Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 4. С. 658–666

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1444

УДК 517.956.47

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Д. К. Дурдиев

Бухарский государственный университет,
Узбекистан, 200100, Бухара,ул. Мухаммад Икбол, 11.

Аннотация

Исследуется задача определения ядра интегрального слагаемого в одномерном интегро-дифференциальном уравнении теплопроводности по известному решению задачи Коши для этого уравнения. В начале исходная задача заменяется эквивалентной задачей, где в дополнительное условие входит искомое ядро без интеграла. Изучаются вопросы о единственности нахождения этого ядра. Далее в предположении, что существуют два решения $k_1(x,t)$ и $k_2(x,t)$, получены интегро-дифференциальные уравнения, условия Коши и дополнительные условия для разностей решений задач Коши, соответствующих функциям $k_1(x,t)$, $k_2(x,t)$. Дальнейшие исследования проводятся для разности $k_1(x,t) - - k_2(x,t)$ решений поставленной задачи и с помощью техники оценок интегральных уравнений показывается, что $k_1(x,t) \equiv k_2(x,t)$ в классе ядер $k(x,t)$, представимых в виде $k(x,t) = \sum_{i=0}^{N} a_i(x)b_i(t)$. Таким образом, доказана теорема о единственности решения поставленной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение, задача Коши, интегральное уравнение, единственность.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1444

Рассматривается задача Коши для одномерного интегро-дифференциального уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_0^t k(x,t-\tau)u(x,y,\tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T], \tag{1}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \tag{2}$$

где T — фиксированная положительная постоянная, а $y \in \mathbb{R}$ является параметром задачи.

Рассмотрим следующую задачу: *найти ядро* $k(x,t)$ *интегрального члена уравнения* (1), *если решение задачи* (1), (2) известно для $x = y$:

$$u(y,y,t) = \psi(y,t). \tag{3}$$

Образец для цитирования

Дурдиев Д. К. О единственности определения ядра интегро-дифференциального уравнения параболического типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 658–666. doi: 10.14498/vsgtu1444.

Сведения об авторе

Дурдимурод Каландарович Дурдиев (д.ф.-м.н., проф.; durdiev65@mail.ru), профессор, каф. дифференциальных уравнений и анализа; проректор по учебной работе.

Здесь $\psi(y,t)$ — заданная функция при всех $y \in \mathbb{R}$ и $t \in [0,T]$.

В настоящее время интерес к подобным задачам велик и опубликовано значительное число работ, посвященных этой тематике. Среди публикаций, близких к изученной здесь задаче, отметим статьи [1–6]. В работах [2–6] получены теоремы однозначной разрешимости определения ядра, зависящего лишь от одной переменной. Обратным задачам определения правой части либо одного из коэффициентов параболического уравнения с дополнительной информацией разных видов посвящены работы [7–12] (см. также библиографический список книги [7]). Характерная особенность постановок обратных задач в работах [1, 11, 12] заключается в том, что дополнительное условие задается на плоскости, ортогональной той переменной, от которой ядро интегрального члена в [1] и неизвестные коэффициенты уравнений в [11, 12] не зависят. Это специальное задание дополнительной информации позволяет получить для искомых функций и решения замкнутую систему интегральных уравнений второго рода, которая является удобной для дальнейшего исследования.

Предметом исследования настоящей работы является вопрос однозначного определения функции $k(x,t)$ информацией (3). Нужно отметить, что в отличие от вышеупомянутых работ здесь искомое ядро зависит от всех переменных. При этом мы будем предполагать, что функция $k(x,t)$ и производные k_{xx}, k_t принадлежат классу $B(D(T))$[1], $D(T) := \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ при любом $T > 0$, а функция $\varphi(x,y)$ — классу $B^4\left(\mathbb{R}^2\right)$[2].

Основным содержанием настоящей работы является следующая теорема единственности.

