Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 1. С. 7–21

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1452

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ ГЕЛЛЕРСТЕДТА В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

А. Х. Аттаев

Институт прикладной математики и автоматизации,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

Рассматривается нагруженное вырождающееся гиперболическое уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Главная часть уравнения представляет собой оператор Геллерстедта. Нагруженное слагаемое представляет собой след искомого решения на линии вырождения, которая лежит внутри области. Исследуется задача с данными на одной из характеристик исследуемого уравнения. В модельном случае, когда коэффициенты при младших членах обращаются в ноль, решение задачи Гурса выписано в явном виде. При этом использовалась функция Грина—Адамара для уравнения Эйлера—Дарбу—Пуассона. В общем случае разрешимость задачи Гурса эквивалентным образом редуцирована к вопросу о разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода. В этом случае использована схема, реализованная С. Геллерстедтом при доказательстве существования решения второй задачи Дарбу для рассматриваемого уравнения без нагрузки. В обоих случаях существенно использовались известные свойства функции Грина—Адамара.

Ключевые слова: задача Гурса, нагруженное уравнение, гиперболическое уравнение, вырождающееся уравнение, оператор Геллерстедта, метод функции Грина–Адамара.

Образец для цитирования

Аттаев А. Х. Задача Гурса для нагруженного вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка с оператором Геллерстедта в главной части // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 7–21. doi: 10.14498/vsgtu1452.

Сведения об авторе

Анатолий Хусеевич Аттаев (к.ф.-м.н., доц.; attaev.anatoly@yandex.ru), заведующий отделом, отдел САПР смешанных систем и управления.

Исследованию краевых задач для линейных нагруженных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными посвящено много работ. Достаточно полная библиография приведена в монографии [1]. Нагруженным уравнением в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ называется уравнение

$$Lu(x) = f(x),$$

где L — оператор, содержащий след некоторых операций от искомого решения $u(x)$ на принадлежащих $\bar{\Omega}$ многообразиях размерности меньше n [2].

Существенную роль для корректной разрешимости тех или иных задач для нагруженных уравнений играет не просто наличие следа Γ от искомого решения, а в большей степени следообразующее отображение

$$F : \bar{\Omega} \to \Gamma.$$

Особенно этот эффект проявляется для нагруженных гиперболических уравнений. Поясним это на примере. Пусть заданы два модельных уравнения

$$u_x + u_y = \lambda u(x, 0) \qquad \text{и} \qquad u_x + u_y = \lambda u(x - y, 0),$$

где $\lambda = \mathrm{const}$. След от искомого решения в правых частях есть одно и то же многообразие, хотя легко заменить, что общие интегралы этих двух уравнений принципиально отличаются.

Задачам с данными на характеристических многообразиях для нагруженных строго и слабо гиперболических уравнений посвящены работы [3–7]. Характеристической задаче и задаче Дарбу для широкого класса систем нагруженных вырождающихся гиперболических уравнений посвящены работы [8, 9].

В данной работе объектом исследования является уравнение вида

$$\begin{aligned} L^m u = u_{yy} - |y|^m u_{xx} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = \\ = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(x, y) D_{0\xi}^{\alpha_i} u(\xi, 0) + d(x, y), \quad \xi = x - \frac{2}{m+2}|y|^{\frac{m+2}{2}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть Ω — область, ограниченная характеристиками

$$x - \frac{2}{m+2}|y|^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad x + \frac{2}{m+2}|y|^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1). Здесь λ и m — действительные числа, причем

$$m \geqslant 0, \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n = \alpha < 1;$$

D_{ax}^l — оператор дробного интегрирования (при $l < 0$) и дробного дифференцирования (при $l > 0$) порядка $|l|$ с началом в точке a, определяемый как и в [10] формулой

$$D_{ax}^l f(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-l)} \displaystyle\int_a^x \frac{f(t)dt}{|x-t|^{l+1}}, & l < 0, \\ f(x), & l = 0, \\ \operatorname{sign}^{[l]+1}(x-a) \dfrac{d^{[l]+1}}{dx^{[l]+1}} D_{ax}^{l-[l]-1} f(t), & l > 0, \end{cases}$$

где $[l]$ — целая часть l, $[l] \leqslant l < [l] + 1$, $\Gamma(z)$ — Гамма-функция Эйлера.

Задача Гурса. *Найти регулярное в области Ω при $y \neq 0$ решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющее условию*

$$u\left(\frac{x}{2}, \operatorname{sign} y\Big(\frac{m+2}{4}x\Big)^{\frac{2}{m+2}}\right) = \varphi^{\pm}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$

где знак “+” берется при $y > 0$ и знак “−” — при $y < 0$.

Предполагается, что $\varphi^+(0) = \varphi^-(0)$; b, c, d, $a_i \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

$$\varphi^{\pm} \in C^1(\bar{J}) \cap C^3(J), \tag{3}$$

где $\bar{J} = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 0\}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты $a(x, y)$, $c(x, y)$ по переменной y являются четными функциями, а коэффициент $b(x, y)$ — нечетной; коэффициент $a(x, y)$ удовлетворяет условию Геллерстедта:*

$$a(x, y) = a_0(x, y)|y|^{\gamma(m)}, \quad a_0 \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega),$$

где $\gamma(m) = 0$ при $m < 2$ и $\gamma(m) = \mathrm{const} > m/2 - 1$ при $m \geqslant 2$.

