Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 3. С. 489–503
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1362

УДК 517.958

ДИСКРЕТНЫЙ И НЕПРЕРЫВНЫЙ СЛУЧАИ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В СРЕДЕ С ПАМЯТЬЮ*

А. Н. Царицанский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Россия, 119899, Москва, Воробьёвы горы.

Аннотация

В работе рассматривается волновое уравнение для среды с памятью, полученное при исследовании усредненных моделей комбинированных сред и описывающее одномерный вариант закона Кельвина—Фойгхта вязкоупругих колебаний комбинированных сред. Задача состоит в определении функции, с физической точки зрения отвечающей за среднее смещение материала. Для этого с помощью формулы распространяющихся волн строится решение через общее решение системы первого порядка, в которой каждое уравнение является уравнением переноса вдоль соответствующей характеристики. Основной результат сформулирован в виде двух теорем для дискретной и непрерывной модификации уравнения. В работе также содержатся наглядные соображения, приводящие к построению классического решения уравнений.

Ключевые слова: волновое уравнение в неоднородной среде с памятью, формула распространяющихся волн, система переноса.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1362

1. Постановка задачи в дискретном случае. Рассматривается один из вариантов волнового уравнения для среды с памятью [2]

$$u_{tt} = ku_{xx} + \alpha u_{txx} + \sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^t \exp\left\{-\lambda_i(t-\tau)\right\} u_{xx}(\tau, x) d\tau, \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

полученного при исследовании усредненных моделей комбинированных сред и описывающего одномерный вариант закона Кельвина—Фойгхта вязкоупругих колебаний комбинированных сред. В этом уравнении необходимо по известным постоянным коэффициентам c_i, ненулевому параметру α и показателям λ_i определить среднее смещение материала $u(t,x)$. В данной работе

Образец для цитирования
Царицанский А. Н. Дискретный и непрерывный случаи в задаче о распространении волн в среде с памятью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 3. С. 489–503. doi: 10.14498/vsgtu1362.

Сведения об авторе
Анатолий Николаевич Царицанский (TsaritsanskiiAN@gmail.com), аспирант, каф. дифференциальных уравнений.

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного авторами на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

для уравнения (1) делается попытка построить аналог формулы распространяющихся волн. Формула распространяющихся волн позволяет представить решение системы дифференциальных уравнений явным образом через общее решение системы первого порядка, в которой каждое уравнение является уравнением переноса вдоль соответствующей характеристики.

Для уравнения (1) при $\alpha = 0$ и $k = h^2$ в [3] при некоторых дополнительных условиях получено классическое решение в двух случаях:

– при $S := \sum_{i=1}^{n} (\delta_i/\lambda_i) \neq -1$ функции

$$\begin{cases} u(t,s) = f^-(t,s) + f^+(t,s), \\ v^{\{i\}}(t,s) = -\lambda_i f^-(t,s) - \lambda_i f^+(t,s) + \lambda_i f^{\{i\}}(t,s) - \\ \qquad - {f^-}_s(t,s) + {f^+}_s(t,s), \quad i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$v^{\{i\}}(t,s) = h^2 \int_0^t \exp\{-\lambda_i(t-\tau)\}\, u_{ss}(\tau,s)d\tau, \quad i = \overline{1,n},$$

$\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$, а $f^\beta(t,s)$ $(\beta \in \{+,-,1,\ldots,n\})$ являются классическим решением системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{cases} {f^-}_t(t,s) + {f^-}_s(t,s) = \dfrac{\delta}{2} f^-(t,s) + \dfrac{\delta}{2} f^+(t,s) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_i f^{\{i\}}(t,s), \\ {f^+}_t(t,s) - {f^+}_s(t,s) = \dfrac{\delta}{2} f^-(t,s) + \dfrac{\delta}{2} f^+(t,s) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_i f^{\{i\}}(t,s), \\ {f^{\{i\}}}_t(t,s) = (\lambda_i + \delta) f^-(t,s) + (\lambda_i + \delta) f^+(t,s) - \lambda_i f^{\{i\}}(t,s) - \\ \qquad - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \delta_j f^{\{j\}}(t,s), \quad i = \overline{1,n}; \end{cases}$$

– при $S = -1$ функции

$$\begin{cases} u(t,s) = f^-(t,s) + f^+(t,s) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_i f^{\{i\}}(t,s), \\ v^{\{i\}}(t,s) = {f^{\{i\}}}_{ss}(t,s), \quad i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{3}$$

где $f^\beta(t,s)$ $(\beta \in \{+,-,1,\ldots,n\})$ являются классическим решением системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{cases} {f^-}_t(t,s) + {f^-}_s(t,s) = \dfrac{\delta}{2} f^-(t,s) + \dfrac{\delta}{2} f^+(t,s) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_i (\lambda_i + \delta) f^{\{i\}}(t,s), \\ {f^+}_t(t,s) - {f^+}_s(t,s) = \dfrac{\delta}{2} f^-(t,s) + \dfrac{\delta}{2} f^+(t,s) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_i (\lambda_i + \delta) f^{\{i\}}(t,s), \\ {f^{\{i\}}}_t(t,s) = f^-(t,s) + f^+(t,s) - \lambda_i f^{\{i\}}(t,s) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \delta_j f^{\{j\}}(t,s), \quad i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Как будет показано ниже, случай $\alpha \neq 0$ дает принципиально иное представление решения.

