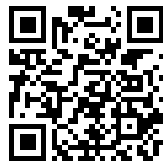


УДК 517.958:[535+537.812]

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ*



Г. Г. Исламов

Удмуртский государственный университет,
Россия, 426034, Ижевск, Университетская, 1.

Аннотация

Показано, что простой постулат «Поле смещений вакуума есть нормированное электрическое поле» эквивалентен трёхпараметрическому представлению поля смещения вакуума:

$$u(x; t) = P(x) \cos k(x)t + Q(x) \sin k(x)t.$$

Здесь t — время; $k(x)$ — частота колебаний в точке x трёхмерного евклидова пространства; $P(x)$, $Q(x)$ — ортонормированная пара стационарных векторных полей; (k, P, Q) — список параметров смещения. При этом нормировочный коэффициент $k^2(x)$ имеет размерность T^{-2} . Он обеспечивает единичную норму смещения $u(x; t)$ при любом t . Скорость поля смещений

$$v(x; t) = \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} = k(x)(Q(x) \cos k(x)t - P(x) \sin k(x)t).$$

Напряжённость электрического поля, отвечающего указанному распределению поля смещения вакуума, даётся формулой

$$E(x; t) = -\frac{\partial v(x; t)}{\partial t} = k^2(x)u(x; t).$$

При этом магнитная индукция

$$B(x; t) = \text{rot } v(x; t).$$

Эти конструкции применяются при отыскании локальных и глобальных решений системы уравнений Максвелла, описывающих динамику электромагнитных полей.

Ключевые слова: локальные и глобальные решения системы уравнений Максвелла, спектральная задача для ротора, малые течения поля смещения.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1382>

© 2015 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования

Исламов Г. Г. Об одном классе векторных полей // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2015. Т. 19, № 4. С. 680–696. doi: [10.14498/vsgtu1382](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1382).

Сведения об авторе

Галимзян Газизович Исламов (д.ф.-м.н., проф.; [ggislamov@gmail.com](mailto:gislamov@gmail.com)), заведующий кафедрой, каф. высокопроизводительных вычислений и параллельного программирования.

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного автором на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа — 1 сентября 2014).

Введение. Аналогия между уравнениями гидродинамики Гельмгольца и уравнениями электродинамики Максвелла отмечалась в разных работах (см., например, [2–4]). Этот важный факт находит явное подтверждение в кинематической таблице физических величин — LT -таблице Брауна [5] и Бартини [6]. Эта таблица использовалась рядом авторов (П. Г. Кузнецов, О. Л. Кузнецов, Б. Е. Большаков, А. Е. Петров) при анализе и поиске общих законов природы.

Аналогия разных физических величин, попадающих в одну клетку $L^m T^n$ кинематической таблицы, где L и T есть соответственно размерности длины и времени, заключается в том, что они имеют одинаковую качественную определённость. При заполнении этой таблицы можно исходить из разных физических формул. Однако во всех LT -таблицах для размерности электрического заряда и массы принята формула Максвелла $[q] = [m] = L^3 T^{-2}$. Кроме того, общей оказывается и формула для размерности силы $[F] = L^4 T^{-4}$. Из выражения для лоренцевой силы $F = q(E + v \times B)$, где E и B есть соответственно напряжённость и индукция электромагнитного поля, а v — скорость движения заряда ($[v] = LT^{-1}$), находим выражения для размерностей $[E] = LT^{-2}$, $[B] = T^{-1}$.

Длина и время — это две физические величины, для измерения которых созданы наиболее совершенные приборы: лазерный радар и атомные часы. Поэтому можно предположить, что значение кинематической таблицы будет возрастать в процессе дальнейшего научного исследования природы и общества.

1. Поле смещений вакуума. Основу математического исследования составляет трёхпараметрическое поле (смещений вакуума):

$$u(x; t) = P(x) \cos k(x)t + Q(x) \sin k(x)t.$$

Здесь t — время; $k(x)$ — частота колебаний в точке x трёхмерного евклидова пространства; $P(x)$, $Q(x)$ — ортонормированная пара стационарных векторных полей; (k, P, Q) — список параметров смещения. Оно получено из простого постулата: *поле смещений вакуума есть нормированное электрическое поле*. При этом нормировочный коэффициент $k^2(x)$ имеет размерность T^{-2} . Он обеспечивает единичную норму смещения $u(x; t)$ при любом t . Вычислим скорость поля смещений

$$v(x; t) = \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} = k(x)(Q(x) \cos k(x)t - P(x) \sin k(x)t).$$