Тогда задача Гурса разрешима и притом единственным образом.

Сначала приведем д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 для случая $a = b = c = d \equiv 0$, $a_1 = 1$, $\alpha_1 = 0$; $a_i(x, y) = 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$, т.е. для модельного локально нагруженного уравнения Геллерстедта:

$$u_{yy} - |y|^m u_{xx} = \lambda u\Big(x - \frac{2}{m+2}|y|^{\frac{m+2}{2}}, 0\Big). \tag{4}$$

Через Ω^+ и Ω^- обозначим части Ω, расположенные в верхней и нижней полуплоскостях соответственно.

В области Ω^- уравнение (4) и краевые условия (2) имеют вид

$$u_{yy} - (-y)^m u_{xx} = \lambda u\Big(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, 0\Big), \tag{5}$$

$$u\Big(\frac{x}{2}, -\Big(\frac{m+2}{4}x\Big)^{\frac{2}{m+2}}\Big) = \varphi^-(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{6}$$

Соотношения (5) и (6) в характеристических переменных

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} \tag{7}$$

записываются в виде

$$v_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi}(v_\eta - v_\xi) = \frac{\mu v(\xi, \xi)}{(\eta - \xi)^{4\beta}}, \tag{8}$$

$$v(0, \eta) = \psi(\eta) \equiv \varphi^-(\eta), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1,$$

где $4\mu = \lambda(2-4\beta)^{4\beta}$, $\beta = m/(2m+4)$,

$$v(\xi,\eta) = u\Big(\frac{\xi+\eta}{2}, -\Big(\frac{m+2}{4}\Big)^{1-2\beta}(\eta-\xi)^{1-2\beta}\Big).$$

Пусть $H(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)$ — функция Грина—Адамара второй задачи Дарбу для уравнения Эйлера—Дарбу—Пуассона

$$Lv \equiv v_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\eta-\xi}(v_\eta - v_\xi) = 0,$$

определяемая следующими условиями:

1) $H(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)$ как функция от (ξ,η) есть решение сопряженного уравнения $L^*v = 0$, а как функция от (ξ_0,η_0) — решение уравнения (8);
2) $H(\xi_0,\eta_0,\xi_0,\eta_0) = 1$;
3) $H(\xi,\xi,\xi_0,\eta_0) = 0$;
4) $\dfrac{\partial[H]}{\partial\xi} + \beta\dfrac{[H]}{\eta-\xi} = 0$ при $\eta = \xi_0$, где

$$[H] = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(H(\xi,\xi_0+\varepsilon,\xi_0,\eta_0) - H(\xi,\xi_0-\varepsilon,\xi_0,\eta_0)\big).$$

Как известно, функция Грина—Адамара $H(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)$ была явно построена Геллерстедтом [11] и имеет вид

$$H(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \begin{cases} R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta \geqslant \xi_0, \\ \bar{R}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta \leqslant \xi_0, \end{cases}$$

где $R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = (\eta-\xi)^\beta(\eta_0-\xi_0)^{-\beta}F(\beta,1-\beta,1,\sigma)$ — функция Римана,

$$\bar{R}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \gamma\frac{(\eta-\xi)^{2\beta}}{(\xi_0-\xi)^\beta(\eta_0-\eta)^\beta}F\left(\beta,\beta,2\beta;1/\sigma\right).$$

Здесь

$$\gamma = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}, \quad \sigma = \frac{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)}.$$

Пусть существует решение задачи Гурса (2) для уравнения (4) и пусть функция

$$\nu(x) = u_y(x,0), \quad 0 < x < 1$$

имеет дробный интеграл порядка $1-2\beta$ с началом в точке 0 и с концом в любой точке $x \in]0,1]$. Тогда, пользуясь свойством функции H, по схеме, реализованной Геллерстедтом [11], при доказательстве существования решения второй задачи Дарбу можно доказать, что

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{2\beta}\gamma\int_0^\xi \nu(t)(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta}dt +$$
$$+\int_0^\eta\Big(\psi'(t) + \frac{\beta}{t}\psi(t)\Big)H(0,t;\xi,\eta)dt +$$

$$+\mu\int_0^{\xi}d\xi_1\int_{\xi_1}^{\eta}\frac{u(\xi_1,0)}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}}H(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)d\eta_1. \quad (9)$$

Из (9) при $y=0$, $\eta=\xi=x$, $t<\xi$, с учетом пределов

$$\lim_{\eta-\xi\to+0}H(0,t;\xi,\eta)=\lim_{\eta-\xi\to+0}\bar{R}(0,t;\xi,\eta)=\gamma t^{2\beta}\xi^{-\beta}(\xi-t)^{-\beta},\quad t<\xi;$$

$$\lim_{\eta-\xi\to+0}H(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=\lim_{\eta-\xi\to+0}\bar{R}(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=$$
$$=\gamma(\eta_1-\xi_1)^{2\beta}(\xi-\eta_1)^{-\beta}(\xi-\xi_1)^{-\beta},\quad \eta_1<\xi,$$

