Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 4. С. 634–649
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1384

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ПЕРЕХОДА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ*

А. А. Гималтдинова

Башкирский государственный университет, Стерлитамакский филиал,
Россия, 453103, Стерлитамак, проспект Ленина, 49.

Аннотация

Изучена первая краевая задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с двумя перпендикулярными внутренними линиями изменения типа и спектральным параметром. Доказаны единственность и существование решения. При доказательстве единственности используется полнота в пространстве L_2 системы, биортогонально сопряженной с системой собственных функций соответствующей одномерной задачи. При построении решения в виде суммы ряда по биортогональной системе функций возникает проблема малых знаменателей. Получены оценки об отделимости знаменателей от нуля.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, задача Дирихле, единственность, существование решения, спектральный метод.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1384

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, в области

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\},$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\alpha, \beta > 0$. Обозначим $D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_3 = D \cap \{x < 0, y < 0\}$, $D_4 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$.

Задача Дирихле (Задача D). *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям*

$$u(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{D}) \cap \mathrm{C}^1(D) \cap \mathrm{C}^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4), \tag{2}$$

Образец для цитирования
Гималтдинова А. А. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями перехода в прямоугольной области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 634–649. doi: 10.14498/vsgtu1384.

Сведения об авторе
Альфира Авкалевна Гималтдинова (к.ф.-м.н., доц.; alfiragimaltdinova@mail.ru), доцент, каф. математического анализа.

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного авторами на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4, \tag{3}$$

$$u(x, y)\big|_{x=1} = u(x, y)\big|_{x=-1} = 0, \quad y \in [-\alpha; \beta], \tag{4}$$

$$u(x, y)\big|_{y=-\alpha} = \psi(x), \qquad u(x, y)\big|_{y=\beta} = \varphi(x), \quad x \in [-1; 1], \tag{5}$$

где φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(\pm 1) = \psi(\pm 1) = 0$.

Краевые задачи для уравнений смешанного типа с одной или несколькими линиями изменения или вырождения типа были объектом изучения многих авторов.

В работе [2] построена теория задачи Трикоми для уравнений смешанного типа в классической смешанной области, в которой гиперболическая часть состоит из двух подобластей, ограниченных характеристиками уравнения и линиями изменения типа. Там приведен достаточно полный обзор работ, посвященных данному направлению.

В работе [3] предложена задача для уравнения с двумя линиями вырождения в смешанной области, состоящей из четырех эллиптических подобластей и четырех гиперболических подобластей, последние из которых ограничены характеристиками данного уравнения и линиями изменения типа.

В [4, с. 303] было показано, что некоторые задачи трансзвуковой газовой динамики сводятся к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа. В [5] доказана некорректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева. В дальнейшем задача Дирихле для уравнений смешанного типа привлекала внимание многих авторов [6–11]. В этих работах единственность решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа с одной линией вырождения или изменения типа доказана с помощью принципа экстремума или методом интегральных тождеств, а существование — методом интегральных уравнений или разделения переменных.

В работах [12, 13] исследована задача Дирихле для уравнения смешанного типа с одной внутренней линией степенного вырождения и вырождением на границе в прямоугольной области и методами спектрального анализа установлен критерий единственности и решение задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций.

В данной работе впервые для уравнения (1) с двумя внутренними перпендикулярными линиями изменения типа со спектральным параметром изучена задача Дирихле в прямоугольной области D. Найдены собственные значения соответствующей спектральной задачи. Установлен критерий единственности, и решение задачи (2)–(5) построено в виде суммы ряда по биортогональной системе функций. Единственность решения поставленной задачи доказана на основании полноты биортогональной системы в пространстве $L_2[-1, 1]$. Ранее такая идея использовалась в работе [14] при доказательстве единственности решения начально-граничной задачи для гиперболических уравнений и в работе [12] для уравнений смешанного типа с одной линией изменения типа. При доказательстве существования решения задачи (2)–(5) аналогично [15, 16, 12] возникла так называемая «проблема малых знаменателей», которая создает трудности при обосновании сходимости построенного ряда в классе функций (2). При определенных ограничениях на параметры α, β доказаны леммы об отделимости малых знаменателей от нуля.

2. Спектральная задача. Построение биортогональной системы.

Задача D_λ. *Найти значения λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, удовлетворяющие задаче (2)–(5), где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$.*

После разделения переменных $u(x,y) = X(x)Y(y)$ получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\operatorname{sgn} x \cdot X'' + d \cdot X = 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1), \tag{6}$$

$$\operatorname{sgn} y \cdot Y'' + (\lambda - d)Y = 0, \quad y \in (-\alpha,0) \cup (0,\beta), \tag{7}$$

где $d = \mu^2 \in \mathbb{C}$ — постоянная разделения, причем в силу условий задачи должны быть выполнены условия

$$X(0-0) = X(0+0), \quad X'(0-0) = X'(0+0), \tag{8}$$

$$X(-1) = X(1) = 0, \tag{9}$$

$$Y(0-0) = Y(0+0), \quad Y'(0-0) = Y'(0+0), \tag{10}$$

$$Y(-\alpha) = Y(\beta) = 0. \tag{11}$$

Спектральные задачи (6), (8), (9) и (7), (10), (11) не являются классическими из-за незнакоопределенности коэффициента при старшей производной.

