagen und mathematische Behandlung von Schwingungen* [Oscillations. Physical foundations and mathematical treatment of oscillations]. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2013, xi+298 pp. doi: 10.1007/978-3-8348-2575-9.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Глава 5. Малые колебания / *Теоретическая физика*. Т. 1, Механика. М.: Наука, 1988. С. 78–125.
11. Давыдов А. С. *Теория твердого тела*. М.: Наука, 1976. 639 с.

Поступила в редакцию 17/XII/2014;
в окончательном варианте — 13/III/2015;
принята в печать — 08/VIII/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 624–633

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1379

MSC: 34B30, 34M10

THE OSCILLATOR'S MODEL WITH BROKEN SYMMETRY*

D. B. Volov

Samara State Transport University,
18, First Bezimyanniy per., Samara, 443066, Russian Federation.

Abstract

The equations of the oscillator motion are considered. The exact solutions are given in the form of exponents with an additional parameter that characterizes the asymmetry of the oscillations. It is shown that these equations are the special case of the Hill's equation. The equations for the three types of exponents, including having the property of unitarity are obtained. Lagrangians and Hamiltonians are found for these equations. It is proved that all the equations are associated by canonical transformations and essentially are the same single equation, expressed in different generalized coordinates and momenta. Moreover, the solutions of linear homogeneous equations of the same type are both solutions of inhomogeneous linear equations of another one. A quantization possibility of such systems is discussed.

Keywords: Hill equation, Mathieu equation, parametric resonance, Lagrangian, Hamiltonian, canonical transformation, bitrial exponents.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1379

Please cite this article in press as:
Volov D. B. The oscillator's model with broken symmetry, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 624–633. doi: 10.14498/vsgtu1379. (In Russian)

Author Details:
Dmitry B. Volov (Dr. Tech. Sci.; volovdm@mail.ru), Professor, Dept. of Physics and Chemistry.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

ORCID
Dmitry B. Volov: http://orcid.org/0000-0001-5129-4692

REFERENCES

1. Volov D. M. The oscillator's model with broken symmetry, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 110–111 (In Russian).
2. Magnus W., Winkler S. *Hill's Equation*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, vol. 20. New York, London, Sydney, Interscience Publ., 1966, viii+127 pp.
3. Varró S. A new class of exact solutions of the Klein–Gordon equation of a charged particle interacting with an electromagnetic plane wave in a medium, *Laser Phys. Lett.*, 2014, vol. 11, no. 1, 016001. doi: 10.1088/1612-2011/11/1/016001.
4. Takara M., Toyoshima M., Seto H., Hoshino Y., Miura Y. Polymer-modified gold nanoparticles via RAFT polymerization: a detailed study for a biosensing application, *Polym. Chem.*, 2014, vol. 5, no. 3, pp. 931–939. doi: 10.1039/c3py01001e.
5. Vázquez C., Collado J., Fridman L. Super twisting control of a parametrically excited overhead crane, *Journal of the Franklin Institute*, 2014, vol. 351, no. 4, pp. 2283–2298. doi: 10.1016/j.jfranklin.2013.02.011.
6. Lei H., Xu B. High-order analytical solutions around triangular libration points in the circular restricted three-body problem, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2013, vol. 434, no. 2, pp. 1376–1386. doi: 10.1093/mnras/stt1099.
7. Volov D. B. Equation on the basis of one-dimensional chaotic dynamics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2013, no. 1(30), pp. 334–342 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1175.
8. Volov D. B. On unitarity of bitrial evolution operators in the explicit generalized equation, *Vestnik SamGUPS*, 2013, no. 4, pp. 107–11 (In Russian).
9. Magnus K., Popp K., Sextro W. *Schwingungen. Physikalische Grundlagen und mathematische Behandlung von Schwingungen* [Oscillations. Physical foundations and mathematical treatment of oscillations]. Wiesbaden, Springer Vieweg, 2013, xi+298 pp. doi: 10.1007/978-3-8348-2575-9.
10. Landau L. D., Lifshitz E. M. Chapter V – Small Oscillations, *Course of Theoretical Physics*, vol. 1, Mechanics, Elsevier Ltd., 1976, pp. 58–95. doi: 10.1016/B978-0-08-050347-9.50010-1.
11. Davydov A. S. *Teoriia tverdogo tela* [Theory of Solids]. Moscow, Nauka, 1976, 639 pp. (In Rusiian)

Received 17/XII/2014;
received in revised form 13/III/2015;
accepted 08/VIII/2015.