имеем

$$u(x,0)=\frac{1}{2}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{2\beta}\gamma\int_0^x\frac{\nu(t)dt}{(x-t)^{2\beta}}+$$
$$+\mu\gamma\int_0^x d\xi_1\int_{\xi_1}^x\frac{u(\xi_1,0)\,d\eta_1}{(\eta_1-\xi_1)^{2\beta}(x-\eta_1)^{\beta}(x-\xi_1)^{\beta}}+$$
$$+\gamma x^{-\beta}\int_0^x\big(t\psi'(t)+\beta\psi(t)\big)t^{2\beta-1}(x-t)^{-\beta}dt. \quad (10)$$

Произведем замену переменной интегрирования η_1 по формуле

$$\eta_1=\xi_1+(x-\xi_1)t.$$

Тогда, принимая во внимание, что

$$\int_{\xi_1}^x(x-\eta_1)^{-\beta}(\eta_1-\xi_1)^{-2\beta}d\eta_1=$$
$$=(x-\xi_1)^{1-3\beta}\int_0^1 t^{-2\beta}(1-t)^{-\beta}dt=(x-\xi_1)^{1-3\beta}B(1-2\beta,1-\beta)$$

и используя определение дробного интеграла, соотношению (10) можно придать более компактный вид:

$$\tau(x)=\lambda\gamma_1 D_{0x}^{4\beta-2}\tau(t)+\gamma_2 D_{0x}^{2\beta-1}\nu(t)+\Psi(x),\quad 0<x<1 \quad (11)$$

где

$$\tau(x)\equiv u(x,0),\qquad \gamma_1=\frac{1}{4}(2-4\beta)^{4\beta}\gamma B(1-2\beta,1-\beta)\Gamma(4\beta),$$
$$\gamma_2=\frac{1}{2}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{2\beta}\gamma\Gamma(2-4\beta),$$
$$\Psi(x)=\gamma\Gamma(1-\beta)x^{-\beta}D_{0x}^{\beta-1}\big(t\psi'(t)+\beta\psi(t)\big)t^{2\beta-1}.$$

Равенство (11) представляет собой фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω^- на линию $y=0$ параболического вырождения. Найдем теперь соотношение, которое приносится из области Ω^+.

В области Ω^+ имеем

$$u_{yy} - y^m u_{xx} = \lambda u\Big(x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}, 0\Big), \quad y > 0, \tag{12}$$

$$u\Big(\frac{x}{2}, \Big(\frac{m+2}{4} x\Big)^{\frac{2}{m+2}}\Big) = \varphi^+(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{13}$$

$$\tau(x) = u(x,0), \quad \lim_{y\to 0+} u_y(x,y) = \nu(x), \quad 0 < x < 1. \tag{14}$$

В системе (12)–(14) произведем преобразование

$$\widetilde{x} = x, \quad \widetilde{y} = -y, \quad \widetilde{u} = \widetilde{u}(\widetilde{x}, \quad \widetilde{y}) = u(x, -y).$$

После этого она примет вид

$$\widetilde{u}_{\widetilde{y}\widetilde{y}} - (-\widetilde{y})^m \widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}} = \lambda \widetilde{u}\Big(\widetilde{x} - \frac{2}{m+2}(-\widetilde{y})^{\frac{m+2}{2}}, 0\Big), \quad \widetilde{y} < 0,$$

$$\widetilde{u}\Big(\frac{\widetilde{x}}{2}, -\Big(\frac{m+2}{2}\widetilde{x}\Big)^{\frac{2}{m+2}}\Big) = \varphi^+(\widetilde{x}), \quad 0 \leqslant \widetilde{x} \leqslant 1,$$

$$\widetilde{u}(\widetilde{x}, 0) = \tau(\widetilde{x}), \quad \lim_{\widetilde{y}\to 0-} \widetilde{u}_{\widetilde{y}} = -\nu(x), \quad 0 < x < 1.$$

Поэтому нетрудно заключить, что фундаментальное соотношение между $\tau(\widetilde{x})$ и $\nu(\widetilde{x})$, принесенное из области Ω^+, задается формулой

$$\tau(x) = \lambda\gamma_1 D_{0x}^{4\beta-2}\tau(t) - \gamma_2 D_{0x}^{2\beta-1}\nu(t) + \widetilde{\Psi}(x), \quad 0 < x < 1, \tag{15}$$

где

$$\widetilde{\Psi}(x) = \gamma\Gamma(1-\beta)x^{-\beta} D_{0x}^{\beta-1}\big(t\widetilde{\psi}'(t) + \beta\widetilde{\psi}(t)\big)t^{2\beta-1},$$

$$\widetilde{\psi}(t) = \varphi^+(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Система (11), (15), очевидно, эквивалентна системе

$$D_{0x}^{2\beta-1}\nu(t) = f_1(x), \quad 0 < x < 1, \tag{16}$$

$$\tau(x) - \lambda\gamma_1 D_{0x}^{4\beta-2}\tau(t) = f_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{17}$$

где

$$f_1(x) = \frac{1}{2\gamma_2}\left[\Psi(x) - \widetilde{\Psi}(x)\right], \tag{18}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[\Psi(x) + \widetilde{\Psi}(x)\right]. \tag{19}$$

Итак, доказана лемма, которая очень важна для доказательства теоремы 1 в случае уравнения (4).