Теорема. *Пусть выполнены предположения о функции $\varphi(x,y)$, сделанные выше. Кроме того, пусть функция $\psi(y,t)$ вместе с производными ψ_t, ψ_{tt}, ψ_{tyy} принадлежит классу $B\left(D(T)\right)$ при любом конечном $T > 0$ и*

$$\inf_{(y,t)\in D(T)} \mid \psi(y,t) \mid \geqslant \mu_0 > 0, \tag{4}$$

где μ_0 — известное число. Тогда функция $k(x,t)$, представимая в виде

$$k(x,t) = \sum_{i=0}^{N} a_i(x) b_i(t), \quad a_i(x) \in B^2(\mathbb{R}),\ b_i(t) \in C^1(\mathbb{R})^{3}, \tag{5}$$

однозначно определяется в области $D(T)$.

Схема рассуждений для доказательства теоремы основывается на схеме исследования обратных задач, изложенной в работе [13]. Здесь мы не будем останавливаться на вопросах, связанных с существованием решения поставленной задачи (1)–(3). Отметим только условия согласования, которым должна удовлетворять функция $\psi(y,t)$:

$$\psi(y,0) = \varphi(y,y),$$

[1] Класс $B(D(T))$ — класс непрерывных по всем переменным и ограниченных по x в области $D(T)$ функций.

[2] Класс $B^4\left(\mathbb{R}^2\right)$ — класс четырежды непрерывно-дифференцируемых по всем переменным и ограниченных по x вместе с производными в области $\mathbb{R}^2$ функций.

[3] Класс $C^1(\mathbb{R})$ — класс непрерывно-дифференцируемых в области $\mathbb{R}$ функций.

$$\psi_{tyy}(y,0)-\psi_{tt}(y,0)=\varphi_{xxyy}(y,y)+2\varphi_{xxxy}(y,y)-k(y,0)\varphi(y,y).$$

С целью доказательства теоремы с помощью дифференцирования исходного уравнения (1) и условия (2) получим дополнительные соотношения для вспомогательных функций. Для этого введем в рассмотрение следующие вспомогательные функции:

$$\omega := u_{ty}, \quad \vartheta := 2\omega_x + \omega_y.$$

Для функции ω, дифференцируя (1) сначала по t, а затем по y, мы получим уравнение

$$\omega_t-\omega_{xx}-k(x,t)\varphi_y(x,y)-\int_0^t k(x,\tau)\omega(x,y,t-\tau)d\tau=0, \quad x\in\mathbb{R},\ t\in(0,T]. \quad (6)$$

Условие при $t=0$ для ω находится из (1). Положив в уравнении (1) $t=0$ и используя условие (2), а затем дифференцируя полученное соотношение по y, находим

$$\omega\big|_{t=0}=\varphi_{xxy}(x,y). \quad (7)$$

Применяя дифференциальные операторы $2\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ поочередно к уравнению (6) и складывая результаты, получим уравнение для ϑ:

$$\vartheta_t-\vartheta_{xx}-k(x,t)(2\varphi_{xy}+\varphi_{yy})-\int_0^t k(x,t)\vartheta(x,y,t-\tau)d\tau= \\ =2k_x\varphi_y+2\int_0^t k_x(x,\tau)\omega(x,y,t-\tau)d\tau. \quad (8)$$

Подобным путем из (7) находим условие

$$\vartheta\big|_{t=0}=\varphi_{xxyy}+2\varphi_{xxxy}. \quad (9)$$

Соотношение (3) в терминах функции ϑ можно записать в виде

$$\vartheta\big|_{x=y}=\psi_{tyy}(y,t)-\psi_{tt}(y,t)+k(y,t)\varphi(y,y)+\int_0^t k(y,\tau)\psi_t(y,t-\tau)d\tau. \quad (10)$$

Заметим, что при найденной из (6), (7) функции ω функция ϑ может быть найдена из (8), (9).

Предположим теперь, что существуют два решения поставленной задачи k_1, k_2, отвечающие им решения задач (1), (2) обозначим через u_1, u_2 соответственно. Введем также функции ω_1, ω_2, ϑ_1, ϑ_2, аналогичные функциям ω, ϑ. Дополнительно обозначим

$$\tilde{k}=k_1-k_2, \quad \widetilde{\omega}=\omega_1-\omega_2, \quad \widetilde{\vartheta}=\vartheta_1-\vartheta_2.$$