Решениями уравнения (6), удовлетворяющими условиям (8), являются функции

$$X(x) = \begin{cases} C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x, & x > 0, \\ C_1 \operatorname{ch} \mu x + C_2 \operatorname{sh} \mu x, & x < 0, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, и с учетом условия (9) для μ получим уравнение

$$\operatorname{tg} \mu = -\operatorname{th} \mu. \tag{12}$$

Лемма 1. *Уравнение*

$$\operatorname{tg}(az) = -\operatorname{th}(bz), \quad a,b \in \mathbb{R}, \quad a,b > 0,$$

имеет счетное множество корней, состоящее из нуля, простых попарно противоположных действительных и попарно противоположных чисто мнимых корней, для которых справедливы следующие асимптотические представления:

$$z_k^{(1),(2)} = \pm\Big(-\frac{\pi}{4a} + \frac{\pi}{a}k + O\big(e^{-2\pi kb/a}\big)\Big),$$

$$z_k^{(3),(4)} = \pm i\Big(-\frac{\pi}{4b} + \frac{\pi}{b}k + O\big(e^{-2\pi ka/b}\big)\Big), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Уравнение (12) в силу леммы 1 имеет счетное множество действительных корней $\pm\mu_k$ и чисто мнимых корней $\pm i\mu_k$, причем для положительных μ_k справедливо асимптотическое представление

$$\mu_k = -\frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k}). \tag{13}$$

Тогда d может принимать значения $d_k^{(1)} = \mu_k^2 > 0$ и $d_k^{(2)} = -\mu_k^2 < 0$, и решениями задачи (6), (8), (9) будут соответственно функции

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, & x > 0, \\ \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x < 0, \end{cases} \qquad X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x > 0, \\ \dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, & x < 0. \end{cases}$$

При найденных μ_k решениями уравнения (7) с учетом условий (10) будут соответственно функции

$$Y_k^{(1)}(y) = \begin{cases} a_k^{(1)} \operatorname{ch}(y\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}) + b_k^{(1)} \operatorname{sh}(y\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}), & y > 0, \\ a_k^{(1)} \cos(y\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}) + b_k^{(1)} \sin(y\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}), & y < 0, \end{cases} \tag{14}$$

$$Y_k^{(2)}(y) = \begin{cases} a_k^{(2)} \cos(y\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}) + b_k^{(2)} \sin(y\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}), & y > 0, \\ a_k^{(2)} \operatorname{ch}(y\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}) + b_k^{(2)} \operatorname{sh}(y\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}), & y < 0, \end{cases} \tag{15}$$

где $a_k^{(1)}$, $b_k^{(1)}$, $a_k^{(2)}$, $b_k^{(2)}$ — неизвестные пока коэффициенты.

Далее, удовлетворяя функции (14) и (15) граничным условиям (11), получим системы для нахождения неизвестных коэффициентов $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$, $j = 1, 2$:

$$\begin{cases} a_k^{(1)} \operatorname{ch}(\beta\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}) + b_k^{(1)} \operatorname{sh}(\beta\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}) = 0, \\ a_k^{(1)} \cos(\alpha\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}) - b_k^{(1)} \sin(\alpha\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} a_k^{(2)} \cos(\beta\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}) + b_k^{(2)} \sin(\beta\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}) = 0, \\ a_k^{(2)} \operatorname{ch}(\alpha\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}) - b_k^{(2)} \operatorname{sh}(\alpha\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Системы (16) и (17) имеют нетривиальные решения тогда и только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ соответственно определители этих систем равны 0:

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) = \cos(\alpha\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}) \operatorname{sh}(\beta\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}) + \\ + \sin(\alpha\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}) \operatorname{ch}(\beta\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}) = 0, \tag{18}$$

$$\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta) = \operatorname{ch}(\alpha\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}) \sin(\beta\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}) + \\ + \operatorname{sh}(\alpha\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}) \cos(\beta\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}) = 0. \tag{19}$$

В этом случае

$$b_k^{(1)} = a_k^{(1)} \operatorname{ctg}(\alpha\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}), \quad b_k^{(2)} = a_k^{(2)} \operatorname{cth}(\alpha\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}),$$

и функции (14) и (15) примут вид

$$Y_k^{(1)}(y) = \begin{cases} a_k^{(1)}\big(\cos(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda}) + \operatorname{ctg}(\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\sin(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\big), & y<0,\\ a_k^{(1)}\big(\operatorname{ch}(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda}) + \operatorname{ctg}(\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\operatorname{sh}(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\big), & y>0,\end{cases}$$

$$Y_k^{(2)}(y) = \begin{cases} a_k^{(2)}\big(\operatorname{ch}(y\sqrt{\mu_k^2+\lambda}) + \operatorname{cth}(\alpha\sqrt{\mu_k^2+\lambda})\operatorname{sh}(y\sqrt{\mu_k^2+\lambda})\big), & y<0,\\ a_k^{(2)}\big(\cos(y\sqrt{\mu_k^2+\lambda}) + \operatorname{th}(\alpha\sqrt{\mu_k^2+\lambda})\sin(y\sqrt{\mu_k^2+\lambda})\big), & y>0,\end{cases}$$

где $a_k^{(1)}$, $a_k^{(2)}$ — произвольные коэффициенты.

Лемма 2. *Собственными значениями спектральной задачи D_λ являются числа*

$$\lambda_{k,0}^{(1,1)} = \mu_k^2, \quad \lambda_{k,n}^{(1,2)} = \mu_k^2 - (c_n^{(1)})^2, \quad \lambda_{k,n}^{(1,3)} = \mu_k^2 + (c_n^{(2)})^2,$$

$$\lambda_{k,0}^{(2,1)} = -\mu_k^2, \quad \lambda_{k,n}^{(2,2)} = -\mu_k^2 + (c_n^{(2)})^2, \quad \lambda_{k,n}^{(2,3)} = -\mu_k^2 - (c_n^{(1)})^2,$$

где μ_k — корни уравнения (12), *определяемые формулой* (13), $c_n^{(1)}$, $c_n^{(2)}$ — *корни уравнения* $\operatorname{tg}(\alpha c) = -\operatorname{th}(\beta c)$, *определяемые так*:

$$c_n^{(1)} = -\frac{\pi}{4\alpha} + \frac{\pi}{\alpha}n + O\big(e^{-2\pi n\beta/\alpha}\big), \quad c_n^{(2)} = -\frac{\pi}{4\beta} + \frac{\pi}{\beta}n + O\big(e^{-2\pi n\alpha/\beta}\big), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Собственные значения поставленной задачи являются корнями уравнений (18) и (19). Уравнение (18) равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}(\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda}) = -\operatorname{th}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda}).$$