Напряжённость электрического поля, отвечающего указанному распределению поля смещения вакуума, даётся формулой

$$E(x; t) = -\frac{\partial v(x; t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial t^2} = k^2(x)u(x; t).$$

При этом магнитная индукция

$$B(x; t) = \text{rot } v(x; t) = \text{rot}(k(x)(Q(x) \cos k(x)t - P(x) \sin k(x)t)).$$

Динамика электромагнитного поля, отвечающего паре $(E(x; t), B(x; t))$, описывается известными уравнениями Максвелла (1861). Математической

теории этих уравнений посвящено огромное число работ. Мы упомянем лишь одну работу [7]. Исторический аспект возникновения уравнений Максвелла рассматривался разными авторами (см., например, [8–10]). Известные виды симметрии уравнений Максвелла подробно рассмотрены в [11]. Независимость и полнота уравнений Максвелла, а также теоремы единственности в теории электромагнетизма, изучались в работе [12].

Непосредственным применением аппарата векторного исчисления [13] проверяется справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть H есть векторная проекция индукции $B(x; t)$ на векторное произведение $P(x) \times Q(x)$. В каждой точке x евклидова пространства тройка векторов (E, H, v) ортогональная. Вектор E вращается в плоскости векторов $P(x)$ и $Q(x)$ от первого вектора ко второму с частотой $k(x)$. Вектор v вращается в той же плоскости от $Q(x)$ к $-P(x)$ с той же частотой. Вектор H перпендикулярен плоскости вращения векторов E, v .

Следующее утверждение представляет собой переформулировку теоремы разложения Гельмгольца—Ходжа для векторных полей [14].

ТЕОРЕМА 2. Поле смещений $u(x; t)$ в любой ограниченной области D с гладкой границей ∂D может быть единственным образом разложено в сумму скалярной и вихревой компоненты

$$u(x; t) = \nabla\psi(x; t) + w(x; t),$$

причём $\operatorname{div} w = 0$, $\Delta\psi = \operatorname{div} u$, на границе области D вихревое поле w перпендикулярно к нормали границы.

Для решения трёхмерной задачи Неймана в предыдущей теореме существует множество методов (см., например, [15]).

В приводимой ниже теореме раскрывается физический смысл скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля [16], а также скалярного магнитного поля, рассмотренного в работе [17].

ТЕОРЕМА 3. Скалярный потенциал φ электромагнитного поля (E, B) есть ускорение $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$.

Векторный потенциал A поля (E, B) есть скорость изменения $\frac{\partial w}{\partial t}$ вихревой компоненты поля смещений $u(x; t)$.

Скалярное магнитное поле B^* есть рывок $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^3\psi}{\partial t^3}$, c — скорость света в вакууме.

Применим трёхпараметрическое поле смещений вакуума к отысканию локальных решений уравнений Максвелла. Предположим сначала, что круговая частота не зависит от выбора точки x : $k(x) \equiv \omega$. Ниже будет показано, что это предположение выполнено для уравнений Максвелла без источников:

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t},$$

где c — скорость света. Подстановка выражений для $E(x; t)$ и $B(x; t)$ даёт

$$\operatorname{div} P = 0, \quad \operatorname{div} Q = 0, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} P = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 P, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} Q = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 Q.$$

Типичная схема решения спектральной задачи для квадрата ротора основана на векторном тождестве

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} F = \operatorname{grad} \operatorname{div} F - \Delta F,$$

содержащем векторный оператор Лапласа Δ . В евклидовой системе координат он распадается на тройку скалярных операторов Лапласа, что не имеет места в криволинейных системах координат [18].

Внимательный анализ выписанных выше уравнений показывает, что достаточно решить спектральную задачу для ротора $\operatorname{rot} F = \lambda F$, где в нашем случае $\lambda = \omega/c$.

Это известная задача, которой посвящён ряд работ (см. цитирования ниже и приведённую там литературу). Как правило, эту задачу рассматривают в классическом гильбертовом пространстве квадратично-суммируемых в некоторой области Ω гладких вектор-функций с определёнными граничными условиями (см., например, [19, 20]).

В приложениях обычно область Ω ограничена (случай локальных решений уравнений Максвелла). При этом требуют, чтобы векторное поле $F(x)$ было «приглажено» на границе области Ω (см. [21, 22]).