Лемма. *Решение $u(x,t)$ задачи Гурса (2) для уравнения (4) в области Ω существует тогда и только тогда, когда функция $\nu(x) = u_y(x,0)$ является решением уравнения Абеля (16) с правой частью (18), а $\tau(x) = u(x,0)$ — решение уравнения (17) с правой частью (19).*

Исследуем разрешимость уравнений (16) и (17). С этой целью изучим свойства функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Из (3) заключаем, что

$$\Phi(x) = x\psi'(x) + \beta\psi(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J). \tag{20}$$

Ясно, что

$$\Psi(x) = \gamma\Gamma(1-\beta)x^{-\beta}D_{0x}^{\beta-1}t^{2\beta-1}\Phi(t) = \gamma x^{-\beta}\int_0^x \frac{\Phi(t)t^{2\beta-1}}{(x-t)^\beta}dt.$$

Отсюда после замены $t = xz$ находим

$$\Psi(x) = \gamma\int_0^1 z^{2\beta-1}(1-z)^{-\beta}\Phi(xz)dz. \tag{21}$$

Стало быть, $\Psi(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$. Теперь нет сомнений в том, что

$$f_1(x),\ f_2(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J). \tag{22}$$

В силу (21) решение уравнения Абеля (16) имеет вид

$$\nu(x) = D_{0x}^{1-2\beta}f_1(t). \tag{23}$$

Из (21) с учётом (20) видно, что

$$\Psi(0) = \gamma\Phi(0)\int_0^1 z^{2\beta-1}(1-z)^{-\beta}dz = \gamma\beta\psi(0)B(2\beta, 1-\beta).$$

Так как

$$\gamma\beta B(2\beta, 1-\beta) = \frac{\Gamma(\beta)\beta}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\beta)} = 1$$

и $\psi(0) = \varphi(0)$, получаем $\Psi(0) = \varphi(0)$. Аналогично, $\widetilde{\Psi}(0) = \varphi(0)$. Следовательно, $f_1(0) = 0$. С учетом этого (23) можно переписать в виде

$$\nu(x) = \frac{d}{dx}D_{0x}^{-2\beta}f_1(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\int_0^x f_1(t)(x-t)^{2\beta-1}dt =$$
$$= \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\left(-\frac{1}{2\beta}f_1(t)(x-t)^{2\beta}\Big|_0^x + \frac{1}{2\beta}\int_0^x f_1'(t)(x-t)^{2\beta}dt\right) =$$
$$= \frac{1}{2\beta\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dx}\int_0^x f_1'(t)(x-t)^{2\beta}dt = \frac{1}{\Gamma(2\beta)}\int_0^x \frac{f_1'(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta}},$$

т. е.

$$\nu(x) = D_{0x}^{-2\beta}f_1'(t). \tag{24}$$

Из (24) и (22) вытекает, что функция $\nu(x) \in C(\bar{J}) \cap C^1(J)$ и при $x \to 0$ обращается в нуль.

Поскольку функция $f_2(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$, решение уравнения Вольтерра второго рода (17) принадлежит $C(\bar{J}) \cap C^2(J)$.

Доказана (см. формулу (9)) следующая теорема.

Теорема 2. *Единственное решение задачи Гурса (2) для уравнения (4) в области Ω^- задается формулой*

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{2\beta}\gamma\int_0^\xi \frac{D_{0t}^{-2\beta}f_1'(t)dt}{\big((\xi-t)(\eta-t)\big)^\beta} + \int_0^\eta \frac{\Phi(t)}{t}H(0,t;\xi,\eta)dt+ \\ + \mu\int_0^\xi d\xi_1\int_{\xi_1}^\eta \frac{\tau(\xi_1)}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}}H(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)d\eta_1.$$

Вернемся к случаю уравнения (1). В характеристических координатах (7) оно приводится к виду

$$v_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta-\xi}(v_\xi - v_\eta) - (\eta-\xi)^{-4\beta}A(\xi,\eta)(v_\xi+v_\eta)- \\ -(\eta-\xi)^{-2\beta}B(\xi,\eta)(v_\xi-v_\eta) - (\eta-\xi)^{-4\beta}C(\xi,\eta)v = \\ = (\eta-\xi)^{-4\beta}\big(A_i(\xi,\eta)D_{0\xi}^{\alpha_i}v(\xi,\xi)+f(\xi,\eta)\big), \quad (25)$$

где

$$f(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{4\beta}d\Big(\frac{\xi+\eta}{2}, -\Big(\frac{m+2}{4}\Big)^{1-2\beta}(\eta-\xi)^{1-2\beta}\Big),$$
$$A_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{4\beta}a_i\Big(\frac{\xi+\eta}{2}, -\Big(\frac{m+2}{4}\Big)^{1-2\beta}(\eta-\xi)^{1-2\beta}\Big),$$

а коэффициенты A, B, C определяются через $u(x,y)$ точно так же, как $v(\xi,\eta)$.

Существование функции Грина—Адамара $G(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ второй задачи Дарбу для уравнения (1) при $\lambda=0$ доказано Геллерстедтом [11]:

$$G(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \begin{cases} g(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta \geqslant \xi_0, \\ \bar g(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta \leqslant \xi_0. \end{cases}$$

Здесь g — функция Римана, а $\bar g$ — функция, обладающая следующими свойствами:

1) $\bar g(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ по переменным (ξ_0,η_0) удовлетворяет уравнению (25), а по переменным (ξ,η) — ему сопряженному;
2) $\bar g(\xi,\xi_0;\xi_0,\eta_0) - g(\xi,\xi_0;\xi_0,\eta_0) =$

$$\cos\pi\beta\lim_{\varepsilon\to 0}\big(g(\xi,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\xi_0+\varepsilon)g(\xi,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0)\big);$$

3) $\bar g$ при $\eta=\xi$ обращается в нуль порядка 2β.

