



УДК 517.958:539.1; 539.184.26

СВЕРХТОНКАЯ СТРУКТУРА S -СОСТОЯНИЙ
МЮОННОГО ДЕЙТЕРИЯ*А. П. Мартыненко^{1,2}, Г. А. Мартыненко¹,
В. В. Сорокин¹, Р. Н. Фаустов³¹ Самарский государственный университет,
Россия, 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.² Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет),
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.³ Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук,
Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, 40.

Аннотация

В рамках квазипотенциального метода в квантовой электродинамике вычислены поправки порядка α^5 и α^6 в сверхтонкой структуре S -состояний мюонного дейтерия. Учтены релятивистские поправки, эффекты поляризации вакуума в первом, втором и третьем порядках теории возмущений, эффекты структуры и поправки на отдачу. Полученные численные значения сверхтонких расщеплений $\Delta E^{hfs}(1S) = 50.2814$ meV ($1S$ -состояние) и $\Delta E^{hfs}(2S) = 6.2804$ meV ($2S$ -состояние) можно использовать для сравнения с будущими экспериментальными данными коллаборации CREMA. Интервал сверхтонкой структуры $\Delta_{12} = 8\Delta E^{hfs}(2S) - \Delta E^{hfs}(1S) = -0.0379$ meV можно использовать для прецизионной проверки квантовой электродинамики.

Ключевые слова: квантовая электродинамика, сверхтонкая структура, квазипотенциальный метод.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1381>

© 2015 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования

Мартыненко А. П., Мартыненко Г. А., Сорокин В. В., Фаустов Р. Н. Сверхтонкая структура S -состояний мюонного дейтерия // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 3. С. 474–488. doi: [10.14498/vsgtu1381](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1381).

Сведения об авторах

Алексей Петрович Мартыненко (д.ф.-м.н., проф.; a.p.martynenko@samsu.ru; автор, ведущий переписку), профессор, каф. общей и теоретической физики¹; профессор, каф. физики².

Григорий Алексеевич Мартыненко, студент, каф. общей и теоретической физики.

Вячеслав Вадимович Сорокин (wvs63rus@yandex.ru), студент, каф. общей и теоретической физики.

Рудольф Николаевич Фаустов (д.ф.-м.н., проф.; faustov@theory.sinp.msu.ru), руководитель сектора, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление».

* Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного авторами на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа — 1 сентября 2014).

В последние годы значительный интерес в исследовании тонкой и сверхтонкой структуры простейших атомов связан с легкими мюонными атомами: мюонный водород, мюонный дейтерий, ионы мюонного гелия. Это обусловлено существенным прогрессом, достигнутым экспериментальной коллаборацией CREMA (Charge Radius Experiment with Muonic Atoms) при изучении таких мюонных атомов [2, 3]. Так, например, из измерения частоты перехода $2P_{3/2}^{F=2} - 2S_{1/2}^{F=1}$ в мюонном водороде было получено новое более точное значение зарядового радиуса протона $r_p = 0.84087(39)$ фм. Измерение частоты перехода $2P_{3/2}^{F=1} - 2S_{1/2}^{F=0}$ для синглетного $2S$ -состояния позволило найти сверхтонкое расщепление уровня энергии $2S$ в мюонном водороде, значения радиуса Земаха $r_Z = 1.082(37)$ фм и магнитного радиуса $r_M = 0.87(6)$ фм. Аналогичные измерения для мюонного дейтерия уже выполнены и готовятся к публикации. Необходимо подчеркнуть, что эксперименты коллаборации CREMA ставят одну очень важную задачу — улучшить на порядок точность определения зарядовых радиусов протона, дейтрона, гелиона и альфа-частицы, которые входят в теоретические выражения различных интервалов тонкой и сверхтонкой структуры. Для успешной реализации этой программы необходимы теоретические вычисления поправок различного порядка в тонкой и сверхтонкой структуре спектра энергии мюонных атомов [4–15]. Особый интерес могут представлять поправки на структуру ядра, с которыми может быть связано решение загадки радиуса протона [2, 16].

Теоретические исследования энергетической структуры мюонных атомов были выполнены в [4–15] на основе уравнения Дирака и в нерелятивистском подходе при помощи теории возмущений в квантовой электродинамике. В связи с экспериментальной активностью в последние годы появилась необходимость в анализе ранее выполненных вычислений с целью получить надежную оценку энергетических интервалов: лэмбовского сдвига ($2P_{1/2} - 2S_{1/2}$), сверхтонкой структуры $2S$ -состояния, тонкой структуры ($2P_{1/2} - 2P_{3/2}$), которые измеряются в экспериментах коллаборации CREMA. Цель нашей работы состоит в расчете поправок порядка α^5 and α^6 в сверхтонкой структуре мюонного дейтерия, которые определяются эффектами поляризации вакуума, отдачи, релятивистскими поправками и поправкам на структуру дейтрона. Современные значения фундаментальных физических констант взяты из [17].

В нашем расчете мы используем квазипотенциальный метод в квантовой электродинамике [18], в котором двухчастичное связанное состояние описывается уравнением Шредингера. Основной вклад в оператор взаимодействия мюона и дейтрона в S -состоянии определяется гамильтонианом Брейта [19]:

$$H_B = H_0 + \Delta V_B^{fs} + \Delta V_B^{hfs}, \quad H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{Z\alpha}{r},$$

$$\Delta V_B^{fs} = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m_1^3} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m_2^3} + \frac{\pi Z\alpha}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{\delta_I}{m_2^2} \right) \delta(\mathbf{r}) - \frac{Z\alpha}{2m_1 m_2 r} \left(\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{p})\mathbf{p}}{r^2} \right),$$

$$\Delta V_B^{hfs}(r) = \frac{2\pi\alpha}{3m_1 m_p} g_d g_\mu (\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) \delta(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где m_1 , m_2 — массы мюона и дейтрона соответственно, m_p — масса протона, g_d , g_μ — гиромагнитные факторы дейтрона и мюона. Основной вклад в

сверхтонкое расщепление S -уровней (энергия Ферми) дает потенциал спин-спинового взаимодействия (1). Усредняя (1) по кулоновским волновым функциям $1S$ - и $2S$ -состояний, получим основной вклад в энергию сверхтонкого расщепления в мюонном дейтерии:

$$E_F(nS) = \frac{2\mu^3\alpha^4\mu_d}{m_1m_p n^3} = \begin{cases} 1S : 49.0875 \text{ meV}, \\ 2S : 6.1359 \text{ meV}. \end{cases}$$

Поправку на аномальный магнитный момент мюона (АММ) удобно представить отдельно, взяв экспериментальное значение АММ мюона из [17]:

$$\Delta E_{a_\mu}^{hfs}(nS) = a_\mu E_F(nS) = \begin{cases} 1S : 0.0572 \text{ meV}, \\ 2S : 0.0072 \text{ meV}. \end{cases}$$

Релятивистская поправка порядка α^6 в сверхтонкой структуре может быть получена при помощи аналитического выражения из [20]:

$$\Delta E_{rel}^{hfs}(nS) = \begin{cases} \frac{3}{2}(Z\alpha)^2 E_F(1S) \\ \frac{17}{8}(Z\alpha)^2 E_F(2S) \end{cases} = \begin{cases} 1S : 0.0039 \text{ meV}, \\ 2S : 0.0007 \text{ meV}. \end{cases}$$