2. Основной результат в дискретном случае. Для получения формулы распространяющихся волн уравнения (1) преобразуем его для простоты к дифференциальной форме. Для этого обозначим

$$v^{\{i\}}(t,x) = \int_0^t \exp\{-\lambda_i(t-\tau)\}\, u_{xx}(\tau,x)d\tau, \quad i=\overline{1,n},$$

после чего (1) оказывается эквивалентно системе

$$\begin{cases} u_{tt} - \dfrac{\alpha}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} v_{tt}^{\{i\}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{k+\alpha\lambda_i}{n} v_t^{\{i\}} + \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i v^{\{i\}}, \\ u_{ss} = v_t^{\{i\}} + \lambda_i v^{\{i\}}, \quad i \in \{1,n\} \end{cases} \tag{4}$$

в предположении $u(t,s) \in C^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $v^{\{i\}}(0,s) = 0$ и обозначении $\delta_i = c_i + k\lambda_i/n$, $i=\overline{1,n}$.

Теорема 1. *Если функции $f^{1,2}(t,s)$, $g^i(t,s)$, $r^i(t,s)$ $\big(i=\overline{1,n}\big)$ являются классическим решением*

$$\begin{cases} {f^1}_s(t,s) = \dfrac{1}{\alpha} f^2(t,s), \\ {f^2}_s(t,s) - {f^1}_t(t,s) = -\dfrac{k}{\alpha} f^1(t,s) - \dfrac{k}{\alpha n}\sum\limits_{j=1}^{n} g^j(t,s) - \dfrac{1}{\alpha}\sum\limits_{j=1}^{n} r^j(t,s), \\ {g^i}_t(t,s) = -\Big(\dfrac{k}{\alpha}+\lambda_i\Big) f^1(t,s) - \dfrac{k}{\alpha n}\sum\limits_{j=1}^{n} g^j(t,s) - \\ \qquad - \dfrac{1}{\alpha}\sum\limits_{j=1}^{n} r^j(t,s) - \lambda_i g^i(t,s), \quad i=\overline{1,n}, \\ {r^i}_t(t,s) = \delta_i f^1(t,s) + \delta_i g^i(t,s), \quad i=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{5}$$

удовлетворяющим дополнительному условию

$$f^1(t,s) \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}), \quad g^i(t,s) \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}), \quad i=\overline{1,n}, \tag{6}$$

то функции

$$\begin{cases} u(t,s) = \alpha f^1(t,s), \\ v^{\{i\}}(t,s) = f^1(t,s) + g^i(t,s), \quad i=\overline{1,n} \end{cases} \tag{7}$$

являются классическим решением (4).

Обратно: если функции $u(t,s)$, $v^{\{i\}}(t,s)$, $i=\overline{1,n}$ являются классическим *решением* (4), *то функции*

$$\begin{cases} f^1(t,s) = \dfrac{1}{\alpha} u(t,s), \\ f^2(t,s) = u_s(t,s), \\ g^i(t,s) = v^{\{i\}} - \dfrac{1}{\alpha} u(t,s), \quad i = \overline{1,n}, \\ r^i(t,s) = \delta_i \displaystyle\int_0^t v^{\{i\}}(\tau,s)d\tau + C_i(s), \quad i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{8}$$

где $C_i(s) \in C^1(\mathbb{R})$ *таковы, что*

$$\sum_{i=1}^n C_i(s) = u_t(0,s) - \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n v_t^{\{i\}}(0,s) - \frac{k + \alpha\lambda_i}{n} \sum_{i=1}^n v^{\{i\}}(0,s),$$

являются классическим решением (5) *и удовлетворяют дополнительному условию* (6).

Система (5) описывает перенос и перераспределение между собой $2n+2$ волн $f^1(t,s)$, $f^2(t,s)$, $g^i(t,s)$, $r^i(t,s)$ ($i = \overline{1,n}$). В отличие от (2) и (3), уравнения которых имели гиперболический вид, первые два уравнения в (5) имеют параболический вид. Действительно, если из первых двух уравнений исключить функцию $f^2(t,s)$, то в левой части уравнения получим оператор теплопроводности.

3. Доказательство теоремы 1. Непосредственной подстановкой выражений (7) в (4) убеждаемся в том, что (7) с функциями $f^{1,2}(t,s)$, $g^i(t,s)$, $r^i(t,s)$, $i = \overline{1,n}$, являющимися классическим решением (5), удовлетворяет системе (4). Кроме того, если выполняются условия (6), то в соответствии с (7) $u(t,s)$, $v^{\{i\}}(t,s) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Таким образом, функции (7) являются классическим решением (4), и первая часть теоремы доказана.

Покажем справедливость второго утверждения теоремы. Рассмотрим произвольное решение (4). Данное решение при каждом t однозначно определяет значения

$$u(t,s), \qquad v^{\{i\}}(t,s). \tag{9}$$

Построим решение системы переноса (5) так, чтобы функции (7) удовлетворяли (9):

$$\begin{cases} \alpha f^1(t,s) = u(t,s), \\ f^1(t,s) + g^i(t,s) = v^{\{i\}}(t,s), \quad i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Входящие в эти условия функции $f^1(t,s)$, $g^i(t,s)$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяющие (5), определяются однозначно, а из системы (5) однозначно (с точностью до аддитивных функций $C_i(s)$) определяются остальные функции $f^2(t,s)$, $r^i(t,s)$, имеющие вид (8).

Непосредственная подстановка подтверждает, что определенные в (8) функции удовлетворяют системе (5). А ввиду того, что $u(t,s)$, $v^{\{i\}}(t,s)$, $i = \overline{1,n}$ являются классическим решением (4), согласно выражениям (8), дополнительное условие (6) выполняется, что и завершает доказательство теоремы.

4. Вывод основного результата в дискретном случае. Несмотря на то, что доказательство теоремы кажется довольно простым, главная сложность при получении результата заключается в нахождении уравнений (5) и (7). Для того чтобы пояснить, откуда и как появились данные соотношения, мы приведем их вывод.