В частности, для шара радиуса R с центром в начале координат ненулевое собственное значение спектральной задачи для ротора с условием перпендикулярности поля к нормали границы шара даётся формулой

$$\lambda = \frac{\rho_{m,n}}{R},$$

где $\rho_{m,n}$ — любой нуль функции Бесселя дробного порядка $J_{n+1/2}(z)$, $m, n \geq 1$ (случай $n = 0$ функции Бесселя, как будет показано ниже, приводит к решениям, сингулярным на полюсах сферы). При этом кратность собственного значения $\rho_{m,n}$ равна $2n + 1$. Доказательство этого факта приведено в работе Сакса [23]. Там же найдена соответствующая система собственных функций. При этом отмечено, что $\rho_{m,n}$ совпадают с нулями функции

$$\psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{zdz} \right)^n \left(\frac{\sin z}{z} \right)$$

и, таким образом, лежат на действительной оси и симметричны относительно точки $z = 0$. Отсюда получаем важную для нас формулу, связывающую круговую частоту колебаний локального электромагнитного поля с радиусом охватывающего его шара:

$$\omega = \rho_{m,n} \frac{c}{R}.$$

При $n = 1$ имеем

$$\psi_1(z) = \frac{\sin z - z \cos z}{z^2}.$$

Нас интересует минимальный положительный нуль этой функции $\rho_{1,1}$. Вычисления в системе *Mathematica* показывают, что $\rho_{1,1} \approx 4.49341$.

Применим полученную формулу для частоты электромагнитного поля к шару радиуса протона. Из физического справочника берём радиус протона

$R = 8.79 \cdot 10^{-16}$ м. Скорость света в вакууме $c = 299792458$ м/с. Отсюда получаем круговую частоту $\omega = 1.53253 \cdot 10^{24}$.

Произведём сравнение энергий, вычисленных по двум разным формулам: де Бройля ($\hbar\omega$) и Эйнштейна (mc^2).

Произведение приведённой постоянной Планка

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571628 \cdot 10^{-34}$$

на найденную частоту ω даёт величину $\hbar\omega = 1.61616 \cdot 10^{-10}$.

Масса покоя протона $m = 1.672621637 \cdot 10^{-27}$. Вычисляя энергию по второй формуле, получим $mc^2 = 1.50328 \cdot 10^{-10}$. Относительная погрешность расхождения результатов вычисления по двум известным формулам для вычисления энергии (де Бройля и Эйнштейна) равна 0.0750899, т.е. меньше восьми процентов.

Можно явно выписать для нуля $\rho_{1,1} \approx 4.49341$ все три собственные функции, образующие базис подпространства собственных функций спектральной задачи для ротора, и тем самым получить систему трёх электрических полей, образующих «остов» предположительно протона. Заметим, что эти поля колеблются с одной и той же круговой частотой $\omega = 1.53253 \cdot 10^{24}$.

Но мы рассмотрим наиболее интересный случай, когда $n = 0$. Он не рассмотрен в работе [23] по понятной причине: не выполнены наложенные автором граничные условия. Хотя кратность нулей функции $\psi_0(z) = \sin z/z$ равна единице, тем не менее соответствующая спектральная задача для ротора имеет два линейно независимых решения, правда, сингулярных. Если ограничиться только положительными нулями, то наименьшее значение равно π . Поэтому нас будет интересовать следующая спектральная задача:

$$\text{rot } F = \frac{\pi}{R} F$$

в шаре радиуса R .

Вычислим частоту $\omega = \pi c/R$ электрического поля в шаре R радиуса электрона. Относительно значения последней величины есть множество мнений. Мы же рассчитаем значение R исходя из равенства $\hbar\omega = mc^2$, которое мы уже использовали выше. Но в этой формуле теперь возьмём массу покоя электрона $m = 9.10938215 \cdot 10^{-31}$ кг.

Имеем $\omega = mc^2/\hbar$. Отсюда находим радиус шара $R = \pi\hbar/(mc) = 1.21316 \times 10^{-12}$ м. Видим, что найденное значение на три порядка больше классического радиуса электрона, равного $2.8179402894 \cdot 10^{-15}$ м. При этом частота колебаний $\omega = \pi c/R = 7.76344 \cdot 10^{20}$, т.е. на четыре порядка ниже частоты колебаний электрического поля для шара радиуса протона.

2. Задача для ротора в криволинейных координатах. Так как трёхмерная область Ω , отличная от шара, может иметь свою симметрию, рассмотрим спектральную задачу

$$\text{rot } F = \lambda F$$

в общей криволинейной системе координат.