Обозначим $\sqrt{\mu_k^2-\lambda} = c$, тогда уравнение $\operatorname{tg}(\alpha c) = -\operatorname{th}(\beta c)$ согласно лемме 1 имеет следующие корни:

$$c_0 = 0, \qquad c_n^{(1)} = \Big(-\frac{\pi}{4\alpha} + \frac{\pi}{\alpha}n + O\big(e^{-2\pi n\beta/\alpha}\big)\Big),$$

$$ic_n^{(2)} = i\Big(-\frac{\pi}{4\beta} + \frac{\pi}{\beta}n + O\big(e^{-2\pi n\alpha/\beta}\big)\Big), \quad c_n^{(3)} = -\Big(-\frac{\pi}{4\alpha} + \frac{\pi}{\alpha}n + O\big(e^{-2\pi n\beta/\alpha}\big)\Big),$$

$$ic_n^{(4)} = -i\Big(-\frac{\pi}{4\beta} + \frac{\pi}{\beta}n + O\big(e^{-2\pi n\alpha/\beta}\big)\Big),$$

где $n \in \mathbb{N}$. Тогда собственными значениями будут действительные числа

$$\lambda_{k,0}^{(1,1)} = \mu_k^2, \quad \lambda_{k,n}^{(1,2)} = \mu_k^2 - (c_n^{(1)})^2, \quad \lambda_{k,n}^{(1,3)} = \mu_k^2 + (c_n^{(2)})^2.$$

Аналогично из уравнения (19) найдем

$$\lambda_{k,0}^{(2,1)} = -\mu_k^2, \quad \lambda_{k,n}^{(2,2)} = -\mu_k^2 + (c_n^{(2)})^2, \quad \lambda_{k,n}^{(2,3)} = -\mu_k^2 - (c_n^{(1)})^2. \quad \square$$

Соответствующие собственные функции имеют вид

$$u_{k,n}^{(j,l)}(x,y) = X_k^{(j)}(x)Y_k^{(j)}(y, \lambda_{k,n}^{(j,l)}),$$

где

$$Y_k^{(j)}(y, \lambda_{k,n}^{(j,l)}) = Y_k^{(j)}(y)\big|_{\lambda=\lambda_{k,n}^{(j,l)}}, \quad j = 1,2, \ \ l = 1,2,3.$$

Система $\{X_k^{(1)}(x),\ X_k^{(2)}(x)\}$ не ортогональна в $L_2[-1,1]$. Задача, сопряженная к задаче (6), (8), (9), имеет следующий вид:

$$\operatorname{sgn} x \cdot Z'' + d \cdot Z = 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1), \tag{20}$$

$$Z(0-0) = -Z(0+0), \quad Z'(0-0) = -Z'(0+0), \quad Z(-1) = Z(1) = 0. \tag{21}$$

Решениями задачи (20), (21) являются функции

$$Z_k^{(1)}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, & x > 0, \\ \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x < 0, \end{cases} \qquad Z_k^{(2)}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x > 0, \\ \dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, & x < 0. \end{cases}$$

Система $\{Z_k^{(1)};\ Z_k^{(2)}\}$ является биортогонально сопряженной с системой $\{X_k^{(1)};\ X_k^{(2)}\}$, т.е. имеет место равенство

$$\int_{-1}^{1} X_k^{(j)}(x) Z_m^{(l)}(x)dx = 0, \quad k \neq m,\ j = 1,2;\ l = 1,2.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Система $\{Z_k^{(1)},\ Z_k^{(2)}\}$ полна в пространстве $L_2[-1,1]$.*

3. Единственность решения задачи *D*. Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \lambda_{k,n}^{i,j}$. Далее рассмотрим функции

$$u_k^{(1)}(y) = \int_{-1}^{1} u(x,y)Z_k^{(1)}(x)dx, \quad u_k^{(2)}(y) = \int_{-1}^{1} u(x,y)Z_k^{(2)}(x)dx, \tag{22}$$
$$k = 1,2,3,\ldots.$$

Вычислим вторую производную $\dfrac{d^2}{dy^2}\big(u_k^{(1)}(y)\big)$, преобразуем ее на основании равенства (1), затем после двукратного интегрирования по частям получим равенство

$$\operatorname{sgn} y \cdot (u_k^{(1)})''(y) + (\lambda - d)u_k^{(1)}(y) = 0,$$

совпадающее с уравнением (7). Таким образом, $u_k^{(1)}(y) \equiv Y_k^{(1)}(y)$, поэтому $u_k^{(1)}(y)$ определяются по формулам (14). Аналогичное справедливо и для функций $u_k^{(2)}(y)$, т.е. они определяются по формулам (15).

Тогда из граничных условий (5) и равенств (22) получим

$$\begin{cases} u_k^{(1)}(\beta) = \int_{-1}^{1} u(x,\beta) Z_k^{(1)}(x)dx = \int_{-1}^{1} \varphi(x) Z_k^{(1)}(x)dx = \varphi_k^{(1)}, \\ u_k^{(2)}(\beta) = \int_{-1}^{1} u(x,\beta) Z_k^{(2)}(x)dx = \int_{-1}^{1} \varphi(x) Z_k^{(2)}(x)dx = \varphi_k^{(2)}, \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} u_k^{(1)}(-\alpha) = \int_{-1}^{1} u(x,-\alpha) Z_k^{(1)}(x)dx = \int_{-1}^{1} \psi(x) Z_k^{(1)}(x)dx = \psi_k^{(1)}, \\ u_k^{(2)}(-\alpha) = \int_{-1}^{1} u(x,-\alpha) Z_k^{(2)}(x)dx = \int_{-1}^{1} \psi(x) Z_k^{(2)}(x)dx = \psi_k^{(2)}. \end{cases} \tag{24}$$