Для нахождения характеристик системы (4) и применения формулы распространяющихся волн приведем её к системе уравнений с частными производными первого порядка

$$\begin{cases} u_s = p, \\ u_t - \dfrac{\alpha}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_t^{\{i\}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k+\alpha\lambda_i}{n} v^{\{i\}} + \sum_{i=1}^{n} q^{\{i\}}, \\ q_t^{\{i\}} = \delta_i v^{\{i\}}, \quad i \in \{1, n\}, \\ p_s = v_t^{\{i\}} + \lambda_i v^{\{i\}}, \quad i \in \{1, n\}. \end{cases} \tag{10}$$

4.1. Случай $n = 1$. Первоначально рассмотрим случай $n = 1$, в котором применение метода распространяющихся волн, опирающегося на представление функций $u(t,s)$, $p(t,s)$, $v^{\{1\}}(t,s)$, $q^{\{1\}}(t,s)$ в виде комбинации четырех волн, соответствующих характеристикам системы (10) (две $t = \text{const}$ и две $s = \text{const}$), дает анзац

$$\begin{cases} u(t,s) = a^{11} f^1(t,s) + a^{12} f^2(t,s) + a^{13} g^1(t,s) + a^{14} r^1(t,s), \\ p(t,s) = a^{21} f^1(t,s) + a^{22} f^2(t,s) + a^{23} g^1(t,s) + a^{24} r^1(t,s), \\ v^{\{1\}}(t,s) = b^{11} f^1(t,s) + b^{12} f^2(t,s) + b^{13} g^1(t,s) + b^{14} r^1(t,s), \\ q^{\{1\}}(t,s) = d^{11} f^1(t,s) + d^{12} f^2(t,s) + d^{13} g^1(t,s) + d^{14} r^1(t,s), \end{cases} \tag{11}$$

где функции $f^{1,2}(t,s), g^1(t,s), r^1(t,s)$ являются общим решением системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{cases} {f^1}_s(t,s) = c^{11} f^1(t,s) + c^{12} f^2(t,s) + c^{13} g^1(t,s) + c^{14} r^1(t,s), \\ {f^2}_s(t,s) = c^{21} f^1(t,s) + c^{22} f^2(t,s) + c^{23} g^1(t,s) + c^{24} r^1(t,s), \\ {g^1}_t(t,s) = c^{31} f^1(t,s) + c^{32} f^2(t,s) + c^{33} g^1(t,s) + c^{34} r^1(t,s), \\ {r^1}_t(t,s) = c^{41} f^1(t,s) + c^{42} f^2(t,s) + c^{43} g^1(t,s) + c^{44} r^1(t,s). \end{cases} \tag{12}$$

К сожалению, подстановка (11), в которой функции $f^{1,2}(t,s), g^1(t,s), r^1(t,s)$ являются общим решением системы (12), в систему (10) дает только нулевое решение, поэтому мы модифицируем форму (12) к виду

$$\begin{cases} {f^1}_s(t,s) = c^{11} f^1(t,s) + c^{12} f^2(t,s) + c^{13} g^1(t,s) + c^{14} r^1(t,s), \\ {f^2}_s(t,s) - {f^1}_t(t,s) = c^{21} f^1(t,s) + c^{22} f^2(t,s) + c^{23} g^1(t,s) + c^{24} r^1(t,s), \\ {g^1}_t(t,s) = c^{31} f^1(t,s) + c^{32} f^2(t,s) + c^{33} g^1(t,s) + c^{34} r^1(t,s), \\ {r^1}_t(t,s) = c^{41} f^1(t,s) + c^{42} f^2(t,s) + c^{43} g^1(t,s) + c^{44} r^1(t,s). \end{cases} \tag{13}$$

Подставляя выражения из (11) в систему (4), используя равенства (13) и затем упрощая, получаем

$$
\begin{cases}
\left(-a^{21}+a^{11}c^{11}\right)f^1+\left(-a^{22}+a^{11}c^{12}\right)f^2+\left(-a^{23}+a^{11}c^{13}\right)g^1+\\
\qquad+\left(-a^{24}+a^{11}c^{14}\right)r^1+a^{12}{f^2}_s+a^{13}{g^1}_s+a^{14}{r^1}_s=0,\\
\left(\left(k+\alpha\lambda_1\right)b^{11}+d^{11}+a^{11}c^{21}-\alpha b^{11}c^{21}-a^{13}c^{31}+\alpha b^{13}c^{31}-a^{14}c^{41}+\right.\\
\qquad\left.+\alpha b^{14}c^{41}\right)f^1+\left(\left(k+\alpha\lambda_1\right)b^{12}+d^{12}+a^{11}c^{22}-\alpha b^{11}c^{22}-a^{13}c^{32}+\right.\\
\qquad\left.+\alpha b^{13}c^{32}-a^{14}c^{42}+\alpha b^{14}c^{42}\right)f^2+\left(\left(k+\alpha\lambda_1\right)b^{13}+d^{13}+a^{11}c^{23}-\right.\\
\qquad\left.-\alpha b^{11}c^{23}-a^{13}c^{33}+\alpha b^{13}c^{33}-a^{14}c^{43}+\alpha b^{14}c^{43}\right)g^1+\\
\qquad+\left(\left(k+\alpha\lambda_1\right)b^{14}+d^{14}+a^{11}c^{24}-\alpha b^{11}c^{24}-a^{13}c^{34}+\alpha b^{13}c^{34}-\right.\\
\qquad\left.-a^{14}c^{44}+\alpha b^{14}c^{44}\right)r^1-\left(a^{12}-\alpha b^{12}\right){f^2}_t-\left(a^{11}-\alpha b^{11}\right){f^2}_s=0,\\
\left(\delta_1 b^{11}+d^{11}c^{21}-d^{13}c^{31}-d^{14}c^{41}\right)f^1+\left(\delta_1 b^{12}+d^{11}c^{22}-d^{13}c^{32}-d^{14}c^{42}\right)f^2+\\
\qquad+\left(\delta_1 b^{13}+d^{11}c^{23}-d^{13}c^{33}-d^{14}c^{43}\right)g^1+\\
\qquad+\left(\delta_1 b^{14}+d^{11}c^{24}-d^{13}c^{34}-d^{14}c^{44}\right)r^1-d^{12}{f^2}_t-d^{11}{f^2}_s=0,\\
\left(\lambda_1 b^{11}-a^{21}c^{11}-b^{11}c^{21}+b^{13}c^{31}+b^{14}c^{41}\right)f^1+\left(\lambda_1 b^{12}-a^{21}c^{12}-b^{11}c^{22}+\right.\\
\qquad\left.+b^{13}c^{32}+b^{14}c^{42}\right)f^2+\left(\lambda_1 b^{13}-a^{21}c^{13}-b^{11}c^{23}+b^{13}c^{33}+b^{14}c^{43}\right)g^1+\\
\qquad+\left(\lambda_1 b^{14}-a^{21}c^{14}-b^{11}c^{24}+b^{13}c^{34}+b^{14}c^{44}\right)r^1-\left(a^{22}-b^{11}\right){f^2}_s-\\
\qquad-a^{23}{g^1}_s-a^{24}{r^1}_s+b^{12}{f^2}_t=0.
\end{cases}
\tag{14}
$$