Так как функция Римана $g(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ удовлетворяет соотношениям

$$g(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0) = \exp\int_{\eta_0}^\eta A(\xi_0,t)dt = \Big(\frac{\eta-\xi_0}{\eta_0-\xi_0}\Big)^\beta\exp\int_{\eta_0}^\eta A_1(\xi_0,t)dt,$$

$$g(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0) = \exp\int_{\xi_0}^\xi B(t,\eta_0)dt = \Big(\frac{\eta_0-\xi}{\eta_0-\xi_0}\Big)^\beta\exp\int_{\xi_0}^\xi B_1(t,\eta_0)dt,$$

условие 2) можно записать в виде

$$\bar{g}(\xi,\xi_0;\xi_0,\eta_0)-g(\xi,\xi_0;\xi_0,\eta_0)=$$
$$=\cos\pi\beta A^*(\xi,\xi_0,\eta_0)\Big(\frac{\xi_0-\xi}{\eta_0-\xi_0}\Big)\exp\Big(\int_{\xi_0}^{\eta_0}\frac{\widetilde{b}(\xi_0,t)dt}{(t-\xi_0)^{2\beta}}-\int_{\xi}^{\xi_0}\frac{\widetilde{b}(t,\xi_0)dt}{(\xi_0-t)^{2\beta}}\Big),$$

где

$$A^*(\xi;\xi_0,\eta_0)=\lim_{x\to 0}\exp\Big(\int_{\xi}^{\xi_0}\frac{\widetilde{a}(t,\xi+\varepsilon)dt}{(\xi_0+\varepsilon-t)^{4\beta}}+\int_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0}\frac{\widetilde{a}(\xi_0,t)dt}{(t-\xi_0)^{4\beta}}\Big),$$
$$\widetilde{a}(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{4\beta}a\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\Big(\frac{m+2}{4}\Big)^{1-2\beta}(\eta-\xi)^{1-2\beta}\Big),$$
$$\widetilde{b}(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{4\beta}b\Big(\frac{\xi+\eta}{2},-\Big(\frac{m+2}{4}\Big)^{1-2\beta}(\eta-\xi)^{1-2\beta}\Big).$$

Таким образом, для существования функции Грина—Адамара необходимо потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$A^*(\xi;\xi_0,\eta_0)<\infty\quad(0<\xi<1,\ 0<\xi_0,\ \eta_0<1).$$

Это условие, впервые выписанное А. М. Нахушевым [12], выполняется, если, например, $m<2$ или $a(x,y)=O(1)y^{\alpha}$, где $\alpha>m/2-1$ в $\bar{\Omega}$.

Не нарушая общности, *доказательство* теоремы 1 проведем в случае однородной задачи Гурса ($\varphi(y)\equiv 0$) для неоднородного уравнения.

Пусть существует решение $u(x,y)$ однородной задачи Гурса и, как и ранее,

$$u(x,0)=\tau(x),\quad u_y(x,0)=\nu(x).$$

Тогда в силу тождества Римана для уравнения (25) и свойств функции Грина второй задачи Дарбу существует такой интегральный оператор A_{η}^{ξ}, определенный на функциях $\nu(x)$, имеющих дробный интеграл порядка $1-2\beta$ с началом в точке 0 и с концом в любой точке $x\in\,]0,1]$, что для любой точки $(x,y)\in\Omega^-$

$$u(x,y)=A_{\eta}^{\xi}\nu+\mu\int_0^{\xi}d\xi_1\int_{\xi_1}^{\eta}\frac{A_i(\xi_1,\eta_1)D_{0x}^{\alpha_i}\tau}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}}G(\xi_1,\eta_1;\xi_1,\eta)d\eta_1+F(x,y),\quad(26)$$

где

$$F(x,y)=\int_0^{\xi}d\xi_1\int_{\xi_1}^{\eta}\frac{f(\xi_1,\eta_1)}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}}G(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)d\eta_1.$$

Из 26 при $\xi=\eta=x$ и $y\to 0$ имеем

$$\tau(x)=A_x^x\nu+\mu\int_0^{x}d\xi_1\int_{\xi_1}^{x}\frac{A(\xi_1,\eta_1)D_{0x}^{\alpha_i}\tau}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}}\bar{g}(\xi_1,\eta_1;x,x)d\eta_1+F(x,x).\quad(27)$$

Допустим теперь, что $(x,y)\in\Omega^+$. В уравнении (1) произведем преобразования $\widetilde{x}=x$, $\widetilde{y}=-y$. В результате область Ω^+ отобразится в область $\widetilde{\Omega}^-$, ограниченную отрезком

$$\bar{J}=\{(\widetilde{x},\widetilde{y}):0\leqslant\widetilde{x}\leqslant 1,\widetilde{y}=0\}$$

прямой $\widetilde{y}=0$ и характеристиками

$$\widetilde{x}-\frac{2}{m+2}(-\widetilde{y})^{\frac{m+2}{2}}=0, \quad \widetilde{x}+\frac{2}{m+2}(-\widetilde{y})^{\frac{m+2}{2}}=1$$