Тогда на основании (14), (15), (23) и (24) получим систему для нахождения неизвестных коэффициентов $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$:

$$\begin{cases} a_k^{(1)} \operatorname{ch}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda}) + b_k^{(1)} \operatorname{sh}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda}) = \varphi_k^{(1)}, \\ a_k^{(1)} \cos(\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda}) - b_k^{(1)} \sin(\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda}) = \psi_k^{(1)}, \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} a_k^{(2)} \cos(\beta\sqrt{\mu_k^2+\lambda}) + b_k^{(2)} \sin(\beta\sqrt{\mu_k^2+\lambda}) = \varphi_k^{(2)}, \\ a_k^{(2)} \operatorname{ch}(\alpha\sqrt{\mu_k^2+\lambda}) - b_k^{(2)} \operatorname{sh}(\alpha\sqrt{\mu_k^2+\lambda}) = \psi_k^{(2)}. \end{cases} \tag{26}$$

Если при всех $k \in \mathbb{N}$ определители систем (25) и (26), определяемые соотношениями (18) и (19), отличны от нуля, то эти системы однозначно разрешимы:

$$a_k^{(1)} = \frac{1}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)} \Big[\varphi_k^{(1)} \sin(\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda}) + \psi_k^{(1)} \operatorname{sh}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\Big],$$

$$b_k^{(1)} = \frac{1}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)} \Big[\varphi_k^{(1)} \cos(\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda}) - \psi_k^{(1)} \operatorname{ch}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\Big],$$

$$a_k^{(2)} = \frac{1}{\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)} \Big[\varphi_k^{(2)} \operatorname{sh}(\alpha\sqrt{\mu_k^2+\lambda}) + \psi_k^{(2)} \sin(\beta\sqrt{\mu_k^2+\lambda})\Big],$$

$$b_k^{(2)} = \frac{1}{\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)} \Big[\varphi_k^{(2)} \operatorname{ch}(\alpha\sqrt{\mu_k^2+\lambda}) - \psi_k^{(2)} \cos(\beta\sqrt{\mu_k^2+\lambda})\Big].$$

Тогда с учетом найденных значений $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$ функции $u_k^{(j)}(y)$ примут вид

$$u_k^{(1)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)} \Big[\varphi_k^{(1)} \cdot \Delta_k^{(1)}(\alpha,y) + \\ \qquad + \psi_k^{(1)} \cdot \operatorname{sh}\big((\beta-y)\sqrt{\mu_k^2-\lambda}\big)\Big], & y > 0, \\ \dfrac{1}{\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)} \Big[\varphi_k^{(1)} \cdot \sin\big((\alpha+y)\sqrt{\mu_k^2-\lambda}\big) + \\ \qquad + \psi_k^{(1)} \cdot \Delta_k^{(1)}(-y,\beta)\Big], & y < 0, \end{cases} \tag{27}$$

$$u_k^{(2)}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)}\Big[\varphi_k^{(2)}\cdot\Delta_k^{(2)}(\alpha,y)+\\ \qquad\qquad +\psi_k^{(2)}\cdot\sin\big((\beta-y)\sqrt{\mu_k^2+\lambda}\big)\Big], & y>0,\\ \dfrac{1}{\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)}\Big[\varphi_k^{(2)}\cdot\operatorname{sh}\big((\alpha+y)\sqrt{\mu_k^2+\lambda}\big)+\\ \qquad\qquad +\psi_k^{(2)}\cdot\Delta_k^{(2)}(-y,\beta)\Big], & y<0,\end{cases}\tag{28}$$

где

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha,y)=\cos(\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\operatorname{sh}(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda})+\sin(\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\operatorname{ch}(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda}),$$

$$\Delta_k^{(1)}(-y,\beta)=\cos(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\operatorname{sh}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda})-\sin(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\operatorname{ch}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda}),$$

$$\Delta_k^{(2)}(\alpha,y)=\operatorname{ch}(\alpha\sqrt{\mu_k^2+\lambda})\sin(y\sqrt{\mu_k^2+\lambda})+\operatorname{sh}(\alpha\sqrt{\mu_k^2+\lambda})\cos(y\sqrt{\mu_k^2+\lambda}),$$

$$\Delta_k^{(2)}(-y,\beta)=\operatorname{ch}(y\sqrt{\mu_k^2+\lambda})\sin(\beta\sqrt{\mu_k^2+\lambda})-\operatorname{sh}(y\sqrt{\mu_k^2+\lambda})\cos(\beta\sqrt{\mu_k^2+\lambda}).$$

Пусть $\varphi(x)=\psi(x)\equiv 0$ на $[-1,1]$, тогда на основании (23), (24), (27) и (28) получим

$$\int_{-1}^{1}u(x,y)Z_k^{(j)}(x)dx=0,\quad j=1,2,\ k=1,2,3,\dots.$$

Отсюда в силу полноты системы $\left\{Z_k^{(1)}(x);\ Z_k^{(2)}(x)\right\}$ в $L_2[-1,1]$ следует, что функция $u(x,y)=0$ при любом $y\in[-\alpha,\beta]$ почти всюду при $x\in[-1,1]$. А в силу непрерывности $u(x,y)$ в $\overline{D}$ будет $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, β и $k=p\in\mathbb{N}$ выполняется условие $\Delta_p^{(1)}(\alpha,\beta)=0$ или $\Delta_p^{(2)}(\alpha,\beta)=0$. Пусть, например, $\Delta_p^{(1)}(\alpha,\beta)=0$, а $\Delta_p^{(2)}(\alpha,\beta)\neq 0$. Тогда однородная задача (2)–(5), где $\varphi(x)=\psi(x)=0$, имеет нетривиальное решение:

$$u_p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin[\mu_p(x-1)]\Delta_p^{(1)}(\alpha,y)}{\cos\mu_p\cos(\alpha\sqrt{\mu_p^2-\lambda})}, & (x,y)\in D_1,\\ \dfrac{\sin[\mu_p(x-1)]\sin[(\alpha+y)\sqrt{\mu_p^2-\lambda}]}{\cos\mu_p\cos(\alpha\sqrt{\mu_p^2-\lambda})}, & (x,y)\in D_2,\\ \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_p(x+1)]\sin[(\alpha+y)\sqrt{\mu_p^2-\lambda}]}{\operatorname{ch}\mu_p\cos(\alpha\sqrt{\mu_p^2-\lambda})}, & (x,y)\in D_3,\\ \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_p(x+1)]\Delta_p^{(1)}(\alpha,y)}{\operatorname{ch}\mu_p\cos(\alpha\sqrt{\mu_p^2-\lambda})}, & (x,y)\in D_4.\end{cases}$$

Если при некотором $k=p\in\mathbb{N}$ имеем $\Delta_{k_0}^{(2)}(\alpha,\beta)=0$, то также существует нетривиальное решение задачи.