Тогда для $\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\vartheta}$ из равенств (6)–(9) находим

$$\widetilde{\omega}_t - \widetilde{\omega}_{xx} - \int_0^t k_1(x,\tau)\widetilde{\omega}(x,y,t-\tau)d\tau = \tilde{k}(x,t)\varphi_y(x,y) + \\ + \int_0^t \tilde{k}(x,\tau)\omega_2(x,y,t-\tau)d\tau, \quad (11)$$

$$\widetilde{\omega}\big|_{t=0} = 0; \quad (12)$$

$$\widetilde{\vartheta}_t - \widetilde{\vartheta}_{xx} - \tilde{k}(x,t)(2\varphi_{xy} + \varphi_{yy}) - \int_0^t k_1(x,\tau)\widetilde{\vartheta}(x,y,t-\tau)d\tau = \\ = \int_0^t \tilde{k}(x,\tau)\vartheta_2(x,y,t-\tau)d\tau + 2\int_0^t \tilde{k}_x(x,\tau)\omega_2(x,y,t-\tau)d\tau + \\ + 2\int_0^t k_{1x}(x,\tau)\widetilde{\omega}(x,y,t-\tau)d\tau + 2\tilde{k}_x(x,t)\varphi_y(x,y), \quad (13)$$

$$\widetilde{\vartheta}\big|_{t=0} = 0. \quad (14)$$

Из равенства (10) следует

$$\widetilde{\vartheta}\big|_{x=y} = \tilde{k}(y,t)\varphi(y,y) + \int_0^t \tilde{k}(y,\tau)\psi_t(y,t-\tau)d\tau. \quad (15)$$

Система равенств (11)–(15) представляет собой систему однородных интегральных уравнений относительно функций $\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\vartheta}$, $\tilde{k}$. Требуется показать, что эта система определяет в области $D(T)$ только нулевое решение. Для доказательства этого факта нам нужны оценки функций $\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\vartheta}$ через функцию $\tilde{k}$. При получении этих оценок мы используем следующую лемму.

Лемма. *Для решения $p(x,t)$ задачи*

$$p_t - p_{xx} - \int_0^t k(x,\tau)p(x,t-\tau)d\tau = f(x,t), \quad p\big|_{t=0} = \lambda(x) \quad (16)$$

в области $D(T)$ имеет место оценка

$$|p(x,t)| \leqslant \Phi e^{T\|k\|_T t} + \int_0^t F(\tau)e^{T\|k\|_T(t-\tau)}d\tau, \quad (17)$$

где введены обозначения

$$\|k\|_T := \sup_{(x,t)\in D(T)} |k(x,t)|, \quad \Phi := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\lambda(x)|, \quad F(t) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x,t)|.$$

Для доказательства этой леммы заметим, что решение задачи Коши (16) удовлетворяет интегральному уравнению

$$p(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}}\lambda(\xi)d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}f(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\tau k(\xi,\tau-\alpha)p(\xi,\alpha)d\alpha d\xi d\tau.$$

С помощью стандартного приема оценок интегралов находим

$$U(t)=\Phi+\int_0^t F(\tau)d\tau+\|k\|_T\int_0^t\int_0^\tau U(\alpha)d\alpha d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\Phi+\int_0^t F(\tau)d\tau+\|k\|_T T\int_0^t U(\tau)d\tau,$$

где $U(t):=\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x,t)|$. Отсюда следует оценка (17).

Введем обозначение

$$\widetilde{K}(t):=\sup_{x\in\mathbb{R}}|\tilde{k}(x,t)|$$

и следующие нормы:

– $\|h_1\|:=\sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}|h_1(x,y)|$ для функций, зависящих от переменных (x,y);
– $\|h_2\|_T:=\sup\limits_{(x,t)\in D(T)}|h_2(x,t)|$ для функций, зависящих от переменных (x,t);
– $\|h_3\|^T:=\sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2,t\in[0,T]}|h_3(x,y,t)|$ для функций, зависящих от переменных (x,y,t).

Ниже будут использоваться введенные выше соответствующие нормы функций φ, φ_y, φ_{yy}, φ_{xy}, ψ_t, ω_2, ϑ_2, зависящих от разных переменных.