Важный класс поправок представляют поправки на поляризацию вакуума в первом, втором и третьем порядках теории возмущений (ТВ). Вначале рассмотрим вклад однопетлевой электронной поляризации вакуума в сверхтонкую структуру S -состояний, который определяется следующим потенциалом [5, 19]:

$$\Delta V_{1\gamma,VP}^{hfs}(r) = \frac{4\alpha\mu_d(1+a_\mu)}{3m_1m_p} (\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2) \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(s) ds \left(\pi\delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2\xi^2}{r} e^{-2m_e\xi r} \right). \quad (2)$$

Мы также сохраняем фактор с АММ мюона, что приводит к учету поправки порядка α^6 . Усредняя (2) по волновым функциям, мы получаем поправку порядка α^5 в сверхтонкой структуре $1S$ - и $2S$ -состояний:

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma,VP}^{hfs}(1S) &= \frac{2\mu^3\alpha^5\mu_d(1+a_\mu)}{3m_1m_p\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \left[1 - \frac{m_e^2\xi^2}{W^2} \int_0^\infty x dx e^{-x(1+\frac{m_e\xi}{W})} \right] = 0.1039 \text{ meV}, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma,VP}^{hfs}(2S) &= \frac{\mu^3\alpha^5\mu_d(1+a_\mu)}{3m_1m_p\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \left[1 - \frac{4m_e^2\xi^2}{W^2} \int_0^\infty x \left(1 - \frac{x}{2} \right)^2 dx e^{-x(1+\frac{2m_e\xi}{W})} \right] = 0.0134 \text{ meV}. \quad (4) \end{aligned}$$

Заменяя массу электрона m_e на массу мюона m_1 в (3) и (4), получим вклад мюонной поляризации вакуума: 0.0009 meV ($1S$), 0.0001 meV ($2S$). Поправка мюонной поляризации вакуума имеет более высокий порядок α^6 из-за $W/m_1 \ll 1$. Тот же порядок α^6 дают и поправки двухпетлевой поляризации

вакуума. Потенциал двухпетлевой поляризации вакуума с двумя последовательными петлями имеет следующий вид:

$$\Delta V_{1\gamma,VP-VP}^{hfs}(r) = \frac{8\pi\alpha\mu_d(1+a_\mu)}{3m_1m_p}(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2) \left(\frac{\alpha}{3\pi}\right)^2 \int_1^\infty \rho(\xi)d\xi \int_1^\infty \rho(\eta)d\eta \times \\ \times \left[\delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2}{\pi r(\eta^2 - \xi^2)} \left(\eta^4 e^{-2m_e\eta r} - \xi^4 e^{-2m_e\xi r} \right) \right].$$

Соответствующая поправка в сверхтонкую структуру $1S$ и $2S$ может быть представлена в интегральной форме с интегрированием по координате r и спектральным параметрам ξ и η . Интегрирование по r может быть проведено аналитически, оставшиеся интегралы вычисляются численно при помощи системы **Mathematica**. Двухпетлевые поправки порядка α^6 с двумя вложенными петлями вычисляются аналогично. В этом случае потенциал мюон-дейтронного взаимодействия определяется выражением

$$\Delta V_{1\gamma,2-loop VP}^{hfs}(r) = \frac{8\alpha^3\mu_d(1+a_\mu)}{9\pi^2m_1m_p}(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2) \int_0^1 \frac{f(v)dv}{1-v^2} \times \\ \times \left[\pi\delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2}{r(1-v^2)} e^{-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}} \right],$$

где $f(v)$ — двухпетлевая спектральная функция [21]. Однопетлевые и двухпетлевые поправки порядка α^5 и α^6 должны быть также рассмотрены во втором порядке теории возмущений.

Во втором порядке ТВ поправки определяются редуцированной кулоновской функцией Грина \tilde{G} , которая имеет следующее парциальное разложение:

$$\tilde{G}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \tilde{g}_{nl}(r, r') Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}').$$

Радиальная функция $\tilde{g}_{nl}(r, r')$ была получена в [22] в виде штурмовского разложения по полиномам Лаггера. Основной вклад электронной поляризации вакуума в сверхтонкой структуре во втором порядке ТВ имеет вид

$$\Delta E_{SOPT VP 1}^{hfs} = 2 \left\langle \psi \left| \Delta V_{VP}^C \cdot \tilde{G} \cdot \Delta V_B^{hfs} \right| \psi \right\rangle,$$

где модифицированный кулоновский потенциал

$$\Delta V_{VP}^C(r) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi)d\xi \left(-\frac{Z\alpha}{r} \right) e^{-2m_e\xi r}.$$

Потенциал $\Delta V_B^{hfs}(r)$ пропорционален $\delta(\mathbf{r})$, поэтому необходимо использовать редуцированную кулоновскую функцию Грина с одним нулевым аргументом. Для этого случая она была получена в представлении Хостлера после вычитания полюсного члена в следующем виде [22]:

$$\tilde{G}_{1S}(\mathbf{r}, 0) = \frac{Z\alpha\mu^2}{4\pi} \frac{e^{-x}}{x} g_{1S}(x), \\ g_{1S}(x) = [4x(\ln 2x + C) + 4x^2 - 10x - 2], \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{2S}(\mathbf{r}, 0) &= -\frac{Z\alpha\mu^2}{4\pi} \frac{e^{-x/2}}{2x} g_{2S}(x), \\ g_{2S}(x) &= [4x(x-2)(\ln x + C) + x^3 - 13x^2 + 6x + 4],\end{aligned}\quad (6)$$

где $C = 0.5772\dots$ постоянная Эйлера, $x = Wr$. В результате необходимая поправка к сверхтонкой структуре (μd) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta E_{VP1}^{hfs}(1S) &= -E_F(1S) \frac{\alpha}{3\pi} (1 + a_\mu) \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\quad \times \int_0^\infty e^{-x(1+\frac{m_e\xi}{W})} g_{1S}(x) dx = 0.2056 \text{ meV},\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}\Delta E_{VP1}^{hfs}(2S) &= E_F(2S) \frac{\alpha}{3\pi} (1 + a_\mu) \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\quad \times \int_0^\infty e^{-x(1+\frac{2m_e\xi}{W})} g_{2S}(x) (1 - \frac{x}{2}) dx = 0.0207 \text{ meV}.\end{aligned}\quad (8)$$