Естественно возникает вопрос об обращении определителей $\Delta_k^{(j)}(\alpha,\beta)$ в нуль. Представим их в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)=\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)=\sqrt{\operatorname{ch}\left(2\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda}\right)}\sin\left(\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda}+\xi_k\right),\\ \Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)=\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)=\sqrt{\operatorname{ch}\left(2\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda}\right)}\sin\left(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda}+\chi_k\right),\end{aligned}\tag{29}$$

$$\xi_k=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\left(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda}\right)\right),\quad \chi_k=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\left(\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda}\right)\right),$$

причем

$$\lim_{k\to\infty}\xi_k=\lim_{k\to\infty}\chi_k=\pi/4,$$

и для всех $k\in\mathbb{N}$ справедливы неравенства $\xi_k<\pi/4$, $\chi_k<\pi/4$. Отсюда найдем множества их нулей:

$$\alpha_{k,m}=\frac{\pi m-\xi_k}{\sqrt{\mu_k^2-\lambda}},\quad \beta_{k,t}=\frac{\pi t-\chi_k}{\sqrt{\mu_k^2-\lambda}},\quad m,\ t,\ k\in\mathbb{N}.\tag{30}$$

Равенства (30) представляют собой систему относительно $\alpha_{k,m}$ и $\beta_{k,t}$. Можно убедиться, что эта система совместна, причем существует счетное множество её решений (α,β).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2)–(5), *то оно единственно, только если для всех* $k\in\mathbb{N}$ *выполняются условия* $\Delta_k^{(j)}(\alpha,\beta)\neq 0$, $j=1,2$.

4. Обоснование существования решения. Из формул (27) и (28) видно, что выражения $\Delta_k^{(j)}(\alpha,\beta)$ являются знаменателями дробей и при значениях α, β, удовлетворяющих (30), могут обратиться в нуль, т.е. возникает проблема «малых знаменателей». Поэтому для обоснования существования решения задачи (2)–(5) необходимо показать существование чисел α и β таких, что при больших k выражения $\Delta_k^{(j)}(\alpha,\beta)$ отделены от нуля.

Лемма 4. *Если выполнено одно из следующих условий*:

1) α — *любое натуральное число, кроме чисел вида* $4p-3$, $p\in\mathbb{N}$,
2) α — *любое дробное число, т.е.* $\alpha=p/q$, *где* p, $q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$, *число* $q-p$ *не кратно* 4,

то существуют постоянная $C_{01}>0$ *и номер* $k_{01}\in\mathbb{N}$ *такие, что для всех* $k>k_{01}$ *справедлива оценка*

$$|\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)|\geqslant C_{01}e^{\pi k\beta}.\tag{31}$$

Доказательство. Оценим величину из (29):

$$\sqrt{\operatorname{ch}(2\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda})}\geqslant Ce^{\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda}}\geqslant\tilde{C}e^{\pi k\beta},$$

где $\tilde{C}$ — некоторая положительная постоянная.

Так как

$$\Big|\sin\Big(\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda}+\xi_k\Big)-\sin\Big(\alpha(-\frac{\pi}{4}+\pi k)+\frac{\pi}{4}\Big)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\Big|\alpha\Big(\sqrt{\mu_k^2-\lambda}+\frac{\pi}{4}-\pi k\Big)+\xi_k-\frac{\pi}{4}\Big|\leqslant\Big|\alpha(\pi k-\frac{\pi}{4}-\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\Big|=$$
$$=\alpha\Big|\frac{(\pi k-\pi/4)^2-\mu_k^2+\lambda}{\pi k-\pi/4+\sqrt{\mu_k^2-\lambda}}\Big|\leqslant M_{1\alpha}k\,e^{-2\pi k},\quad M_{1\alpha}>0,$$

можем оценить выражение

$$\Big|\sin\Big[\alpha\Big(-\frac{\pi}{4}+\pi k\Big)+\frac{\pi}{4}\Big]\Big|=|z_k|.$$

1) Пусть $\alpha\in\mathbb{N}$. Возможны три случая: $\alpha=2p$, $\alpha=4p-1$, $\alpha=4p-3$, $p\in\mathbb{N}$. В первых двух случаях имеем $|z_k|=\mathrm{const}>0$, а в третьем случае $|z_k|=0$.
2) Пусть $\alpha=p/q$, $p,q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$. Тогда

$$z_k=\sin\Big[\frac{\pi}{4}\Big(1-\frac{p}{q}\Big)+\pi\frac{kp}{q}\Big].$$

Разделим число kp на q с остатком: $kp=sq+r$, где $s,r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $0\leqslant r<q$. Тогда

$$z_k=\sin\frac{\pi(q-p+4r)}{4q}$$

и при условии, что $q-p$ не кратно 4, имеем $|z_k|=\mathrm{const}>0$. $\square$

Нетрудно показать, что если $\alpha=4p-3$, $p\in\mathbb{N}$, $p\geqslant 2$, то существуют постоянная $C'_{01}>0$ и номер $k'_{01}\in\mathbb{N}$ такие, что для всех $k>k'_{01}$ справедливы оценки

$$|\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)|\leqslant C'_{01}e^{-\pi k\beta}\quad\text{при }\ 0<\beta\leqslant 1,$$
$$|\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)|\leqslant C'_{01}e^{\pi k(\beta-2)}\quad\text{при }\ \beta>1.$$

Следовательно, приведенное в лемме 4 условие $\alpha\neq 4p-3$ является существенным. Аналогично можно показать существенность условия, что $q-p$ не кратно 4.