уравнения

$$\widetilde{u}_{\widetilde{y}\widetilde{y}}-(-\widetilde{y})^m\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}+a(\widetilde{x},-\widetilde{y})\widetilde{u}_{\widetilde{x}}-\bar{b}(\widetilde{x},-\widetilde{y})\widetilde{u}_{\widetilde{y}}+c(\widetilde{x},-\widetilde{y})\widetilde{u}= \\ =\lambda a_i(\widetilde{x},-\widetilde{y})D^{\alpha_i}_{0\widetilde{\xi}}u(\widetilde{\xi},0)+d(\widetilde{x},-\widetilde{y}). \quad (28)$$

Здесь

$$\widetilde{u}=\widetilde{u}(\widetilde{x},\widetilde{y})=u(x,-y), \quad \widetilde{\xi}=\widetilde{x}-\frac{2}{m+2}(-\widetilde{y})^{\frac{m+2}{2}}.$$

Так как для всех $(\widetilde{x},\widetilde{y})\in\widetilde{\Omega}^-$

$$a(\widetilde{x},-\widetilde{y})=a(\widetilde{x},\widetilde{y}), \quad b(\widetilde{x},-\widetilde{y})=-b(\widetilde{x},\widetilde{y}), \quad c(\widetilde{x},-\widetilde{y})=c(\widetilde{x},\widetilde{y}),$$

уравнение (28) можно переписать в форме

$$\widetilde{u}_{\widetilde{y}\widetilde{y}}-(-\widetilde{y})^m\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}+a(\widetilde{x},\widetilde{y})\widetilde{u}_{\widetilde{x}}+b(\widetilde{x},\widetilde{y})\widetilde{u}_{\widetilde{y}}+c(\widetilde{x},\widetilde{y})\widetilde{u}= \\ =\lambda a_i(\widetilde{x},\widetilde{y})D^{\alpha_i}_{0\widetilde{\xi}}\widetilde{u}(\widetilde{\xi},0)+\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}).$$

Очевидно, что

$$\tau(\widetilde{x})=\tau(x), \quad \lim_{\widetilde{y}\to 0^-}\widetilde{u}_{\widetilde{y}}(\widetilde{x},\widetilde{y})=-\nu(\widetilde{x}),$$

$$\widetilde{u}\Big(\frac{2}{m+2}(-\widetilde{y})^{\frac{m+2}{2}},\widetilde{y}\Big)=0, \qquad -\Big(\frac{m+2}{2}\Big)^{\frac{2}{m+2}}\leqslant\widetilde{y}\leqslant 0.$$

Пусть, как и выше,

$$\widetilde{f}(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})=-\frac{1}{4}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{4\beta}\widetilde{d}\Big(\frac{\widetilde{\xi}+\widetilde{\eta}}{2},-\Big(\frac{m+2}{4}\Big)^{1-2\beta}(\widetilde{\eta}-\widetilde{\xi})^{1-2\beta}\Big),$$

$$\widetilde{F}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\int_0^{\widetilde{\xi}}d\xi_1\int_{\xi_1}^{\widetilde{\eta}}\frac{\widetilde{f}(\xi_1,\eta_1)}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}}G(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)d\eta_1,$$

$$\widetilde{A_i}(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})=\frac{1}{4}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{4\beta}\widetilde{a_i}\Big(\frac{\widetilde{\xi}+\widetilde{\eta}}{2},-\Big(\frac{m+2}{4}\Big)^{1-2\beta}(\widetilde{\eta}-\widetilde{\xi})^{1-2\beta}\Big),$$

где

$$\widetilde{\xi}=\widetilde{x}-\frac{2}{m+2}(-\widetilde{y})^{\frac{m+2}{2}}, \quad \widetilde{\eta}=\widetilde{x}+\frac{2}{m+2}(-\widetilde{y})^{\frac{m+2}{2}}.$$

Тогда в силу (26) имеем

$$\widetilde{u}(\widetilde{x},\widetilde{y})=-A^{\widetilde{\xi}}_{\widetilde{\eta}}\nu+\mu\int_0^{\widetilde{\xi}}d\xi_1\int_{\xi_1}^{\widetilde{\eta}}\frac{\widetilde{A}_i(\xi_1,\eta_1)D^{\alpha_i}_{0\xi_1}\tau}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}}G(\xi_1,\eta_1;\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})d\eta_1+\widetilde{F}(\widetilde{x},\widetilde{y}). \quad (29)$$

Равенство (29) дает нам право записать

$$\tau(x) = -A_x^x \nu + \mu \int_0^x d\xi_1 \int_{\xi_1}^x \frac{\widetilde{A}_i(\xi,\eta_1) D_{0\xi_1}^{\alpha_i}\tau}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}} \bar{g}(\xi_1,\eta_1;x,x)d\eta_1 + \\ + \widetilde{F}(x,x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \quad (30)$$

Равенство (30) выражает фундаментальное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω^+ на линию параболического выражения $y=0$.