Фактор $(1 + a_\mu)$ включен в (7) и (8), поэтому эти выражения содержат поправки порядка α^5 и α^6 . Заменой $m_e \rightarrow m_1$ в (7), (8) мы вычисляем вклад однопетлевой мюонной поляризации вакуума во втором порядке ТВ порядка α^6 : 0.0009 meV (1S), 0.0001 meV (2S). Двухпетлевые поправки во втором порядке ТВ имеют порядок α^6 . Удобное представление для редуцированной кулоновской функции Грина с двумя ненулевыми аргументами было получено в [22]:

$$\tilde{G}_{1S}(r, r') = -\frac{Z\alpha\mu^2}{\pi} e^{-(x_1+x_2)} g_{1S}(x_1, x_2),$$

$$g_{1S}(x_1, x_2) = \frac{1}{2x_<} - \ln 2x_> - \ln 2x_< + Ei(2x_<) + \frac{7}{2} - 2C - (x_1 + x_2) + \frac{1 - e^{2x_<}}{2x_<},$$

$$\tilde{G}_{2S}(r, r') = -\frac{Z\alpha\mu^2}{16\pi x_1 x_2} e^{-(x_1+x_2)} g_{2S}(x_1, x_2),$$

$$\begin{aligned}g_{2S}(x_1, x_2) &= 8x_< - 4x_<^2 + 8x_> + 12x_<x_> - 26x_<^2x_> + \\ &\quad + 2x_<^3x_> - 4x_>^2 - 26x_<x_>^2 + 23x_<^2x_>^2 - x_<^3x_>^2 + 2x_<x_>^3 - x_<^2x_>^3 + \\ &\quad + 4e^x(1-x_<)(x_>-2)x_> + 4(x_<-2)x_<(x_>-2)x_> [-2C + Ei(x_<) - \ln(x_<) - \ln(x_>)].\end{aligned}$$

Вклады трех других диаграмм в сверхтонкую структуру могут быть вычислены с использованием следующих потенциалов [23]:

$$\begin{aligned}\Delta V_{VP-VP}^C(r) &= \left(\frac{\alpha}{3\pi}\right)^2 \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \left(-\frac{Z\alpha}{r}\right) \times \\ &\quad \times \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left(\xi^2 e^{-2m_e\xi r} - \eta^2 e^{-2m_e\eta r}\right),\end{aligned}$$

$$\Delta V_{2-loop VP}^C(r) = -\frac{2Z\alpha^3}{3\pi^2 r} \int_0^1 \frac{f(v)dv}{(1-v^2)} e^{-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}}.$$

Поправку порядка α^6 к сверхтонкой структуре дает также поляризация вакуума в третьем порядке теории возмущений [24].

Основной вклад структуры ядра в сверхтонкую структуру S -состояний определяется двухфотонными обменными диаграммами. Параметризация электромагнитного тока дейтрона имеет вид

$$J_d^\mu(p_2, q_2) = \varepsilon_\rho^*(q_2) \left\{ \frac{(p_2 + q_2)_\mu}{2m_2} g_{\rho\sigma} F_1(k^2) - \frac{(p_2 + q_2)_\mu}{2m_2} \frac{k_\rho k_\sigma}{2m_2^2} F_2(k^2) - \Sigma_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \frac{k^\nu}{2m_2} F_3(k^2) \right\} \varepsilon_\sigma(p_2),$$

где p_2, q_2 — 4-импульсы дейтрона в конечном и начальном состояниях, $k = p_2 - q_2$. Вектор поляризации дейтрона ε_μ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) \varepsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'}, \quad k_\mu \varepsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) = 0,$$

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) \varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_2^2}.$$

Генератор инфинитезимальных преобразований Лоренца имеет вид

$$\Sigma_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = g_\rho^\mu g_\sigma^\nu - g_\sigma^\mu g_\rho^\nu.$$

Электромагнитные формфакторы дейтрона $F_i(k^2)$ зависят от квадрата 4-импульса фотона. Они связаны с зарядовым F_C , магнитным F_M и квадрупольным F_Q формфакторами дейтрона следующим образом:

$$F_C = F_1 + \frac{2}{3}\eta [F_1 + (1 + \eta)F_2 - F_3],$$

$$F_M = F_3, \quad F_Q = F_1 + (1 + \eta)F_2 - F_3, \quad \eta = -\frac{k^2}{4m_2^2}.$$

Электромагнитный ток мюона имеет вид

$$J_l^\mu(p_1, q_1) = \bar{u}(q_1) \left[\frac{(p_1 + q_1)^\mu}{2m_1} - (1 + a_\mu) \sigma^{\mu\nu} \frac{k_\nu}{2m_1} \right] u(p_1),$$

где p_1, q_1 — начальный и конечный 4-импульсы мюона, $\sigma^{\mu\nu} = (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)/2$. Амплитуды виртуального комптоновского рассеяния мюона и дейтрона могут тогда быть представлены в виде [25]

$$M_{\mu\nu}^{(l)} = \bar{u}(q_1) \left[\gamma_\mu \frac{\hat{p}_1 + \hat{k} + m_1}{(p_1 + k)^2 - m_1^2} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + m_1}{(p_1 - k)^2 - m_1^2} \gamma_\mu \right] u(p_1), \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 M_{\mu\nu}^{(d)} = & \varepsilon_\rho^*(q_2) \left[\frac{(q_2 + p_2 - k)_\mu}{2m_2} g_{\rho\lambda} F_1 - \frac{(q_2 + p_2 - k)_\mu}{2m_2} \frac{k_\rho k_\lambda}{2m_2^2} F_2 - \Sigma_{\rho\lambda}^{\mu\alpha} \frac{k_\alpha}{2m_2} F_3 \right] \times \\
 & \times \frac{-g_{\lambda\omega} + \frac{(p_2 - k)_\lambda (p_2 - k)_\omega}{m_2^2}}{(p_2 - k)^2 - m_2^2} \left[\frac{(p_2 + q_2 - k)_\nu}{2m_2} g_{\omega\sigma} F_1 - \frac{(p_2 + q_2 - k)_\nu}{2m_2} \frac{k_\omega k_\sigma}{2m_2^2} F_2 + \right. \\
 & \left. + \Sigma_{\omega\sigma}^{\nu\beta} \frac{k_\beta}{2m_2} F_3 \right] \varepsilon_\sigma(p_2). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Для построения потенциала сверхтонкого взаимодействия по амплитуде мы используем проекционные операторы $\hat{\pi}_{\mu,3/2}$ и $\hat{\pi}_{\mu,1/2}$ на состояния мюон-нейтронной пары со спином 3/2 и 1/2. Перемножая амплитуды (9) и (10) и применяя проекционные операторы, с помощью пакета Form [26] мы получаем выражение для сверхтонкой части потенциала двухфотонного взаимодействия в кулоновской калибровке для обменных фотонов [25]:

$$\begin{aligned}
 V_{2\gamma, str}^{hfs} = & (Z\alpha)^2 \int \frac{id^4k}{\pi^2} \frac{1}{(k^2)^2} \frac{1}{k^4 - 4k_0^2 m_1^2} \frac{1}{k^4 - 4k_0^2 m_2^2} \times \\
 & \times \left\{ 2F_1 F_3 k^6 \left(\frac{k^2}{m_2^2} - \frac{\mathbf{k}^2}{m_2^2} - 4 \right) + 2F_2 F_3 \frac{k^4}{m_2^2} \left(4k_0^4 + \mathbf{k}^4 - 4\mathbf{k}^2 k_0^2 - \frac{k^6}{m_2^2} \right) + \right. \\
 & \left. + 2F_3^2 k^2 \mathbf{k}^2 \left(k_0^2 + \frac{k^4}{m_2^2} \right) \right\}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Инфракрасная расходимость при $k \rightarrow 0$ связана со слагаемым $\sim F_1 F_3 k^2$. Она может быть устранена с помощью итерационного слагаемого квазипотенциала

$$\Delta V_{iter}^{hfs} = \left[V_{1\gamma} \times G^f \times V_{1\gamma} \right]^{HFS} = E_F \frac{16\mu\alpha}{3\pi n^3} (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2) \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} F_1 F_3. \quad (12)$$