Лемма 5. *Если выполнено одно из следующих условий*:
1) β — *любое натуральное число, кроме чисел вида* $4p-3$, $p\in\mathbb{N}$,
2) β — *любое дробное число, т.е.* $\beta=p/q$, *где* $p,q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$, *число* $q-p$ *не кратно* 4,

то существуют постоянная $C_{02}>0$ *и номер* $k_{02}\in\mathbb{N}$ *такие, что для всех* $k>k_{02}$ *справедлива оценка*

$$|\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)|\geqslant C_{02}e^{\pi k\alpha}.\tag{32}$$

Если выполнены оценки (31), (32) и условия $\Delta_k^{(j)}(\alpha,\beta)\neq 0$ при $k\leqslant k_0=\max\{k_{01},k_{02}\}$, то решение задачи (2)–(5) можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{(1)}(y)X_k^{(1)}(x)+u_k^{(2)}(y)X_k^{(2)}(x).\tag{33}$$

Определим условия на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, при которых ряд (33) будет сходиться равномерно в области $\overline{D}$ и допускать почленное дифференцирование по x и y.

Рассмотрим следующие отношения:

$$P_k^{(j)}(y) = \frac{\Delta_k^{(j)}(\alpha, y)}{\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta)}, \quad Q_k^{(1)}(y) = \frac{\operatorname{sh}\left((\beta - y)\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}\right)}{\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)},$$

$$Q_k^{(2)}(y) = \frac{\sin\left((\beta - y)\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}\right)}{\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)}, \quad M_k^{(1)}(y) = \frac{\sin\left((\alpha + y)\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}\right)}{\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)},$$

$$M_k^{(2)}(y) = \frac{\operatorname{sh}\left((\alpha + y)\sqrt{\mu_k^2 + \lambda}\right)}{\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)}, \quad N_k^{(j)}(y) = \frac{\Delta_k^{(j)}(-y, \beta)}{\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta)},$$

где первые три выражения определены при $y > 0$, а последние три — при $y < 0$.

Лемма 6. *Пусть выполнены оценки* (31), (32) *при всех* $k > k_0$. *Тогда для таких* k *справедливы следующие оценки*:

$$|P_k^{(j)}(y)| \leqslant C_1^{(j)}, \quad |(P_k^{(j)}(y))'| \leqslant C_2^{(j)} k, \quad |(P_k^{(j)}(y))''| \leqslant C_3^{(j)} k^2,$$

$$|Q_k^{(1)}(y)| \leqslant C_4^{(1)}, \quad |(Q_k^{(1)}(y))'| \leqslant C_5^{(1)} k, \quad |(Q_k^{(1)}(y))''| \leqslant C_6^{(1)} k^2,$$

$$|Q_k^{(2)}(y)| \leqslant C_4^{(2)} e^{-\pi k \alpha}, \ |(Q_k^{(2)}(y))'| \leqslant C_5^{(2)} k e^{-\pi k \alpha}, \ |(Q_k^{(2)}(y))''| \leqslant C_6^{(2)} k^2 e^{-\pi k \alpha},$$

$$|M_k^{(1)}(y)| \leqslant C_7^{(1)} e^{-\pi k \beta}, \ |(M_k^{(1)}(y))'| \leqslant C_8^{(1)} k e^{-\pi k \beta}, \ |(M_k^{(1)}(y))''| \leqslant C_9^{(1)} k^2 e^{-\pi k \beta},$$

$$|M_k^{(2)}(y)| \leqslant C_7^{(2)}, \quad |(M_k^{(2)}(y))'| \leqslant C_8^{(2)} k, \quad |(M_k^{(2)}(y))''| \leqslant C_9^{(2)} k^2,$$

$$|N_k^{(j)}(y)| \leqslant C_{10}^{(j)}, \quad |(N_k^{(j)}(y))'| \leqslant C_{11}^{(j)} k, \quad |(N_k^{(j)}(y))''| \leqslant C_{12}^{(j)} k^2,$$

где $C_l^{(j)} > 0$, $j = 1, 2$, $l = \overline{1, 12}$.

Лемма 7. *При всех* $k > k_0$ *справедливы оценки*

$$|u_k^{(j)}(y)| \leqslant C_{13}^{(j)} (|\varphi_k^{(j)}| + |\psi_k^{(j)}|), \quad |(u_k^{(j)}(y))'| \leqslant C_{14}^{(j)} k (|\varphi_k^{(j)}| + |\psi_k^{(j)}|),$$

$$|(u_k^{(j)}(y))''| \leqslant C_{15}^{(j)} k^2 (|\varphi_k^{(j)}| + |\psi_k^{(j)}|), \quad y \in [-\alpha, \beta],$$

где $C_l^{(j)} > 0$, $j = 1, 2$, $l = \overline{13, 15}$.

В силу леммы 7 ряд (33) и его первые производные в $\overline{D}$, а вторые производные в $\overline{D_i}$, $i = \overline{1, 4}$, по абсолютной величине мажорируются рядом

$$C \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|\varphi_k^{(1)}| + |\psi_k^{(1)}| + |\varphi_k^{(2)}| + |\psi_k^{(2)}|), \quad C = \mathrm{const} > 0.$$

Лемма 8. *Если функции* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^1[-1,1] \cap C^3[-1,0] \cap C^3[0,1]$ *и на этом сегменте имеют кусочно-непрерывную производную четвертого порядка, причем*

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = \varphi''(-1) = \varphi''(1) = 0,$$

$$\psi(-1) = \psi(1) = \psi''(-1) = \psi''(1) = 0,$$

$$\varphi''(0+0) = -\varphi''(0-0),$$

$$\varphi'''(0+0) = -\varphi'''(0-0),$$

$$\psi''(0+0) = -\psi''(0-0),$$

$$\psi'''(0+0) = -\psi'''(0-0),$$

то справедливы соотношения

$$\varphi_k^{(1)} = \frac{p_k^{(1)}}{\mu_k^4}, \qquad \varphi_k^{(2)} = \frac{p_k^{(2)}}{\mu_k^4}, \qquad \psi_k^{(1)} = \frac{q_k^{(1)}}{\mu_k^4}, \qquad \psi_k^{(2)} = \frac{q_k^{(2)}}{\mu_k^4},$$

где

$$p_k^{(1)} = \int_{-1}^{1} \varphi^{(4)}(x) Z_k^{(1)}(x) dx, \quad p_k^{(2)} = \int_{-1}^{1} \varphi^{(4)}(x) Z_k^{(2)}(x) dx,$$

$$q_k^{(1)} = \int_{-1}^{1} \psi^{(4)}(x) Z_k^{(1)}(x) dx, \quad q_k^{(2)} = \int_{-1}^{1} \psi^{(4)}(x) Z_k^{(2)}(x) dx.$$

Для доказательства следует проинтегрировать по частям четыре раза интегралы в равенствах (23) и (24).