Из (27) и (30) после их почленного сложения находим

$$\tau(x) = \mu \int_0^x d\xi_1 \int_{\xi_1}^x \frac{\bar{A}_i(\xi_1,\eta_1) D_{0\xi_1}^{\alpha_i}\tau}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}} \bar{g}(\xi_1,\eta_1;x,x)d\eta_1 + \bar{F}(x), \quad (31)$$

где

$$\bar{A}_i(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\big(A_i(\xi,\eta) + \widetilde{A}_i(\xi,\eta)\big), \quad \bar{F}(x) = \frac{1}{2}\big(F(x,x) + \widetilde{F}(x,x)\big).$$

Рассмотрим оператор

$$V_i\tau = \int_0^x d\xi_1 \int_{\xi_1}^x \frac{A_i(\xi_1,\eta_1) D_{0\xi_1}^{\alpha_i}\tau}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}} \bar{g}(\xi_1,\eta_1;x,x)d\xi_1. \quad (32)$$

Очевидно, что

$$V_\tau = \sum_{i=1}^n V_i\tau, \qquad V_i\tau = \int_0^x D_{0\xi_1}^{\alpha_i}\tau\, G_i(x,\xi_1)d\xi_1,$$

где

$$G_i(x,\xi_1) = \int_{\xi_1}^x \frac{\bar{A}_i(\xi_1,\eta_1)\bar{g}(\xi_1,\eta_1;x,x)}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}} d\eta_1.$$

Не нарушая общности, можно предположить, что $\alpha_i \leqslant 0$ при $i=1,2,\ldots,m$ и $\alpha_i > 0$ при $i=m+1,m+2,\ldots,n$.

Пусть $i \geqslant m+1$. Тогда для любой функции $\tau(\xi) \in D(V_i)$ на основании определения производной дробного порядка

$$V_i\tau = \int_0^x \frac{G_i(x,t)}{\Gamma(1-\alpha_i)} \left(\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\tau(\eta)}{(t-\eta)^{\alpha_i}} d\eta\right) dt = \\ = \left(\frac{G_i(x,t)}{\Gamma(1-\alpha_i)} \int_0^t \frac{\tau(\eta)d\eta}{(t-\eta)^{\alpha_i}}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \frac{\frac{\partial}{\partial t}G_i(x,t)}{\Gamma(1-\alpha_i)} dt \int_0^t \frac{\tau(\eta)}{(t-\eta)^{\alpha_i}} d\eta.$$

Отсюда после законной перестановки порядка интегрирования в двойном интеграле получаем

$$V_i\tau = \frac{G_i(x,x)}{\Gamma(1-\alpha_i)} \int_0^x \frac{\tau(\eta)}{(x-\eta)^{\alpha_i}} d\eta -$$

$$-\int_0^x \tau(\eta)d\eta \int_t^x \frac{\frac{\partial}{\partial t}G_i(x,t)}{\Gamma(1-\alpha_i)(t-\eta)^{\alpha_i}}dt, \quad \forall i \geqslant m+1,$$

или

$$V_i\tau = G_i(x,x)D_{0x}^{\alpha_i-1}\tau(\eta) + \int_0^x G_i^0(x,\eta)\tau(\eta)d\eta,$$

где

$$G_i^0(x,\eta) = \int_t^x \frac{\frac{\partial}{\partial t}G_i(x,t)}{\Gamma(1-\alpha_i)(t-\eta)^{\alpha_i}}dt.$$

На основании (3) $G_i^0(x,\eta) \in C(\bar{\Omega})$.

Пусть теперь $i \leqslant m$, тогда, согласно определению дробного интеграла порядка $-\alpha_i$, имеем

$$V_i\tau = \int_0^x \frac{G_i(x,t)}{\Gamma(-\alpha_i)}dt \int_0^t \frac{\tau(\eta)}{(t-\eta)^{\alpha_i+1}}d\eta.$$

Формула перестановки Дирихле говорит о том, что это равенство эквивалентно равенству

$$V_i\tau = \int_0^x G_i^0(x,\eta)\tau(\eta)d\eta, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где

$$G_i^0(x,\eta) = \int_\eta^x \frac{G_i(x,t)}{\Gamma(-\alpha_i)(t-\eta)^{\alpha_i+1}}dt.$$

Очевидно, что $G_i^0(x,\eta) \in C(\bar{\Omega})$.

Таким образом, доказано, что V — оператор, действующий на $\tau \in C[0,1]$ по формуле (32), представим в виде

$$V\tau = \int_0^x K^*(x,t)\tau(t)dt,$$

где ядро $K^*(x,t)$ при $x = t$ может иметь лишь слабую особенность.

Следовательно, уравнение (31) эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\tau(x) = \mu \int_0^x K^*(x,t)\tau(t)dt + \bar{F}(x). \tag{33}$$

После того как из (33) $\tau(x)$ найдено однозначно, решение $u(x,y)$ задачи Гурса (2) для уравнения (1) определяется как решение этой же задачи, но уже для ненагруженного уравнения