Используя лемму, для $\widetilde{\omega}$ из (11), (12) получим оценку

$$|\widetilde{\omega}(x,y,t)|\leqslant\int_0^t\left[\|\varphi_y\|\widetilde{K}(\tau)+\|\omega_2\|^T\int_0^\tau\widetilde{K}(\alpha)d\alpha\right]e^{\|k_1\|_T T(t-\tau)}d\tau\leqslant$$
$$\leqslant(\|\varphi_y\|+T\|\omega_2\|^T)\int_0^t\widetilde{K}(\tau)e^{\|k_1\|_T T(t-\tau)}d\tau. \quad (18)$$

Аналогично из равенств (13), (14), согласно (17), получим оценку для $\widetilde{\vartheta}$:

$$|\widetilde{\vartheta}(x,y,t)|\leqslant\int_0^t\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\Big|\tilde{k}(x,\tau)(2\varphi_{xy}(x,y)+\varphi_{yy}(x,y))+2\tilde{k}_x(x,\tau)\varphi_y(x,y)+$$
$$+\int_0^\tau\tilde{k}(x,\gamma)\vartheta_2(x,y,\tau-\gamma)d\gamma+2\int_0^\tau\tilde{k}_x(x,\gamma)\omega(x,y,\tau-\gamma)d\gamma+$$
$$+\int_0^\tau k_{1x}(x,\gamma)\widetilde{\omega}(x,y,\tau-\gamma)d\gamma\Big|e^{T\|k_1\|_T(t-\tau)}d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\left[\|\varphi_{yy}\|+2\|\varphi_{xy}\|+T\|\vartheta_2\|^T\right]\int_0^t\widetilde{K}(\tau)e^{\|k_1\|_T T(t-\tau)}d\tau+$$
$$+\int_0^t\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\Big|2\tilde{k}_x(x,\tau)\varphi_y(x,y)+2\int_0^\tau\tilde{k}_x(x,\gamma)\omega_2(x,y,\tau-\gamma)d\gamma+$$
$$+2\int_0^\tau k_{1x}(x,\tau-\gamma)\widetilde{\omega}(x,y,\tau-\gamma)d\gamma\Big|e^{\|k_1\|_T T(t-\tau)}d\tau. \quad (19)$$

Согласно лемме 2 из работы [9], для любой функции $k(x,t)$, представимой в виде (5), существует такая постоянная $K_0 > 0$ (вообще говоря, своя для каждой функции k), что имеет место неравенство

$$|k_x(x,t)| \leqslant K_0 K(t), \quad K(t) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |k(x,t)|. \tag{20}$$

Доказательство этой леммы в [14] основано на предположении, что систему функций a_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, можно считать линейно независимой в $\mathbb{R}$ (в противном случае можно в (5) произвести перегруппировку членов, оставив только линейно независимую систему функций a_i), и на проведении очевидных оценок.

Так как функции k_1, k_2, по предположению, представимы в виде

$$k(x,t) = \sum_{i=0}^{N} a_i(x) b_i(t),$$

функция $\tilde{k}$ также представима в этом виде. Поэтому для нее существует своя аналогичная постоянная K_{00} и выполняется неравенство

$$|\tilde{k}_x(x,t)| \leqslant K_{00} \widetilde{K}(t).$$

Для оценки функций $k_{1x}(x,t)$, $\tilde{k}_x(x,t)$ в (19) воспользуемся (20) и последним неравенством. С учетом этого и оценки (18) оценке (19) можно придать вид

$$|\widetilde{\vartheta}(x,y,t)| \leqslant N(T, K_0, K_{00}) \int_0^t \widetilde{K}(\tau) d\tau, \tag{21}$$

где

$$N(T,K_0,K_{00}) := \Big[\|\varphi_{yy}\| + 2\|\varphi_{xy}\| + T\|\vartheta_2\|^T + 2K_{00}\left(\|\varphi_y\| + T\|\omega_2\|^T\right) + \\ + 2K_0\|k_1\|_T\left(\|\varphi_y\| + T\|\omega_2\|^T\right) e^{\|k_1\|_T T^2}\Big] e^{\|k_1\|_T T^2}.$$

Из равенства (15) с учетом (4), (21) получаем

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |\tilde{k}(y,t)\varphi(y,y) + \int_0^t \tilde{k}(y,\tau)\psi_t(y,t-\tau)d\tau| \leqslant N(T,K_0,K_{00}) \int_0^t \widetilde{K}(\tau)d\tau.$$

Отсюда

$$\widetilde{K}(t) \leqslant \frac{1}{\mu_0}\left[N(T,K_0,K_{00}) + \|\psi_t\|_T\right] \int_0^t \widetilde{K}(\tau)d\tau.$$

Из последнего неравенства вытекает, что $\tilde{k} \equiv 0$, т. е. $k_1(x,t) = k_2(x,t)$ для $(x,t) \in D(T)$. Теорема доказана.