Рассмотрим систему (14). Равенства, входящие в нее, должны выполняться тождественно для всех (t,s) и любых решений $f^{1,2}(t,s)$, $g^1(t,s)$, $r^1(t,s)$ системы (13). Для того чтобы, пользуясь этой произвольностью, получить уравнения на коэффициенты, зафиксируем на время произвольный момент времени t и произвольную точку пространства s. Тогда равенства (14) превратятся в алгебраические, выполненные тождественно для всех $f^{1,2}$, g^1, r^1, ${f^{1,2}}_s$, ${g^1}_s$, ${r^1}_s$, ${f^{1,2}}_t$, ${g^1}_t$, ${r^1}_t$. Причем эти величины независимы между собой и могут принимать произвольные значения (для любого набора этих величин найдутся функции $f^{1,2}(s)$, $g^1(s)$, $r^1(s)$, имеющие в зафиксированной нами точке эти значения и значения производных, а взяв её в качестве начального условия системы (13) при выбранном нами t, мы получим решение (13), имеющее в (t,s) соответствующие значения функций $f^{1,2}(t,s)$, $g^1(t,s)$, $r^1(t,s)$ и их производных), поэтому коэффициенты при этих величинах должны обращаться в 0. Исходя из этого получаем следующие соотношения:

$$
\begin{cases}
a^{12}=0,\quad a^{13}=0,\quad a^{14}=0,\quad a^{23}=0,\quad a^{24}=0,\\
b^{12}=0,\quad d^{11}=0,\quad d^{12}=0,\\
a^{11}-\alpha b^{11}=0,\quad a^{22}-b^{11}=0,\\
A_2-C\cdot G\cdot A_1=0,\\
\left(k+\alpha\lambda_1\right)B_1+D_1-C\cdot F\left(A_1-\alpha B_1\right)=0,\\
\delta_1 B_1-C\cdot F\cdot D_1=0,\\
\lambda_1 B_1-C\cdot G\cdot A_2+C\cdot F\cdot B_1=0,
\end{cases}
\tag{15}
$$

где введены обозначения

$$A_1 := \begin{pmatrix} a^{11} \\ a^{12} \\ a^{13} \\ a^{14} \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} a^{21} \\ a^{22} \\ a^{23} \\ a^{24} \end{pmatrix}, \quad B_1 := \begin{pmatrix} b^{11} \\ b^{12} \\ b^{13} \\ b^{14} \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c^{11} & c^{21} & c^{31} & c^{41} \\ c^{12} & c^{22} & c^{32} & c^{42} \\ c^{13} & c^{23} & c^{33} & c^{43} \\ c^{14} & c^{24} & c^{34} & c^{44} \end{pmatrix},$$

$$D_1 := \begin{pmatrix} d^{11} \\ d^{12} \\ d^{13} \\ d^{14} \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Воспользуемся тем, что анзац (11), (13) в некотором смысле избыточен: одно и то же решение $(u, p, v^{\{1\}}, q^{\{1\}})$ можно представить в виде (11), (13) разными способами. Очевидно, что при замене $\hat{s} = -s$, $\hat{p} = -p$, $\hat{f}^1 = -f^1$ получится такая же система (10) и представление (11), (13), только с другими коэффициентами:

$$\hat{a}^{12} = -a^{12}, \quad \hat{a}^{21} = -a^{21}, \quad \hat{a}^{23} = -a^{23}, \quad \hat{a}^{24} = -a^{24},$$
$$\hat{b}^{12} = -b^{12}, \quad \hat{d}^{12} = -d^{12}, \quad \hat{c}^{11} = -c^{11}, \quad \hat{c}^{13} = -c^{13},$$
$$\hat{c}^{14} = -c^{14}, \quad \hat{c}^{22} = -c^{22}, \quad \hat{c}^{32} = -c^{32}, \quad \hat{c}^{42} = -c^{42}.$$

Поэтому, не ограничивая общности, данные коэффициенты можно занулить.