$$u_{yy} - |y|^m u_{xx} + au_x + bu_y + cu = d_0(x,y),$$

где

$$d_0(x,y) = \lambda a_i D_{0\xi}^{\alpha_i}\tau(\xi) + d(x,y).$$

ORCID
Анатолий Хусеевич Аттаев: http://orcid.org/0000-0001-5864-6283

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применение.* М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
3. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // *Дифференц. уравнения*, 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108.
4. Казиев М. В. Задача Гурса для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения // *Дифференц. уравнения*, 1981. Т. 17, № 2. С. 313–319.
5. Репин О. А., Тарасенко А. В. Задача Гурса и Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // *Математический журнал. Алматы*, 2011. Т. 11, № 2. С. 64–72, http://www.math.kz/images/journal/2011-2/Repin_Tarasenko.pdf (дата обращения: 23.10.2015).
6. Аттаев А. Х. Задача Гурса для локально нагруженного уравнения со степенным параболическим вырождением // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2008. Т. 10, № 2. С. 14–17.
7. Аттаев А. Х. Задача Гурса для нагруженного гиперболического уравнения // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2014. Т. 16, № 3. С. 9–12.
8. Огородников Е. Н. Некоторые характеристические задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений и их связь с нелокальными краевыми задачами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003. № 19. С. 22–28. doi: 10.14498/vsgtu134.
9. Огородников Е. Н. Корректность задачи Коши–Гурса для системы вырождающихся нагруженных гиперболических уравнений в некоторых специальных случаях и ее равносильность задачам с нелокальными краевыми условиями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004. № 26. С. 26–38. doi: 10.14498/vsgtu173.
10. Нахушев А. М. О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // *Дифференц. уравнения*, 1985. Т. 21, № 1. С. 92–101.
11. Gellerstedt S. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles de type mixte // *Ark. Mat. Astron. Fys. A*, 1937. vol. 25, no. 29. pp. 1–23.
12. Нахушев А. М. *Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка.* Нальчик: Эльбрус, 1992. 154 с.

Поступила в редакцию 13/X/2015;
в окончательном варианте — 23/X/2015;
принята в печать — 24/XI/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 7–21

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1452

MSC: 35L80

GOURSAT PROBLEM FOR LOADED DEGENERATE SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH GELLERSTEDT OPERATOR IN PRINCIPAL PART

A. H. Attaev

Institute of Applied Mathematics and Automation,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

In the paper we study a loaded degenerate hyperbolic equation of the second order with variable coefficients. The principal part of the equation is the Gellerstedt operator. The loaded term is given in the form of the trace of desired solution on the degenerate line. The latter is located in the inner part of the domain. We investigate a boundary value problem. The boundary conditions are given on a characteristics line of the equation under study. For the model equation (when all subordinated coefficients are zero) we construct an explicit representation for solution of the Goursat problem. In the general case, we reduce the problem to an integral Volterra equation of the second kind. We apply the method realized by Sven Gellerstedt solving the second Darboux problem. In both cases, model and general, we use widely properties of the Green–Hadamard function.

Keywords: Goursat problem, loaded equation, hyperbolic equation, degenerate equation, Gellerstedt operator, the Green–Hadamard's function method.

ORCID **Anatoly H. Attaev:** http://orcid.org/0000-0001-5864-6283

REFERENCES

1. Nakhushev A. M. *Nagruzhennye uravneniia i ikh primenenie* [Loaded equations and its applications]. Moscow, Nauka, 2012, 232 pp. (In Russian)
2. Nakhushev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow, Vysshaia shkola, 1995, 301 pp. (In Russian)
3. Nakhushev A. M. On the Darboux problem for a nondegenerate loaded integro-differential equation of the second order, *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 103–108 (In Russian).
4. Kaziev V. M. Goursat's problem for a loaded integrodifferential equation, *Differ. Equations*, 1981, vol. 17, no. 2, pp. 216–220.

Please cite this article in press as:
A t t a e v A. H. Goursat problem for loaded degenerate second order hyperbolic equation with Gellerstedt operator in principal part, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 7–21. doi: 10.14498/vsgtu1452. (In Russian)

Author Details:
Anatoly H. Attaev (Cand. Phys. & Math. Sci.; attaev.anatoly@yandex.ru), Head of Dept., Dept. CAD of Mixed Systems and Management.

5. Repin O. A., Tarasenko A. V. The Goursat and Darboux problems investigated for a loaded integro-differential equation of the second order, *Mathematical Journal*, 2011, vol. 11, no. 2, pp. 64–72 (In Russian), Retrieved from http://www.math.kz/images/journal/2011-2/Repin_Tarasenko.pdf (October 10, 2015).
6. Attaev A. H. A Goursat problem for a locally loaded parabolic equations with power degeneration, *Doklady Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunarodnoi akademii nauk*, 2008, vol. 10, no. 2, pp. 14–17 (In Russian).
7. Attaev A. H. A Goursat problem for a loaded hyperbolic equation, *Doklady Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunarodnoi akademii nauk*, 2014, vol. 16, no. 3, pp. 9–12 (In Russian).
8. Ogorodnikov E. N. Some characteristic problems for loaded systems of differential equations and their relationship with non-local boundary value problems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2003, no. 19, pp. 22–28 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu134.
9. Ogorodnikov E. N. The correctness of the Cauchy–Goursat problem for loaded degenerate hyperbolic equations in some special cases, and its equivalent to the problem with nonlocal boundary conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2004, no. 26, pp. 26–38 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu173.
10. Nakhushev A. M. Nonlocal boundary problems with displacement and their relation to loaded equations, *Differ. Equations*, 1985, vol. 21, no. 1, pp. 74–81.
11. Gellerstedt S. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles de type mixte, *Ark. Mat. Astron. Fys. A*, 1937, vol. 25, no. 29, pp. 1–23.
12. Nakhushev A. M. *Ob odnom klasse lineinykh kraevykh zadach dlia giperbolicheskogo i smeshannogo tipov uravnenii vtorogo poriadka* [One Class of Linear Boundary-Value Problems for Hyperbolic and Mixed-Type Equations of the Second Order]. Nal'chik, El'brus, 1992, 154 pp. (In Russian)

Received 13/X/2015;
received in revised form 23/X/2015;
accepted 24/XI/2015.