ORCID
Дурдимурод Каландарович Дурдиев: http://orcid.org/0000-0002-6054-2827

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дурдиев Д. К., Рашидов А. Ш. Обратная задача определения ядра в одном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа // *Дифференц. уравнения*, 2014. Т. 50, № 1. С. 110–116. doi: 10.1134/S0374064114010142.
2. Kasemets K., Janno J. Inverse problems for a parabolic integro-differential equation in convolutional weak form // *Abstract and Applied Analysis*, 2013. vol. 2013, 297104. 16 pp. doi: 10.1155/2013/297104.
3. von Wolfersdorf L., Janno J. On the theory of convolution equations of the third kind, II // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008. vol. 342, no. 2. pp. 838–863. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.12.042.
4. Janno J., von Wolfersdorf L. Identification of memory kernels in one-dimensional heat flow with boundary conditions of the third kind // *Inverse Problems in Engineering*, 2001. vol. 9, no. 2. pp. 175–198. doi: 10.1080/174159701088027760.
5. Janno J., von Wolfersdorf L. An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel of a special kind in heat conduction // *Inverse problems*, 1999. vol. 15, no. 6. pp. 1455–1467. doi: 10.1088/0266-5611/15/6/305.
6. Janno J., von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 1996. vol. 4, no. 1. pp. 39–66. doi: 10.1515/jiip.1996.4.1.39.
7. Романов В. Г. *Обратные задачи математической физики*. М.: Наука, 1984. 264 с.
8. Прилепко А. И., Костин А. Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. I // *Сиб. матем. журн.*, 1992. Т. 33, № 3. С. 146–155.
9. Прилепко А. И., Костин А. Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II // *Сиб. матем. журн.*, 1993. Т. 34, № 5. С. 147–162.
10. Искендеров А. Д. Многомерные обратные задачи для линейных и нелинейных параболических уравнений // *ДАН СССР*, 1975. Т. 225, № 5. С. 1005–1008.
11. Безнощенко Н. Я. Об определении коэффициента в параболическом уравнении // *Дифференц. уравнения*, 1974. Т. 10, № 1. С. 24–35.
12. Безнощенко Н. Я. Об определении коэффициента при младших членах в параболическом уравнении // *Сиб. матем. журн.*, 1975. Т. 16, № 3. С. 473–482.
13. Романов В. Г. Абстрактная обратная задача и вопросы ее корректности // *Функц. анализ и его прил.*, 1973. Т. 7, № 3. С. 67–74.
14. Романов В. Г. Об одной теореме единственности для задачи интегральной геометрии на семействе кривых / *Математические проблемы геофизики*, Вып. 4. Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР, 1973. С. 140–146.

Поступила в редакцию 21/VII/2015;
в окончательном варианте — 17/XI/2015;
принята в печать — 24/XI/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 658–666

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1444

MSC: 45Q05, 45K05

ON THE UNIQUENESS OF KERNEL DETERMINATION IN THE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF PARABOLIC TYPE

D. K. Durdiev

Bukhara State University,
11, Muhammad Igbol st, Bukhara, 200100, Uzbekistan.

Abstract

We study the problem of determining the kernel of the integral term in the one-dimensional integro-differential equation of heat conduction from the known solution of the Cauchy problem for this equation. First, the original problem is replaced by the equivalent problem where an additional condition contains the unknown kernel without integral. We study the question of the uniqueness of the determining of the kernel. Next, assuming that there are two solutions $k_1(x,t)$ and $k_2(x,t)$, integro-differential equations, Cauchy and additional conditions for the difference of solutions of the Cauchy problem corresponding to the functions $k_1(x,t)$, $k_2(x,t)$ are obtained. Further research is being conducted for the difference $k_1(x,t) - k_2(x,t)$ of solutions of the problem and using the techniques of integral equations estimates it is shown that if the unknown kernel $k(x,t)$ can be represented as $k_j(x,t) = \sum_{i=0}^{N} a_i(x)b_i(t)$, $j = 1, 2$, then $k_1(x,t) \equiv k_2(x,t)$. Thus, the theorem on the uniqueness of the solution of the problem is proved.