Кроме того, замена

$$f^1(t,s) = w\hat{f}^1(t,s), \quad f^2(t,s) = w\hat{f}^2(t,s)$$

также оставляет (11), (13) в таком виде, но с другими коэффициентами: a^{11}, $a^{22}, b^{11}, d^{11}, c^{31}$, c^{41} (они умножаются на w), c^{23}, c^{24} (они делятся на w). Поэтому, если $a^{11} \neq 0$, то его для наиболее простой формы представления окончательного результата предпочтительнее задать $a^{11} = \alpha$.

Также при замене

$$f^2(t,s) = \hat{f}^2(t,s) + wf^1(t,s)$$

и дальнейшем вычитании из второго уравнения системы (13) первого, умноженного на w, получится такое же представление (11), (13), только с другими коэффициентами: $a^{11}, a^{21}, b^{11}, d^{11}$, c^{11}, c^{31}, c^{41} (к ним прибавится w, умноженный на коэффициент при функции f^2 в соответствующем уравнении), c^{22}, c^{23}, c^{24} и $\hat{c}^{21} = c^{21} + w(c^{22} - c^{12})$. Поэтому, не ограничивая общности, можно сразу задать значение c^{21}. Хотя на первый взгляд кажется, что его удобнее взять нулем, для наиболее простой формы представления окончательного результата предпочтительнее задать следующее значение: $c^{21} = -k/\alpha$.

Решая с учетом вышеизложенного систему алгебраических уравнений (15) (с помощью программы `Maple 18`), получаем

$$\begin{cases} u(t,s) = \alpha f^1(t,s), \\ p(t,s) = f^2(t,s), \\ v^{\{i\}}(t,s) = f^1(t,s) + g^1(t,s), \\ q^{\{i\}}(t,s) = r^1(t,s), \end{cases} \tag{17}$$

где функции $f^1(t,s),\ f^2(t,s),\ g^1(t,s), r^1(t,s)$ являются общим решением системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{cases} {f^1}_s(t,s) = \dfrac{1}{\alpha} f^2(t,s), \\ {f^2}_s(t,s) - {f^1}_t(t,s) = -\dfrac{k}{\alpha} f^1(t,s) - \dfrac{k}{\alpha n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} g^j(t,s) - \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} r^j(t,s), \\ {g^i}_t(t,s) = -\Big(\dfrac{k}{\alpha} + \lambda_i\Big) f^1(t,s) - \dfrac{k}{\alpha n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} g^j(t,s) - \\ \qquad - \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} r^j(t,s) - \lambda_i g^i(t,s), \quad i=\overline{1,n}, \\ {r^i}_t(t,s) = \delta_i f^1(t,s) + \delta_i g^i(t,s), \quad i=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{18}$$

4.2. Случай $n = 2$. В этом случае решение системы (10) ищется в виде, подобном (11)–(13):

$$\begin{cases} u(t,s) = a^{11} f^1(t,s) + a^{12} f^2(t,s) + a^{13} g^1(t,s) + a^{14} g^2(t,s) + \\ \qquad + a^{15} r^1(t,s) + a^{16} r^2(t,s), \\ p(t,s) = a^{21} f^1(t,s) + a^{22} f^2(t,s) + a^{23} g^1(t,s) + a^{24} g^2(t,s) + \\ \qquad + a^{25} r^1(t,s) + a^{26} r^2(t,s), \\ v^{\{1\}}(t,s) = b^{11} f^1(t,s) + b^{12} f^2(t,s) + b^{13} g^1(t,s) + b^{14} g^2(t,s) + \\ \qquad + b^{15} r^1(t,s) + b^{16} r^2(t,s), \\ v^{\{2\}}(t,s) = b^{21} f^1(t,s) + b^{22} f^2(t,s) + b^{23} g^1(t,s) + b^{24} g^2(t,s) + \\ \qquad + b^{25} r^1(t,s) + b^{26} r^2(t,s), \\ q^{\{1\}}(t,s) = d^{11} f^1(t,s) + d^{12} f^2(t,s) + d^{13} g^1(t,s) + d^{14} g^2(t,s) + \\ \qquad + d^{15} r^1(t,s) + d^{16} r^2(t,s), \\ q^{\{2\}}(t,s) = d^{21} f^1(t,s) + d^{22} f^2(t,s) + d^{23} g^1(t,s) + d^{24} g^2(t,s) + \\ \qquad + d^{25} r^1(t,s) + d^{26} r^2(t,s), \end{cases} \tag{19}$$

где функции $f^{1,2}(t,s), g^{1,2}(t,s), r^{1,2}(t,s)$ являются общим решением системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$
\begin{cases}
\begin{aligned}
{f^1}_s(t,s) &= c^{11}f^1(t,s)+c^{12}f^2(t,s)+c^{13}g^1(t,s)+c^{14}g^2(t,s)+\\
&\quad + c^{15}r^1(t,s)+c^{16}r^1(t,s),\\
{f^2}_s(t,s)-{f^1}_t(t,s) &= c^{21}f^1(t,s)+c^{22}f^2(t,s)+c^{23}g^1(t,s)+c^{24}g^2(t,s)+\\
&\quad + c^{25}r^1(t,s)+c^{26}r^2(t,s),\\
{g^1}_t(t,s) &= c^{31}f^1(t,s)+c^{32}f^2(t,s)+c^{33}g^1(t,s)+c^{34}r^2(t,s)+\\
&\quad + c^{35}r^1(t,s)+c^{36}r^2(t,s),\\
{g^2}_t(t,s) &= c^{41}f^1(t,s)+c^{42}f^2(t,s)+c^{43}g^1(t,s)+c^{44}r^2(t,s)+\\
&\quad + c^{45}r^1(t,s)+c^{46}r^2(t,s),\\
{r^1}_t(t,s) &= c^{51}f^1(t,s)+c^{52}f^2(t,s)+c^{53}g^1(t,s)+c^{54}r^2(t,s)+\\
&\quad + c^{55}r^1(t,s)+c^{56}r^2(t,s),\\
{r^2}_t(t,s) &= c^{61}f^1(t,s)+c^{62}f^2(t,s)+c^{63}g^1(t,s)+c^{64}r^2(t,s)+\\
&\quad + c^{65}r^1(t,s)+c^{66}r^2(t,s),
\end{aligned}
\end{cases}
\tag{20}
$$