Интегрирование по углам в (11) в евклидовом импульсном пространстве можно выполнить аналитически. В результате вклад двухфотонных амплитуд в сверхтонкое расщепление S -уровня представляется в виде одномерного интеграла

$$\begin{aligned}
 E_{2\gamma}^{hfs} = & E_F \alpha \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} V_{2\gamma}(k) = \\
 = & \frac{E_F \alpha}{16\pi m_1^3 m_2^3 (m_1^2 - m_2^2)} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} \left\{ 4m_1^2 m_2^2 F_1 F_3 \left[k^5 (m_2^2 - m_1^2) + 8k^2 m_1^2 m_2^2 (h_2 - h_1) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 16m_1^2 m_2^4 (h_2 - h_1) - 32m_1^2 m_2^4 (m_2 - m_1) + k^4 (m_1^2 h_2 - m_2^2 h_1) \right] + \right. \\
 & \left. + F_2 F_3 k^2 \left[k^5 (m_2^4 - m_1^4) + 6k^3 m_1^2 m_2^2 (m_1^2 - m_2^2) + 8k^2 m_1^2 m_2^2 (m_1^2 (h_2 - 2h_1) + m_2^2 h_1) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 16m_1^4 m_2^4 (h_2 - h_1) + k^4 (m_1^4 h_2 - m_2^4 h_1) \right] + F_3^2 k^2 m_2^2 \left[k^3 (m_1^2 - m_2^2) (5m_1^2 + m_2^2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + k^2 (-5m_1^4 h_2 + m_2^4 h_1 + 4m_1^2 m_2^2 h_1) + 6k m_1^2 m_2^2 (m_1^2 - m_2^2) \right] \right\}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

где произведено вычитание итерационного члена (12), $h_{1,2} = \sqrt{k^2 + 4m_{1,2}^2}$. Численное интегрирование в (13) с использованием параметризации формфакторов дейтрона из [27] дает следующий результат:

$$\Delta E_{2\gamma, str}^{hfs}(nS) = \begin{cases} 1S : -0.9305 \text{ meV}, \\ 2S : -0.1163 \text{ meV}. \end{cases}$$

Выражение (13) может быть использовано для вычисления двухфотонных поправок с учетом поляризации вакуума. Соответствующая поправка на электронную поляризацию вакуума имеет вид

$$E_{2\gamma, VP}^{hfs} = -E_F \frac{2\alpha^2}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_0^\infty V_{2\gamma}(k) \frac{dk}{k^2 + 4m_e^2 \xi^2} = \begin{cases} 1S : 0.0152 \text{ meV}, \\ 2S : 0.0019 \text{ meV}. \end{cases} \quad (14)$$

Аналогичный вклад мюонной поляризации вакуума может быть получен из формулы (14) при помощи замены массы электрона на массу мюона:

$$E_{2\gamma, MVP}^{hfs} = \begin{cases} 1S : 0.0015 \text{ meV}, \\ 2S : 0.0002 \text{ meV}. \end{cases}$$

Для увеличения точности расчета мы учитываем адронную поляризацию вакуума [28]. Замена в фотонном пропагаторе для учета адронной поляризации вакуума имеет вид

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \int_{sth}^\infty \frac{\rho_{had}(s) ds}{k^2 + s}$$

и приводит к следующему выражению для поправки на адронную поляризацию вакуума:

$$E_{2\gamma, HVP}^{hfs} = -E_F \frac{2\alpha^2}{\pi} \int_1^\infty \rho_{had}(s) ds \int_0^\infty V_{2\gamma}(k) \frac{dk}{k^2 + s}.$$

Основной вклад в адронную спектральную функцию $\rho_{had}(s)$ определяется пионным формфактором $F_\pi(s)$ для энергии $4m_\pi^2 \div 0.81 \text{ GeV}^2$:

$$\rho_{had}(s) = \frac{(s - 4m_\pi^2)^{3/2}}{12s^{5/2}} |F_\pi(s)|^2.$$

Вклад порядка α^6 дают также поправки на структуру ядра в однофотонном взаимодействии в первом и втором порядках теории возмущений. Потенциал поправки на структуру ядра в однофотонном взаимодействии в координатном представлении имеет вид

$$\Delta V^{hfs}(k) = \frac{4\pi\alpha\mu_d}{9m_1 m_p} r_M^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) \nabla^2 \delta(\mathbf{r}). \quad (15)$$

Усредняя (15) по кулоновским волновым функциям, получим аналитическое выражение для поправки. Численные значения для уровней $1S$ и $2S$ следующие:

$$\Delta E_{1\gamma, str}^{hfs} = \frac{2}{3} \mu^2 \alpha^2 r_M^2 \frac{3n^2 + 1}{n^2} E_F = \begin{cases} 1S : 0.0082 \text{ meV}, \\ 2S : 0.0008 \text{ meV}. \end{cases}$$

Во втором порядке теории возмущений оба потенциала пропорциональны $\delta(\mathbf{r})$, что приводит к появлению расходящейся функции $\tilde{G}(0, 0)$. Поэтому удобно использовать потенциал поправки на структуру ядра в однофотонном взаимодействии в следующей форме:

$$\Delta V_{str, 1\gamma}^C(r) = \frac{Z\alpha(2 + \Lambda r)}{8\pi r} e^{-\Lambda r}, \quad \Lambda = \frac{\sqrt{12}}{r_d}.$$

При получении данного потенциала мы используем дипольную параметризацию магнитного формфактора дейтрона. Используя функции Грина (5) и (6), можно провести аналитическое интегрирование поправки на структуру ядра во втором порядке теории возмущений. В результате получим

$$\begin{aligned} \Delta E_{str, SOPT}^{hfs, 1S} &= E_F^{1S} \frac{\mu\alpha}{2\pi\Lambda(1 + \frac{2W}{\Lambda})^4} \left\{ -2 \frac{W}{\Lambda} \left[4 \frac{W}{\Lambda} \left(5 + 3 \frac{W}{\Lambda} \right) + 13 \right] - \right. \\ &\quad \left. - 16 \frac{W}{\Lambda} \left(1 + \frac{W}{\Lambda} \right) \left(1 + \frac{2W}{\Lambda} \right) \coth^{-1} \left(1 + \frac{4W}{\Lambda} \right) - 3 \right\} = -0.0555 \text{ meV}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{str, SOPT}^{hfs, 2S} &= -E_F^{2S} \frac{\mu\alpha}{8\pi\Lambda(1 + \frac{W}{\Lambda})^6} \left\{ \frac{W}{\Lambda} \left[\left(\frac{W}{\Lambda} \left(14 + 3 \frac{W}{\Lambda} \right) + 31 \right) \frac{W^2}{\Lambda^2} + 16 \right] + \right. \\ &\quad \left. + 8 \frac{W}{\Lambda} \left(1 + \frac{W}{\Lambda} \right) \left[\left(3 + \frac{W}{\Lambda} \right) \frac{W^2}{\Lambda^2} + 4 \right] \coth^{-1} \left(1 + \frac{2W}{\Lambda} \right) + 6 \right\} = -0.0069 \text{ meV}. \end{aligned}$$

Вклад порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ дают двухфотонные обменные диаграммы с радиационным фотоном в мюонной линии и учетом структуры ядра. Данные поправки были детально рассмотрены в нашей работе [29] и включены в итоговые значения для сверхтонких расщеплений.