Можно показать, что для системы $\left\{Z_k^{(1)}; Z_k^{(2)}\right\}$ справедливо неравенство Бесселя, и так как $\varphi^{(4)}(x)$ и $\psi^{(4)}(x)$ кусочно-непрерывны, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty}(p_k^{(j)})^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty}(q_k^{(j)})^2$ сходятся. Тогда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\big(|p_k^{(1)}| + |q_k^{(1)}| + |p_k^{(2)}| + |q_k^{(2)}|\big),$$

откуда следует равномерная сходимость ряда (33) и рядов, полученных дифференцированием по переменным x и y в $\overline{D}$, а ряды из производных второго порядка сходятся в замкнутых областях D_i, $i = \overline{1,4}$.

Если при указанных в леммах 4 и 5 числах α и β и некоторых $k = k_1$, $k_2, \ldots, k_l$, где $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_l \leqslant k_0$, одно из выражений $\Delta_k^{(j)}(\alpha,\beta) = 0$ (пусть для определенности $\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta) = 0$, $\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta) \neq 0$ при этих k_i), то для разрешимости системы (16) относительно $a_k^{(1)}$ и $b_k^{(1)}$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$\varphi_{k_i}^{(1)} \cos(\alpha\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}) = \psi_{k_i}^{(1)} \operatorname{ch}(\beta\sqrt{\mu_k^2 - \lambda}), \quad i = \overline{1,l}. \tag{34}$$

Тогда при $k=k_1,k_2,\dots,k_l$ получим

$$\tilde u_k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}\Big(\operatorname{ch}(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda})+\\ \qquad+\dfrac{\varphi_k^{(1)}-\operatorname{ch}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda})}{\operatorname{sh}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda})}\operatorname{sh}(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\Big), & (x,y)\in D_1,\\ \dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}\Big(\cos(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda})+\\ \qquad+\dfrac{\varphi_k^{(1)}-\operatorname{ch}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda})}{\operatorname{sh}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda})}\sin(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\Big), & (x,y)\in D_2,\\ \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}\Big(\cos(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda})+\\ \qquad+\dfrac{\varphi_k^{(1)}-\operatorname{ch}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda})}{\operatorname{sh}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda})}\sin(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\Big), & (x,y)\in D_3,\\ \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}\Big(\operatorname{ch}(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda})+\\ \qquad+\dfrac{\varphi_k^{(1)}-\operatorname{ch}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda})}{\operatorname{sh}(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda})}\operatorname{sh}(y\sqrt{\mu_k^2-\lambda})\Big), & (x,y)\in D_4.\end{cases}$$

Поэтому решение задачи (2)–(5) в этом случае определяется в виде суммы ряда

$$u(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}+\dots+\sum_{k=k_l+1}^{\infty}\right)u_k^{(1)}(y)X_k^{(1)}(x)+\\ +\sum_{k=k_1,k_2,\dots,k_l}A_k\tilde u_k(x,y)+\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{(2)}(y)X_k^{(2)}(x),\quad (35)$$

где A_k — произвольные коэффициенты, причем конечные суммы следует считать равными нулю, если нижний предел суммирования больше верхнего.

Аналогичное решение строится в случае, когда при некоторых k будет $\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)=0$, $\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)\neq 0$, или если оба знаменателя обращаются в нуль.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 8 и выполнены оценки (31), (32) при $k>k_0$. Тогда если при указанных в леммах 4 и 5 значениях α и β при всех $k=\overline{1,k_0}$ выполнены условия $\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)\neq 0$, $\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)\neq 0$, то существует единственное решение задачи Дирихле (2)–(5) и оно определяется рядом (33).*

Если $\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)=0$ при некоторых $k=k_1,\ k_2,\dots,k_l\leqslant k_0$, то задача (2)–(5) разрешима только тогда, когда выполнены условия (34), и решение определяется в виде суммы ряда (35).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14–01–97003-р_Поволжье_а).

ORCID
Альфира Авкалевна Гималтдинова: http://orcid.org/0000-0001-7535-213X

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гималтдинова А. А. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями перехода в прямоугольной области / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 120–121.
2. Сабитов К. Б., Биккулова Г. Г., Гималтдинова А. А. *К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа*. Уфа: Гилем, 2006. 150 с.
3. Rassias J. M. The Exterior Tricomi and Frankl Problems for Quaterelliptic-Quaterhyperbolic Equations with Eight Parabolic Lines // *Eur. J. Pure Appl. Math.*, 2011. vol. 4, no. 2. pp. 186–208, http://www.ejpam.com/index.php/ejpam/article/view/1175/195.
4. Франкль Ф. И. *Избранные труды по газовой динамике*. М.: Наука, 1973. 711 с.
5. Бицадзе А. В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // *ДАН СССР*, 1958. Т. 122, № 2. С. 167–170.
6. Шабат Б. В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // *ДАН СССР*, 1957. Т. 112, № 3. С. 386–389.
7. Cannon J. R. A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient // *Annali di Matematica*, 1963. vol. 61, no. 1. pp. 371–377. doi: 10.1007/bf02410656.
8. Нахушев А. М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // *Диффер. уравн.*, 1970. Т. 6, № 1. С. 190–191.
9. Хачев М. М. О задаче Дирихле для одного уравнения смешанного типа // *Диффер. уравн.*, 1976. Т. 12, № 1. С. 137–143.
10. Солдатов А. П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. I: Теоремы единственности // *Докл. РАН*, 1993. Т. 332, № 6. С. 696–698.
11. Солдатов А. П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. II: Теоремы существования // *Докл. РАН*, 1993. Т. 333, № 1. С. 16–18.
12. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // *Докл. РАН*, 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
13. Сабитов К. Б., Вагапова Э. В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // *Диффер. уравн.*, 2013. Т. 49, № 1. С. 68–78.
14. Ильин В. А. Единственность и принадлежность W_2^1 классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения // *Матем. заметки*, 1975. Т. 17, № 1. С. 91–101.
15. Арнольд В. И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1961. Т. 25, № 1. С. 21–86; Арнольд В. И. Исправления к работе В. Арнольда “Малые знаменатели. I” // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1964. Т. 28, № 2. С. 479–480.
16. Ломов И. С. Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений // *Диффер. уравн.*, 1993. Т. 29, № 12. С. 2079–2089.