Аналогично случаю $n = 1$, данный случай сводится к системе алгебраических уравнений, являющейся естественным обобщением (15):

$$
\begin{cases}
a^{12}=0, \quad a^{13}=0, \quad a^{14}=0, \quad a^{15}=0, \quad a^{16}=0,\\
a^{23}=0, \quad a^{24}=0, \quad a^{25}=0, \quad a^{26}=0,\\
b^{12}=0, \quad b^{22}=0,\\
d^{11}=0, \quad d^{12}=0, \quad d^{21}=0, \quad d^{22}=0,\\
a^{11}-\dfrac{\alpha}{2}b^{11}-\dfrac{\alpha}{2}b^{21}=0, \quad a^{22}-b^{11}=0, \quad a^{22}-b^{21}=0,\\
A_2 - C\cdot G\cdot A_1 = 0,\\
\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\frac{k+\alpha\lambda_i}{2}B_i+\sum_{i=1}^{2}D_i - C\cdot F\left(A_1-\frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{2}B_i\right)=0,\\
\delta_i B_i - C\cdot F\cdot D_i = 0, \quad i=\overline{1,2},\\
\lambda_i B_i - C\cdot G\cdot A_2 + C\cdot F\cdot B_i = 0, \quad i=\overline{1,2},
\end{cases}
\tag{21}
$$

где, подобно (16), введены обозначения

$$
A_1 := \begin{pmatrix} a^{11}\\ a^{12}\\ a^{13}\\ a^{14}\\ a^{15}\\ a^{16}\end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} a^{21}\\ a^{22}\\ a^{23}\\ a^{24}\\ a^{25}\\ a^{26}\end{pmatrix}, B_i := \begin{pmatrix} b^{i1}\\ b^{i2}\\ b^{i3}\\ b^{i4}\\ b^{i5}\\ b^{i6}\end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix}
c^{11} & c^{21} & c^{31} & c^{41} & c^{51} & c^{61}\\
c^{12} & c^{22} & c^{32} & c^{42} & c^{52} & c^{62}\\
c^{13} & c^{23} & c^{33} & c^{43} & c^{53} & c^{63}\\
c^{14} & c^{24} & c^{34} & c^{44} & c^{54} & c^{64}\\
c^{15} & c^{25} & c^{35} & c^{45} & c^{55} & c^{65}\\
c^{16} & c^{26} & c^{36} & c^{46} & c^{56} & c^{66}
\end{pmatrix},
$$

$$D_i := \begin{pmatrix} d^{i1} \\ d^{i2} \\ d^{i3} \\ d^{i4} \\ d^{i5} \\ d^{i6} \end{pmatrix}, F := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Избегая избыточности представления (19)–(20) (аналогично случаю $n = 1$), решаем систему (21) (с помощью программы `Maple 18`), в результате чего получаем единственное решение

$$\begin{cases} u(t,s) = \alpha f^1(t,s), \\ p(t,s) = f^2(t,s), \\ v^{\{i\}}(t,s) = f^1(t,s) + g^i(t,s), \quad i = \overline{1,2}, \\ q^{\{i\}}(t,s) = r^i(t,s), \quad i = \overline{1,2}, \end{cases} \tag{22}$$

где функции $f^{1,2}(t,s), g^{1,2}(t,s), r^{1,2}(t,s)$ являются общим решением системы переноса

$$\begin{cases} {f^1}_s(t,s) = \dfrac{1}{\alpha} f^2(t,s), \\ {f^2}_s(t,s) - {f^1}_t(t,s) = -\dfrac{k}{\alpha} f^1(t,s) - \dfrac{k}{2\alpha} \displaystyle\sum_{j=1}^{2} g^j(t,s) - \dfrac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{2} r^j(t,s), \\ {g^i}_t(t,s) = -\Big(\dfrac{k}{\alpha} + \lambda_i\Big) f^1(t,s) - \dfrac{k}{2\alpha} \displaystyle\sum_{j=1}^{2} g^j(t,s) - \\ \qquad - \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\sum_{j=1}^{2} r^j(t,s) - \lambda_i g^i(t,s), \quad i = \overline{1,2}, \\ {r^i}_t(t,s) = \delta_i f^1(t,s) + \delta_i g^i(t,s), \quad i = \overline{1,2}. \end{cases} \tag{23}$$

Замечаем, что в случаях $n = 1$ и $n = 2$ системы (17)–(18) и (22)–(23) имеют схожий вид, что и дает основания для анзаца (5)–(7).

5. Основной результат в непрерывном случае. Рассмотрим непрерывное (при $n \to \infty$) обобщение уравнения (1):

$$u_{tt} = k u_{xx} + \alpha u_{txx} + \int_0^\infty \int_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} u_{xx}(\tau,x)\, d\tau d\sigma(\lambda), \quad \alpha \neq 0. \tag{24}$$

Введение функции

$$v(t,x,\lambda) = \int_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} u_{xx}(\tau,x) d\tau \tag{25}$$

сводит (24) к эквивалентной системе

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha v_{tt} = (k + \alpha\lambda)\, v_t + k\lambda v + \displaystyle\int_0^\infty v d\sigma(\lambda), \\ u_{ss} = v_t + \lambda v, \end{cases} \tag{26}$$

в предположении $u(t,s) \in C^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ и $v(0,s,\lambda) = 0$.