Отличие от ранее проведенных исследований энергетического спектра легких мюонных атомов в [4], мы используем трехмерный квазипотенциальный подход для описания связанного состояния мюона и дейтрона. Все рассмотренные нами поправки представлены в интегральной форме и рассчитаны численно. Как уже отмечалось ранее, сверхтонкая структура мюонных атомов была исследована в [4, 5]. В этих статьях были получены частоты переходов между уровнями энергии $2P$ и $2S$ в случае мюонного водорода, мюонного дейтерия и ионов мюонного гелия. Единственный детальный расчет сверхтонкого расщепления $2S$ -состояния в мюонном дейтерии представлен в [4]. Формула

$$\Delta E_{2s} = \frac{3}{2} \beta_D (1 + a_\mu) (1 + \epsilon_{VP} + \epsilon_{vertex} + \epsilon_{Breit} + \epsilon_{Zemach}) = 6.0584(7) \text{ meV},$$

полученная работе [4], содержит основные поправки к энергии Ферми: поляризацию вакуума, релятивистскую поправку, вершинную поправку и поправку Земаха. Важно отметить, что поправка Земаха ($-0.1177(7)$) meV для $2S$ -состояния в мюонном дейтерии из [4] немного отличается от нашего значения (-0.1163) meV, что может быть связано с эффектами отдачи. Однопетлевые поправки на поляризацию вакуума в первом $\epsilon_{VP1} = 0.00218$ и втором $\epsilon_{VP2} = 0.00337$ порядках теории возмущений в $2S$ -состоянии из [4] полностью совпадает с нашими выражениями (4) и (8). Полное значение сверхтонкого расщепления $2S$ -состояния 6.0683 meV без учета вклада поляризуемости дейтрона находится в хорошем согласии с результатом 6.0584 meV из [4]. Небольшая разница в значениях обусловлена прежде всего эффектами отдачи и структуры ядра в двухфотонных обменных диаграммах, которые мы вычисляем, используя современные экспериментальные данные по электромагнитным факторам дейтрона, а также учетом поправок на структуру ядра порядка α^6 . В конечные значения мы включаем эффекты поляризуемости дейтрона, вклад которых был вычислен при помощи аналитического выражения из [6], полученного для электронного дейтерия. Это основная часть поправки на поляризуемость. Мы также проводим оценку внутренней поляризуемости дейтрона на базе результатов для мюонного водорода [30].

Полагая, что параметризации электромагнитных формфакторов дейтрона были получены с неопределенностью порядка 0.5 процента на малых значениях квадрата импульса фотона Q^2 , мы получаем погрешность основной поправки на структуру ядра порядка $(Z\alpha)^5$ не менее ± 0.0010 meV для $2S$ -состояния. Погрешность при определении поправки на внутреннюю поляризуемость можно оценить на основе результатов для мюонного водорода. Она составляет 0.0025 meV (в $2S$ -состоянии) (около 25 процентов). Неопределенность в поправке на поляризуемость дейтрона оценена на основе результатов из [6] и примерно равна 0.0042 meV (2 процента). Вклад слабого взаимодействия в нерелятивистском приближении равен нулю, как было показано в работах [15, 31]. Полная теоретическая неопределенность составляет 0.0050 meV в случае $2S$ -состояния.

Интервал сверхтонкой структуры Δ_{12} не содержит неопределенностей, связанных со структурой и поляризуемостью ядра, поэтому полученное в нашей работе значение $\Delta_{12} = -0.0379$ meV может быть использовано для проверки квантовой электродинамики для мюонного дейтерия с точностью 0.001 meV. Полученные итоговые численные значения сверхтонких расщеплений $\Delta E^{hfs}(1S) = 50.2814 \pm 0.0410$ meV и $\Delta E^{hfs}(2S) = 6.2804 \pm 0.0050$ meV являются надежной оценкой для сравнения с экспериментальными данными коллаборации CREMA.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-02-00173-а) и при государственной поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках реализации мероприятий Программы повышения конкурентоспособности СГАУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013–2020 годы.