Keywords: inverse problem, parabolic equation, Cauchy problem, integral equation, uniqueness.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1444

ORCID
Durdimurod K. Durdiev: http://orcid.org/0000-0002-6054-2827

REFERENCES

1. Durdiev D. K., Rashidov A. Sh. Inverse problem of determining the kernel in an integro-differential equation of parabolic type, *Differ. Equ.*, 2014, vol. 50, no. 1, pp. 110–116. doi: 10.1134/S0012266114010145.
2. Kasemets K., Janno J. Inverse problems for a parabolic integro-differential equation in convolutional weak form, *Abstract and Applied Analysis*, 2013, vol. 2013, 297104. 16 pp. doi: 10.1155/2013/297104.

Please cite this article in press as:
Durdiev D. K. On the uniqueness of kernel determination in the integro-differential equation of parabolic type, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 658–666. doi: 10.14498/vsgtu1444. (In Russian)

Author Details:
Durdimurod K. Durdiev (Dr. Phys. & Math. Sci. durdiev65@mail.ru), Professor, Dept. of Differential Equations and Analysis; Vice-Rector for Academic Affairs.

3. von Wolfersdorf L., Janno J. On the theory of convolution equations of the third kind, II, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, vol. 342, no. 2, pp. 838–863. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.12.042.
4. Janno J., von Wolfersdorf L. Identification of memory kernels in one-dimensional heat flow with boundary conditions of the third kind, *Inverse Problems in Engineering*, 2001, vol. 9, no. 2, pp. 175–198. doi: 10.1080/174159701088027760.
5. Janno J., von Wolfersdorf L. An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel of a special kind in heat conduction, *Inverse problems*, 1999, vol. 15, no. 6, pp. 1455–1467. doi: 10.1088/0266-5611/15/6/305.
6. Janno J., von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 1996, vol. 4, no. 1, pp. 39–66. doi: 10.1515/jiip.1996.4.1.39.
7. Romanov V. G. *Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki* [Inverse problems of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1984, 264 pp. (In Russian)
8. Prilepko A. I., Kostin A. B. Inverse problems of the determination of the coefficient in parabolic equations. I, *Sib. Math. J.*, 1992, vol. 33, no. 3, pp. 489–496. doi: 10.1007/BF00970897.
9. Prilepko A. I., Kostin A. B. On inverse problems of determining a coefficient in a parabolic equation. II, *Siberian Math. J.*, 1993, vol. 34, no. 5, pp. 923–937. doi: 10.1007/BF00971406.
10. Iskenderov A. D. Multidimensional inverse problems for linear and quasi-linear parabolic equations, *Sov. Math., Dokl.*, 1975, vol. 16, no. 5, pp. 1564–1568.
11. Beznoshchenko N. Ya. On determining the coefficient in a parabolic equation, *Differ. Uravn.*, 1974, vol. 10, no. 1, pp. 24–35 (In Russian).
12. Beznoshchenko N. Ya. Determination of coefficients of higher terms in a parabolic equation, *Siberian Math. J.*, 1975, vol. 16, no. 3, pp. 360–367. doi: 10.1007/BF00967526.
13. Romanov V. G. An abstract inverse problem and questions of its uniqueness, *Funct. Anal. Appl.*, 1973, vol. 7, no. 3, pp. 223–229. doi: 10.1007/BF01080700.
14. Romanov V. G. On one uniqueness theorem for an integral geometry problem on a set of curves, *Matematicheskie problemy geofiziki* [Mathematical Problems of Geophysics], Issue 4. Novosibirsk, Computing Center, Siberian Branch of the USSR Acad. Sci., 1973, pp. 140–146 (In Russian).

Received 21/VII/2015;
received in revised form 17/XI/2015;
accepted 24/XI/2015.