Введем обозначение

$$\Delta = \int_0^\infty d\sigma(\lambda).$$

Теорема 2. *Если функции* $f^{1,2}(t,s)$, $g(t,s,\lambda)$, $r(t,s,\lambda)$ *являются классическим решением*

$$\begin{cases} {f^1}_s(t,s) = \dfrac{1}{\alpha} f^2(t,s), \\ {f^2}_s(t,s) - {f^1}_t(t,s) = -\dfrac{k}{\alpha} f^1(t,s) - \dfrac{k}{\alpha} g(t,s,\lambda) - \dfrac{1}{\alpha} r(t,s,\lambda), \\ g_t(t,s,\lambda) = -\Big(\dfrac{k}{\alpha} + \lambda\Big) f^1(t,s) - \Big(\dfrac{k}{\alpha} + \lambda\Big) g(t,s,\lambda) - \dfrac{1}{\alpha} r(t,s,\lambda), \\ r_t(t,s,\lambda) = (k\lambda + \Delta)\, f^1(t,s) + k\lambda g(t,s,\lambda) + \displaystyle\int_0^\infty g(t,s,\lambda) d\sigma(\lambda), \end{cases} \tag{27}$$

удовлетворяющим дополнительному условию

$$f^1(t,s) \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}), \quad g(t,s,\lambda) \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}), \tag{28}$$

то функции

$$\begin{cases} u(t,s) = \alpha f^1(t,s), \\ v(t,s,\lambda) = f^1(t,s) + g(t,s,\lambda) \end{cases}$$

являются классическим решением (26).

Обратно: если функции $u(t,s)$, $v(t,s,\lambda)$ *являются классическим решением* (26), *то функции*

$$\begin{cases} f^1(t,s) = \dfrac{1}{\alpha} u(t,s), \\ f^2(t,s) = u_s(t,s), \\ g(t,s,\lambda) = v(t,s,\lambda) - \dfrac{1}{\alpha} u(t,s), \\ r(t,s,\lambda) = k\lambda \displaystyle\int_0^t v(\tau,s,\lambda) d\tau + \int_0^t \int_0^\infty v(\tau,s,\lambda) d\sigma(\lambda) d\tau + \\ \qquad + u_t(0,s) - \alpha v_t(0,s) - (k + \alpha\lambda)\, v(0,s) \end{cases} \tag{29}$$

являются классическим решением (27) *и удовлетворяют дополнительному условию* (28).

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

6. Основной результат. Переформулировка условия. Анализируя анзац (27), можно заметить, что в уравнениях с частными производными относительно функций $f^{1,2}(t,s)$, не зависящих от переменной λ, присутствуют функции $g(t,s,\lambda)$ и $r(t,s,\lambda)$, зависящие от λ. По существу, это бесконечная система уравнений с частными производными первого порядка. На самом деле её можно свести к конечной системе из трех уравнений первого порядка и одного интегрального уравнения Вольтерра и бесконечному (зависящему от параметра λ) набору квадратур. Чтобы показать это, перепишем (27), введя новые обозначения:

$$\begin{cases} {f^1}_s(t,s) = \dfrac{1}{\alpha} f^2(t,s), \\ {f^2}_s(t,s) - {f^1}_t(t,s) = -\dfrac{k}{\alpha} f^1(t,s) - \dfrac{1}{\alpha} h(t,s,\lambda), \\ h_t(t,s,\lambda) = \Big(\Delta - \dfrac{k^2}{\alpha}\Big) f^1(t,s) - \dfrac{k}{\alpha} h(t,s,\lambda) + w(t,s), \\ g_t(t,s,\lambda) = -\Big(\dfrac{k}{\alpha} + \lambda\Big) f^1(t,s) - \lambda g(t,s,\lambda) - \dfrac{1}{\alpha} h(t,s,\lambda), \\ w(t,s) = \displaystyle\int_0^\infty g(t,s,\lambda) d\sigma(\lambda), \\ r(t,s,\lambda) = h(t,s,\lambda) - kg(t,s,\lambda). \end{cases} \tag{30}$$

Здесь

$$h(t,s,\lambda) = kg(t,s,\lambda) + r(t,s,\lambda), \quad w(t,s) = \int_0^\infty g(t,s,\lambda) d\sigma(\lambda).$$

Решая отдельно третье и четвертое уравнения системы (30) относительно функций $h(t,s,\lambda)$ и $g(t,s,\lambda)$, получаем

$$\begin{cases} {f^1}_s(t,s) = \dfrac{1}{\alpha} f^2(t,s), \\ {f^2}_s(t,s) - {f^1}_t(t,s) = -\dfrac{k}{\alpha} f^1(t,s) - \dfrac{1}{\alpha} h(t,s), \\ h(t,s,\lambda) = h(0,s,\lambda) e^{-\frac{k}{\alpha}t} + \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^t \Big(\Big(\Delta - \frac{k^2}{\alpha}\Big) f^1(\tau,s) + w(\tau,s)\Big) e^{-\frac{k}{\alpha}(t-\tau)} d\tau, \\ g(t,s,\lambda) = g(0,s,\lambda)) e^{-\lambda t} - \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_0^t \Big(\Big(\frac{k}{\alpha} + \lambda\Big) f^1(\tau,s) + \frac{1}{\alpha} h(\tau,s,\lambda)\Big) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau, \\ w(t,s) = \displaystyle\int_0^\infty g(t,s,\lambda) d\sigma(\lambda), \\ r(t,s,\lambda) = h(t,s,\lambda) - kg(t,s,\lambda), \end{cases} \tag{31}$$

где начальные условия $h(0,s,\lambda)$, $g(0,s,\lambda) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Предположим, что начальные условия функций $h(t,s,\lambda)$ и $g(t,s,\lambda)$ не зависят от переменной λ

(что и имеет место в нашем случае в силу (25) и (29)). Тогда из третьего уравнения системы (31) следует, что и сама функция $h(t,s,\lambda)$ не зависит от λ. Поэтому можем переобозначить $h(t,s) := h(t,s,\lambda)$, $h(0,s) := h(0,s,\lambda)$, $g(0,s) := g(0,s,\lambda)$.