ORCIDs

Алексей Петрович Мартыненко: <http://orcid.org/0000-0003-3323-2177>

Григорий Алексеевич Мартыненко: <http://orcid.org/0000-0002-5962-2395>

Вячеслав Вадимович Сорокин: <http://orcid.org/0000-0002-1933-8234>

Рудольф Николаевич Фаустов: <http://orcid.org/0000-0002-7859-5732>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мартыненко А. П., Мартыненко Г. А., Сорокин В. В., Фаустов Р. Н. Сверхтонкая структура S -состояний мюонного дейтерия / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: материалы конф.*; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волвич; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 238–239.
2. Pohl R., Antognini A., Nez F. et al. The size of the proton // *Nature*, 2010. vol. 466, no. 7303. pp. 213–216. doi: [10.1038/nature09250](https://doi.org/10.1038/nature09250).
3. Antognini A., Kottmann F., Biraben F., et al. Theory of the $2S-2P$ Lamb shift and $2S$ hyperfine splitting in muonic hydrogen // *Annals of Physics*, 2013. vol. 331. pp. 127–145, arXiv: [1208.2637](https://arxiv.org/abs/1208.2637) [physics.atom-ph]. doi: [10.1016/j.aop.2012.12.003](https://doi.org/10.1016/j.aop.2012.12.003).
4. Borie E. Lamb shift in light muonic atoms — Revisited // *Annals of Physics*, 2012. vol. 327, no. 3. pp. 733–763, arXiv: [1103.1772](https://arxiv.org/abs/1103.1772) [physics.atom-ph]. doi: [10.1016/j.aop.2011.11.017](https://doi.org/10.1016/j.aop.2011.11.017).
5. Pachucki K. $\alpha(Z\alpha)2EF$ correction to hyperfine splitting in hydrogenic atoms // *Phys. Rev. A*, 1996. vol. 54, no. 3. pp. 1994–2016. doi: [10.1103/physreva.54.1994](https://doi.org/10.1103/physreva.54.1994).
6. Khriplovich I. B., Milstein A. I. Corrections to deuterium hyperfine structure due to deuterium excitations // *JETP*, 2004. vol. 98, no. 2. pp. 181–185, arXiv: [nucl-th/0304069](https://arxiv.org/abs/nuc1-th/0304069). doi: [10.1134/1.1675885](https://doi.org/10.1134/1.1675885).
7. Friar J. L., Martorell J., Sprung D. W. L. Nuclear sizes and the isotope shift // *Phys. Rev. A*, 1997. vol. 56, no. 6, 4579, arXiv: [nucl-th/9707016](https://arxiv.org/abs/nuc1-th/9707016). doi: [10.1103/physreva.56.4579](https://doi.org/10.1103/physreva.56.4579).
8. Korzinin E. Yu., Ivanov V. G., Karshenboim S. G. $\alpha^2(Z\alpha)^4m$ contributions to the Lamb shift and the fine structure in light muonic atoms // *Phys. Rev. D*, 2013. vol. 88, no. 12, 125019, arXiv: [1311.5784](https://arxiv.org/abs/1311.5784) [physics.atom-ph]. doi: [10.1103/physrevd.88.125019](https://doi.org/10.1103/physrevd.88.125019).
9. Carlson C. E., Nazaryan V., Griffioen K. Proton-structure corrections to hyperfine splitting in muonic hydrogen // *Phys. Rev. A*, 2011. vol. 83, no. 4, 042509, arXiv: [1101.3239](https://arxiv.org/abs/1101.3239) [physics.atom-ph]. doi: [10.1103/physreva.83.042509](https://doi.org/10.1103/physreva.83.042509).
10. Jentschura U. D. Lamb shift in muonic hydrogen—I. Verification and update of theoretical predictions // *Annals of Physics*, 2011. vol. 326, no. 2. pp. 500–515, arXiv: [1011.5275](https://arxiv.org/abs/1011.5275) [hep-ph]. doi: [10.1016/j.aop.2010.11.012](https://doi.org/10.1016/j.aop.2010.11.012).
11. Indelicato P. Nonperturbative evaluation of some QED contributions to the muonic hydrogen $n = 2$ Lamb shift and hyperfine structure // *Phys. Rev. A*, 2013. vol. 87, no. 2, 022501, arXiv: [1210.5828](https://arxiv.org/abs/1210.5828) [physics.atom-ph]. doi: [10.1103/physreva.87.022501](https://doi.org/10.1103/physreva.87.022501).
12. Karshenboim S. G., Ivanov V. G., Korzinin E. Yu., Shelyuto V. A. Nonrelativistic contributions of order $\alpha^5 m_\mu c^2$ to the Lamb shift in muonic hydrogen and deuterium, and in the muonic helium ion // *Phys. Rev. A*, 2010. vol. 81, no. 6, 060501. doi: [10.1103/physreva.81.060501](https://doi.org/10.1103/physreva.81.060501).
13. Мартыненко А. П. Тонкая и сверхтонкая структура P -уровней мюонного водорода // *Ядерная физика*, 2008. Т. 71, № 1. С. 126–136.
14. Krutov A. A., Martynenko A. P. Hyperfine structure of the ground state muonic ^3He atom // *EPJ. D*, 2011. vol. 62, no. 2. pp. 163–175, arXiv: [1007.1419](https://arxiv.org/abs/1007.1419) [hep-ph]. doi: [10.1140/epjd/e2011-10401-5](https://doi.org/10.1140/epjd/e2011-10401-5).
15. Eides M. I., Grotch H., Shelyuto V. A. Theory of light hydrogenlike atoms // *Phys. Rep.*, 2001. vol. 342, no. 2–3. pp. 63–261, arXiv: [hep-ph/0002158](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0002158). doi: [10.1016/S0370-1573\(00\)00077-6](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00077-6).
16. Miller G. A., Thomas A. W., Carroll J. D., Rafelski J. Toward a resolution of the proton size puzzle // *Phys. Rev. A*, 2011. vol. 84, no. 2, 020101. doi: [10.1103/physreva.84.020101](https://doi.org/10.1103/physreva.84.020101).
17. Mohr P. J., Taylor B. N., Newell D. B. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010 // *Rev. Mod. Phys.*, 2012. vol. 84, no. 4. pp. 1527–1605. doi: [10.1103/revmodphys.84.1527](https://doi.org/10.1103/revmodphys.84.1527); doi: [10.6028/nist.sp.961e2005](https://doi.org/10.6028/nist.sp.961e2005); doi: [10.1063/1.4724320](https://doi.org/10.1063/1.4724320).
18. Martynenko A. P. $2S$ Hyperfine splitting of muonic hydrogen // *Phys. Rev. A*, 2005. vol. 71, no. 2, 022506, arXiv: [hep-ph/0409107](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0409107). doi: [10.1103/physreva.71.022506](https://doi.org/10.1103/physreva.71.022506).
19. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. *Квантовая электродинамика*. М.: Физматлит, 2006. 720 с.

20. Breit G. Possible Effects of Nuclear Spin on X-Ray Terms // *Phys. Rev.*, 1930. vol. 35, no. 12. pp. 1447–1449. doi: [10.1103/physrev.35.1447](https://doi.org/10.1103/physrev.35.1447).
21. Мартыненко А. П. Сверхтонкая структура S -уровней иона мюонного гелия // *ЖЭТФ*, 2008. Т. 133, № 4. С. 794–804, <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/r/133/4/p794?a=list>.
22. Nameka H. F. On the Use of Green Functions in Atomic and Molecular Calculations. I. The Green Function of the Hydrogen Atom // *J. Chem. Phys.*, 1967. vol. 47, no. 8. pp. 2728–2735. doi: [10.1063/1.1712290](https://doi.org/10.1063/1.1712290).
23. Martynenko A. P. Lamb shift in the muonic helium ion // *Phys. Rev. A*, 2007. vol. 76, no. 1, 012505, arXiv: [hep-ph/0612298](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0612298). doi: [10.1103/physreva.76.012505](https://doi.org/10.1103/physreva.76.012505).
24. Каршенбойм С. Г., Корзинин Е. Ю., Иванов В. Г. Сверхтонкое расщепление в мюонном водороде: КЭД поправки порядка α^2 // *Письма в ЖЭТФ*, 2008. Т. 88, № 10. С. 737–742; Каршенбойм С. Г., Корзинин Е. Ю., Иванов В. Г. Поправка // *Письма в ЖЭТФ*, 2009. Т. 89, № 4. С. 240.
25. Faustov R. N., Martynenko A. P. Nuclear structure corrections in the energy spectra of electronic and muonic deuterium // *Phys. Rev. A*, 2003. vol. 67, no. 5, 052506, arXiv: [hep-ph/0211445](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0211445). doi: [10.1103/physreva.67.052506](https://doi.org/10.1103/physreva.67.052506).
26. Vermaseren J. A. M. *New features of FORM*, 2000. 14 pp., arXiv: [math-ph/0010025](https://arxiv.org/abs/math-ph/0010025)
27. The JLAB t20 collaboration (Abbott D., et al.) Phenomenology of the deuteron electromagnetic form factors // *EPJ A*, 2000. vol. 7, no. 3. pp. 421–427, arXiv: [nucl-ex/0002003](https://arxiv.org/abs/nucl-ex/0002003). doi: [10.1007/PL00013629](https://doi.org/10.1007/PL00013629).
28. Faustov R. N., Martynenko A. P. Hadronic vacuum polarization contribution to the Lamb shift in muonic hydrogen // *EPJ direct*, 1999. vol. 1, no. 1. pp. 1–6, arXiv: [hep-ph/9906315](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9906315). doi: [10.1007/s1010599c0006](https://doi.org/10.1007/s1010599c0006).
29. Faustov R. N., Martynenko A. P., Martynenko G. A., Sorokin V. V. Radiative nonrecoil nuclear finite size corrections of order $\alpha(Z\alpha)^5$ to the hyperfine splitting of S -states in muonic hydrogen // *Phys. Lett. B*, 2014. vol. 733. pp. 354–358, arXiv: [1402.5825](https://arxiv.org/abs/1402.5825) [hep-ph]. doi: [10.1016/j.physletb.2014.04.056](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.04.056).
30. Мартыненко А. П. Эффект поляризуемости протона в лэмбовском сдвиге атома водорода // *Ядерная физика*, 2006. Т. 69, № 8. С. 1344–1351.
31. Eides M. I. Weak-interaction contributions to hyperfine splitting and Lamb shift in light muonic atoms // *Phys. Rev. A*, 2012. vol. 85, no. 3, 034503, arXiv: [1201.2979](https://arxiv.org/abs/1201.2979) [physics.atom-ph]. doi: [10.1103/physreva.85.034503](https://doi.org/10.1103/physreva.85.034503).