Поступила в редакцию 19/XII/2014;
в окончательном варианте — 20/II/2015;
принята в печать — 08/IV/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 634–649

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1384

MSC: 35M12

THE DIRICHLET PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH TWO LINES OF DEGENERACY IN A RECTANGULAR AREA*

A. A. Gimaltdinova

Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
49, Lenin Avenue, Sterlitamak, 453103, Russian Federation.

Abstract

We study the first boundary value problem for the elliptic-hyperbolic type equation with two perpendicular lines of change of type and spectral parameter. We prove the existence and uniqueness of the solution. In the proof of the uniqueness of solution we use the completeness of biorthogonal system in space L_2. When building a solution as the sum of a series there is a problem of small denominators. We obtained estimates of the denominators of the separation from zero.

Keywords: mixed type equation, Dirichlet problem, uniqueness, existence of a solution, spectral method.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1384

Acknowledgments. This work has been supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14–01–97003-r_Povolzh'e_a).

ORCID
Alfira A. Gimaltdinova: http://orcid.org/0000-0001-7535-213X

REFERENCES

1. Gimaltdinova A. A. The Dirichlet problem for mixed type equation with two lines of degeneracy in a rectangular area, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 120–121 (In Russian).
2. Sabitov K. B., Bikkulova G. G., Gimaltdinova A. A. *K teorii uravnenii smeshannogo tipa s dvumia liniiami izmeneniia tipa* [On the Theory of Mixed Type Equations with Two Lines of Change of Type]. Ufa, Gilem, 2006, 150 pp. (In Russian)

Please cite this article in press as:
G i m a l t d i n o v a A. A. The Dirichlet problem for mixed type equation with two lines of degeneracy in a rectangular area, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 634–649. doi: 10.14498/vsgtu1384. (In Russian)

Author Details:
Alfira A. Gimaltdinova (Cand. Phys. & Math. Sci.; alfiragimaltdinova@mail.ru), Associate Professor, Dept. of Mathematical Analysis).

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

3. Rassias J. M. The Exterior Tricomi and Frankl Problems for Quaterelliptic-Quaterhyperbolic Equations with Eight Parabolic Lines, *Eur. J. Pure Appl. Math.*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 186–208, http://www.ejpam.com/index.php/ejpam/article/view/1175/195.
4. Frankl F. I. *Izbrannye trudy po gazovoi dinamike* [Selected Works in Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1973, 711 pp. (In Russian)
5. Bitsadze A. V. Incorrectness of Dirichlet's problem for the mixed type of equations in mixed regions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 122, no. 2, pp. 167–170 (In Russian).
6. Shabat B. V. Examples of solving the Dirichlet problem for equations of mixed type, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1957, vol. 112, no. 3, pp. 386–389 (In Russian).
7. Cannon J. R. A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient, *Annali di Matematica*, 1963, vol. 61, no. 1, pp. 371–377. doi: 10.1007/bf02410656.
8. Nakhushev A. M. A criterion for uniqueness of the Dirichlet problem for a mixed-type equation in the cylindrical domain, *Differ. Uravn.*, 1970, vol. 6, no. 1, pp. 190–191 (In Russian).
9. Khachev M. M. On the Dirichlet Problem for an Equation of Mixed Type, *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 137–143 (In Russian).
10. Soldatov A. P. Dirichlet-type problems for the Lavrent'ev–Bitsadze equation. I. Uniqueness theorems, *Dokl. Math.*, 1994, vol. 48, no. 2, pp. 410–414.
11. Soldatov A. N. Dirichlet-type problems for the Lavrent'ev–Bitsadze equation. II. Existence theorems, *Dokl. Math.*, 1994, vol. 48, no. 3, pp. 433–437.
12. Sabitov K. B. The Dirichlet problem for equations of mixed type in a rectangular domain, *Dokl. Math.*, 2007, vol. 75, no. 2, pp. 193–196. doi: 10.1134/S1064562407020056.
13. Sabitov K. B., Vagapova E. V. Dirichlet problem for an equation of mixed type with two degeneration lines in a rectangular domain, *Differ. Equ.*, 2013, vol. 49, no. 1, pp. 68–78. doi: 10.1134/s0012266113010072.
14. Il'in V. A. Proof of uniqueness and membership in W_2^1 of the classical solution of a mixed problem for a self-adjoint hyperbolic equation, *Math. Notes*, 1975, vol. 17, no. 1, pp. 53–58. doi: 10.1007/BF01093843.
15. Arnol'd V. I. Small denominators. I. Mapping the circle onto itself, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1961, vol. 25, no. 1, pp. 21–86 (In Russian) ; Arnol'd V. Correction to V. Arnol'd's paper: "Small denominators. I.", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1964, vol. 28, no. 2, pp. 479–480 (In Russian).
16. Lomov I. S. Small denominators in analytic theory of degenerate differential equations, *Differ. Equ.*, 1993, vol. 29, no. 12, pp. 1811–1820.

Received 19/XII/2014;
received in revised form 20/II/2015;
accepted 08/IV/2015.