Также примем, что мера $d\sigma(\lambda)$ такова, что допускает перестановку интегралов, т.е.

$$\int_0^t \int_0^\infty p(\tau,\lambda)d\sigma(\lambda)d\tau = \int_0^\infty \int_0^t p(\tau,\lambda)d\tau d\sigma(\lambda).$$

После этого (31) будет эквивалентно

$$\begin{cases} {f^1}_s(t,s) = \dfrac{1}{\alpha}f^2(t,s), \\ {f^2}_s(t,s) - {f^1}_t(t,s) = -\dfrac{k}{\alpha}f^1(t,s) - \dfrac{1}{\alpha}h(t,s), \\ h_t(t,s) = \Big(\Delta - \dfrac{k^2}{\alpha}\Big)f^1(t,s) - \dfrac{k}{\alpha}h(t,s) + w(t,s), \\ w(t,s) = g(0,s)\hat{\sigma}(t) + \displaystyle\int_0^t f^1(\tau,s)\hat{\sigma}'(t-\tau)d\tau \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_0^t \Big(\dfrac{k}{\alpha}f^1(\tau,s) + \dfrac{1}{\alpha}h(\tau,s)\Big)\hat{\sigma}(t-\tau)d\tau, \\ g(t,s,\lambda) = g(0,s)e^{-\lambda t} - -\displaystyle\int_0^t \Big(\Big(\dfrac{k}{\alpha}+\lambda\Big)f^1(\tau,s) + \dfrac{1}{\alpha}h(\tau,s)\Big)e^{-\lambda(t-\tau)}d\tau, \\ r(t,s,\lambda) = h(t,s,\lambda) - kg(t,s,\lambda), \end{cases} \tag{32}$$

где $\hat{\sigma}(t)$ — преобразование Лапласа меры $\sigma(\lambda)$. Таким образом, получена система (32), эквивалентная (27), но в которой первые четыре уравнения, определяющие функции $f^{1,2}(t,s)$, не зависят от переменной λ, а зависят только от переменных t и s, а пятое и шестое уравнения выражают оставшиеся функции $g(t,s,\lambda)$ и $r(t,s,\lambda)$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12–01–00155-а).

ORCID
Анатолий Николаевич Царицанский: http://orcid.org/0000-0002-4076-5951

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Царицанский А. Н. Дискретный и непрерывный случаи в задаче о распространении волн в среде с памятью / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. СамГТУ: Самара, 2014. С. 370–371.
2. Гавриков А. А., Шамаев А. С. Некоторые вопросы акустики эмульсий / Тр. сем. им. И. Г. Петровского, Т. 28. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. С. 114–146.
3. Царицанский А. Н. Задача о распространии волн в неоднородной среде с памятью // *Матем. заметки*, 2015. Т. 98, № 3. С. 436–447. doi: 10.4213/mzm10598.

Поступила в редакцию 07/XII/2014;
в окончательном варианте — 02/III/2015;
принята в печать — 08/IV/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 3, pp. 489–503

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1362

MSC: 35Q86

DISCRETE AND CONTINUOUS CASES FOR THE PROBLEM OF PROPAGATING WAVES FOR INHOMOGENEOUS MEDIUM WITH MEMORY*

A. N. Tsaritsanskiy

M. V. Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Mechanics and Mathematics,
Vorob'evy gory, Moscow, 119899, Russian Federation.

Abstract

The article is devoted to the study of the wave equation for medium with memory. This equation is obtained in the process of considering the homogenized models of combined mediums. It describes one-dimensional case of the Kelvin–Voight's viscoelastic oscillations law of homogenized models. The problem is to find the function which describes the average offset of the material. The formula of propagating waves is used for this purpose. It allows to construct a solution using the general solution of the first order system in which each equation is the equation of the transfer along the corresponding characteristics. The main result consists of two theorems for discrete and continuous modification of the equation. Furthermore the article contains descriptive considerations which lead to the construction of the classical solution of the equations.

Keywords: wave equation in an inhomogeneous medium with memory, formula of propagating waves, transfer system.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1362

Acknowledgments. This work has been supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 12–01–00155-a).

ORCID
Anatoly N. Tsaritsanskiy: http://orcid.org/0000-0002-4076-5951

Please cite this article in press as:
Tsaritsanskiy A. N. Discrete and continuous cases for the problem of propagating waves for inhomogeneous medium with memory, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 3, pp. 489–503. doi: 10.14498/vsgtu1362. (In Russian)

Author Details:
Anatoly N. Tsaritsanskiy (TsaritsanskiiAN@gmail.com), Postgraduate Student, Dept. of Differential Equations.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

REFERENCES

1. Tsaritsanskiy A. N. Discrete and continuous cases for the problem of propagating waves for inhomogeneous medium with memory, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. . I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 370–371 (In Russian).
2. Gavrikov A. A., Shamaev A. S. Some problems in acoustics of emulsions, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2011, vol. 179, no. 3, pp. 415–436. doi: 10.1007/s10958-011-0601-6.
3. Tsaritsanskiy A. N. Problem of the Propagation of Waves in an Inhomogeneous Medium with Memory, *Math. Notes*, 2015, vol. 98, no. 3, pp. 492–502. doi: 10.1134/S0001434615090151.

Received 07/XII/2014;
received in revised form 02/III/2015;
accepted 08/IV/2015.