Поступила в редакцию 17/XII/2014;
в окончательном варианте — 20/III/2015;
принята в печать — 08/IV/2015.

MSC: 74E35, 74K20

HYPERFINE STRUCTURE OF S -STATES OF MUONIC DEUTERIUM*

A. P. Martynenko^{1,2}, G. A. Martynenko¹,
V. V. Sorokin¹, R. N. Faustov R. N.

¹ Samara State University,
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russian Federation.

² Samara State Aerospace University,
34, Moskovskoye sh., Samara, 443086, Russian Federation.

³ Federal Research Center “Computer Science and Control”
of Russian Academy of Sciences,
40, Vavilova str., Moscow, 119333, Russian Federation.

Abstract

On the basis of quasipotential method in quantum electrodynamics we calculate corrections of order α^5 and α^6 to hyperfine structure of S -wave energy levels of muonic deuterium. Relativistic corrections, effects of vacuum polarization in first, second and third orders of perturbation theory, nuclear structure and recoil corrections are taken into account. The obtained numerical values of hyperfine splitting $\Delta E^{hfs}(1S) = 50.2814$ meV ($1S$ state) and $\Delta E^{hfs}(2S) = 6.2804$ meV ($2S$ state) represent reliable estimate for a comparison with forthcoming experimental data of CREMA collaboration. The hyperfine structure interval $\Delta_{12} = 8\Delta E^{hfs}(2S) - \Delta E^{hfs}(1S) = -0.0379$ meV can be used for precision check of quantum electrodynamics prediction for muonic deuterium.

Keywords: quantum electrodynamics, hyperfine splitting, quasipotential method.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1381>

© 2015 Samara State Technical University.

Please cite this article in press as:

Martynenko A. P., Martynenko G. A., Sorokin V. V., Faustov R. N. Hyperfine structure of S -states of muonic deuterium, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 3, pp. 474–488. doi: [10.14498/vsgtu1381](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1381). (In Russian)

Authors Details:

Alexei P. Martynenko (Dr. Phys. & Math. Sci.; a.p.martynenko@samsu.ru; Corresponding Author), Professor, Dept. of General and Theoretical Physics¹; Professor, Dept. of Physics².

Gregory A. Martynenko, Student, Dept. of General and Theoretical Physics.

Vyacheslav V. Sorokin (wvs63rus@yandex.ru), Student, Dept. of General and Theoretical Physics.

Rudolf N. Faustov (Dr. Phys. & Math. Sci.; faustov@theory.sinp.msu.ru), Head of Sector, Federal Research Center “Computer Science and Control”.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

Acknowledgments. This work has been supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14–02–00173-a) and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the implementation of the Program of increasing the competitiveness of SSAU among the world’s leading scientific and educational centers over the period from 2013 till 2020.

ORCIDs

Alexei P. Martynenko: <http://orcid.org/0000-0003-3323-2177>

Gregory A. Martynenko: <http://orcid.org/0000-0002-5962-2395>

Vyacheslav V. Sorokin: <http://orcid.org/0000-0002-1933-8234>

Rudolf N. Faustov: <http://orcid.org/0000-0002-7859-5732>

REFERENCES

1. Martynenko A. P., Martynenko G. A., Sorokin V. V., Faustov R. N. Hyperfine structure of S -states of muonic deuterium, *The 4nd International Conference “Mathematical Physics and its Applications”*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 238–239 (In Russian).
2. Pohl R., Antognini A., Nez F. et al. The size of the proton, *Nature*, 2010, vol. 466, no. 7303, pp. 213–216. doi: [10.1038/nature09250](https://doi.org/10.1038/nature09250).
3. Antognini A., Kottmann F., Biraben F., et al. Theory of the $2S$ – $2P$ Lamb shift and $2S$ hyperfine splitting in muonic hydrogen, *Annals of Physics*, 2013, vol. 331, pp. 127–145, arXiv: [1208.2637](https://arxiv.org/abs/1208.2637) [physics.atom-ph]. doi: [10.1016/j.aop.2012.12.003](https://doi.org/10.1016/j.aop.2012.12.003).
4. Borie E. Lamb shift in light muonic atoms — Revisited, *Annals of Physics*, 2012, vol. 327, no. 3, pp. 733–763, arXiv: [1103.1772](https://arxiv.org/abs/1103.1772) [physics.atom-ph]. doi: [10.1016/j.aop.2011.11.017](https://doi.org/10.1016/j.aop.2011.11.017).
5. Pachucki K. $\alpha(Z\alpha)2EF$ correction to hyperfine splitting in hydrogenic atoms, *Phys. Rev. A*, 1996, vol. 54, no. 3, pp. 1994–2016. doi: [10.1103/physreva.54.1994](https://doi.org/10.1103/physreva.54.1994).
6. Khriplovich I. B., Milstein A. I. Corrections to deuterium hyperfine structure due to deuteron excitations, *JETP*, 2004, vol. 98, no. 2, pp. 181–185, arXiv: [nucl-th/0304069](https://arxiv.org/abs/nucl-th/0304069). doi: [10.1134/1.1675885](https://doi.org/10.1134/1.1675885).
7. Friar J. L., Martorell J., Sprung D. W. L. Nuclear sizes and the isotope shift, *Phys. Rev. A*, 1997, vol. 56, no. 6, 4579, arXiv: [nucl-th/9707016](https://arxiv.org/abs/nucl-th/9707016). doi: [10.1103/physreva.56.4579](https://doi.org/10.1103/physreva.56.4579).
8. Korzinin E. Yu., Ivanov V. G., Karshenboim S. G. $\alpha^2(Z\alpha)^4m$ contributions to the Lamb shift and the fine structure in light muonic atoms, *Phys. Rev. D*, 2013, vol. 88, no. 12, 125019, arXiv: [1311.5784](https://arxiv.org/abs/1311.5784) [physics.atom-ph]. doi: [10.1103/physrevd.88.125019](https://doi.org/10.1103/physrevd.88.125019).
9. Carlson C. E., Nazaryan V., Griffioen K. Proton-structure corrections to hyperfine splitting in muonic hydrogen, *Phys. Rev. A*, 2011, vol. 83, no. 4, 042509, arXiv: [1101.3239](https://arxiv.org/abs/1101.3239) [physics.atom-ph]. doi: [10.1103/physreva.83.042509](https://doi.org/10.1103/physreva.83.042509).
10. Jentschura U. D. Lamb shift in muonic hydrogen—I. Verification and update of theoretical predictions, *Annals of Physics*, 2011, vol. 326, no. 2, pp. 500–515, arXiv: [1011.5275](https://arxiv.org/abs/1011.5275) [hep-ph]. doi: [10.1016/j.aop.2010.11.012](https://doi.org/10.1016/j.aop.2010.11.012).
11. Indelicato P. Nonperturbative evaluation of some QED contributions to the muonic hydrogen $n = 2$ Lamb shift and hyperfine structure, *Phys. Rev. A*, 2013, vol. 87, no. 2, 022501, arXiv: [1210.5828](https://arxiv.org/abs/1210.5828) [physics.atom-ph]. doi: [10.1103/physreva.87.022501](https://doi.org/10.1103/physreva.87.022501).
12. Karshenboim S. G., Ivanov V. G., Korzinin E. Yu., Shelyuto V. A. Nonrelativistic contributions of order $\alpha^5 m_\mu c^2$ to the Lamb shift in muonic hydrogen and deuterium, and in the muonic helium ion, *Phys. Rev. A*, 2010, vol. 81, no. 6, 060501. doi: [10.1103/physreva.81.060501](https://doi.org/10.1103/physreva.81.060501).
13. Martynenko A. P. Fine and hyperfine structure of P -wave levels in muonic hydrogen, *Phys. Atom. Nuclei*, 2008, vol. 71, no. 1, pp. 125–135, arXiv: [hep-ph/0610226](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0610226). doi: [10.1134/S1063778808010146](https://doi.org/10.1134/S1063778808010146).
14. Krutov A. A., Martynenko A. P. Hyperfine structure of the ground state muonic ${}^3\text{He}$ atom, *EPJ. D*, 2011, vol. 62, no. 2, pp. 163–175, arXiv: [1007.1419](https://arxiv.org/abs/1007.1419) [hep-ph]. doi: [10.1140/epjd/e2011-10401-5](https://doi.org/10.1140/epjd/e2011-10401-5).

15. Eides M. I., Grotch H., Shelyuto V. A. Theory of light hydrogenlike atoms, *Phys. Rep.*, 2001, vol. 342, no. 2–3, pp. 63–261, arXiv:[hep-ph/0002158](#). doi: [10.1016/S0370-1573\(00\)00077-6](#).
16. Miller G. A., Thomas A. W., Carroll J. D., Rafelski J. Toward a resolution of the proton size puzzle, *Phys. Rev. A*, 2011, vol. 84, no. 2, 020101. doi: [10.1103/physreva.84.020101](#).
17. Mohr P. J., Taylor B. N., Newell D. B. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010, *Rev. Mod. Phys.*, 2012, vol. 84, no. 4, pp. 1527–1605. doi: [10.1103/revmodphys.84.1527](#); doi: [10.6028/nist.sp.961e2005](#); doi: [10.1063/1.4724320](#).
18. Martynenko A. P. 2S Hyperfine splitting of muonic hydrogen, *Phys. Rev. A*, 2005, vol. 71, no. 2, 022506, arXiv:[hep-ph/0409107](#). doi: [10.1103/physreva.71.022506](#).
19. Berestetskiy V. B., Lifshits E. M., Pitaevskiy L. P. *Quantum Electrodynamics*. Oxford, Elsevier, 1982. xv+652 pp.. doi: [10.1016/B978-0-08-050346-2.50001-5](#).
20. Breit G. Possible Effects of Nuclear Spin on X-Ray Terms, *Phys. Rev.*, 1930, vol. 35, no. 12, pp. 1447–1449. doi: [10.1103/physrev.35.1447](#).
21. Martynenko A. P. Hyperfine structure of the S levels of the muonic helium ion, *JETP*, 2008, vol. 106, no. 4, pp. 690–699, arXiv:[0710.3237](#) [hep-ph]. doi: [10.1134/S1063776108040079](#).
22. Hameka H. F. On the Use of Green Functions in Atomic and Molecular Calculations. I. The Green Function of the Hydrogen Atom, *J. Chem. Phys.*, 1967, vol. 47, no. 8, pp. 2728–2735. doi: [10.1063/1.1712290](#).
23. Martynenko A. P. Lamb shift in the muonic helium ion, *Phys. Rev. A*, 2007, vol. 76, no. 1, 012505, arXiv:[hep-ph/0612298](#). doi: [10.1103/physreva.76.012505](#).
24. Korzinin E. Yu., Ivanov V. G., Karshenboim S. G. Hyperfine splitting in muonic hydrogen: QED corrections of the α^2 order, *JETP Letters*, 2008, vol. 88, no. 4, pp. 641–646. doi: [10.1134/S0021364008220013](#) ; Erratum, *JETP Letters*, 2009, vol. 89, no. 4, pp. 216. doi: [10.1134/S0021364009040110](#).
25. Faustov R. N., Martynenko A. P. Nuclear structure corrections in the energy spectra of electronic and muonic deuterium, *Phys. Rev. A*, 2003, vol. 67, no. 5, 052506, arXiv:[hep-ph/0211445](#). doi: [10.1103/physreva.67.052506](#).
26. Vermaseren J. A. M. *New features of FORM*, 2000, 14 pp., arXiv:[math-ph/0010025](#)
27. The JLAB t20 collaboration (Abbott D., et al.) Phenomenology of the deuteron electromagnetic form factors, *EPJ A*, 2000, vol. 7, no. 3, pp. 421–427, arXiv:[nucl-ex/0002003](#). doi: [10.1007/PL00013629](#).
28. Faustov R. N., Martynenko A. P. Hadronic vacuum polarization contribution to the Lamb shift in muonic hydrogen, *EPJ direct*, 1999, vol. 1, no. 1, pp. 1–6, arXiv:[hep-ph/9906315](#). doi: [10.1007/s1010599c0006](#).
29. Faustov R. N., Martynenko A. P., Martynenko G. A., Sorokin V. V. Radiative nonrecoil nuclear finite size corrections of order $\alpha(Z\alpha)^5$ to the hyperfine splitting of S-states in muonic hydrogen, *Phys. Lett. B*, 2014, vol. 733, pp. 354–358, arXiv:[1402.5825](#) [hep-ph]. doi: [10.1016/j.physletb.2014.04.056](#).
30. Martynenko A. P. Proton-polarizability effect in the Lamb shift for the hydrogen atom, *Phys. Atom. Nuclei*, 2006, vol. 69, no. 8, pp. 1309–1316, arXiv:[hep-ph/0509236](#). doi: [10.1134/s1063778806080072](#).
31. Eides M. I. Weak-interaction contributions to hyperfine splitting and Lamb shift in light muonic atoms, *Phys. Rev. A*, 2012, vol. 85, no. 3, 034503, arXiv:[1201.2979](#) [physics.atom-ph]. doi: [10.1103/physreva.85.034503](#).

Received 17/XII/2014;
 received in revised form 20/III/2015;
 accepted 08/IV/2015.