Если в области Ω введены криволинейные координаты (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , то радиус-вектор A текущей точки (x_1, x_2, x_3) евклидовой системы координат является функцией от криволинейных координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Через произвольно

взятую точку криволинейной системы координат проходят три координатные поверхности и три координатные линии. В общем случае координатные поверхности и линии будут криволинейными [13].

Предполагается, что система векторов $\left\{ \frac{\partial A}{\partial \xi_1}, \frac{\partial A}{\partial \xi_2}, \frac{\partial A}{\partial \xi_3} \right\}$ линейно независима, за исключением конечного числа особых точек области Ω . В этом случае система называется *подвижным репером* криволинейной системы координат.

Смешанное произведение векторов подвижного репера отлично от нуля. Отсюда следует линейная независимость попарных векторных произведений векторов этой системы. Поэтому подвижному реперу отвечает *сопутствующий базис*, составленный из попарных векторных произведений векторов этого репера. По каждому такому базису криволинейной системы координат можно разложить произвольно взятый вектор. Иногда бывает удобно разложить скалярное поле или векторное поле не по векторам подвижного репера, а по векторам сопутствующего базиса.

В [13] для градиента скалярного поля $\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ в терминах скалярного $a \cdot b$, векторного $a \times b$ и смешанного (a, b, c) произведений векторов даётся вывод следующих разложений:

$$\text{grad } \Phi = \frac{1}{\left(\frac{\partial A}{\partial \xi_1}, \frac{\partial A}{\partial \xi_2}, \frac{\partial A}{\partial \xi_3} \right)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial A}{\partial \xi_2} \times \frac{\partial A}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial A}{\partial \xi_3} \times \frac{\partial A}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_3} \cdot \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial A}{\partial \xi_2} \right].$$

Выражение для дивергенции векторного поля $F(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ в криволинейных координатах получено в следующей удобной форме:

$$\text{div } F = \frac{1}{\left(\frac{\partial A}{\partial \xi_1}, \frac{\partial A}{\partial \xi_2}, \frac{\partial A}{\partial \xi_3} \right)} \left[\frac{\partial \left(F, \frac{\partial A}{\partial \xi_2}, \frac{\partial A}{\partial \xi_3} \right)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \left(F, \frac{\partial A}{\partial \xi_3}, \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \right)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \left(F, \frac{\partial A}{\partial \xi_1}, \frac{\partial A}{\partial \xi_2} \right)}{\partial \xi_3} \right].$$

Для ротации этого поля получена формула в виде следующего символического определителя:

$$\text{rot } F = \frac{1}{\left(\frac{\partial A}{\partial \xi_1}, \frac{\partial A}{\partial \xi_2}, \frac{\partial A}{\partial \xi_3} \right)} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial \xi_1} & \frac{\partial A}{\partial \xi_2} & \frac{\partial A}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ F \cdot \frac{\partial A}{\partial \xi_1} & F \cdot \frac{\partial A}{\partial \xi_2} & F \cdot \frac{\partial A}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}.$$

Если векторы подвижного репера $\left\{ \frac{\partial A}{\partial \xi_1}, \frac{\partial A}{\partial \xi_2}, \frac{\partial A}{\partial \xi_3} \right\}$ образуют ортогональную систему, то обычно её нормируют. Получаемый таким способом новый репер $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0\}$ будет ортонормированным. Предположим, что векторы этого репера образуют правую систему. Тогда будут иметь место следующие соотношения:

$$e_2^0 \times e_3^0 = e_1^0, \quad e_3^0 \times e_1^0 = e_2^0, \quad e_1^0 \times e_2^0 = e_3^0, \quad (e_1^0, e_2^0, e_3^0) = 1.$$

Обозначив

$$h_1 = \left| \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \right|, \quad h_2 = \left| \frac{\partial A}{\partial \xi_2} \right|, \quad h_3 = \left| \frac{\partial A}{\partial \xi_3} \right|$$

(эти скалярные величины называются *коэффициентами Ламе* ортогональной криволинейной системы координат), получим следующее представление подвижного репера через ортонормированный:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi_1} = h_1 e_1^0, \quad \frac{\partial A}{\partial \xi_2} = h_2 e_2^0, \quad \frac{\partial A}{\partial \xi_3} = h_3 e_3^0.$$

Дифференциальные операции в ортогональной криволинейной системе координат в терминах ортонормированного репера $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0\}$ и коэффициентов Ламе $\{h_1, h_2, h_3\}$ принимают компактный вид:

$$\begin{aligned} \nabla \Phi &= \text{grad } \Phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} e_1^0 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} e_2^0 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_3} e_3^0, \\ \nabla \cdot F &= \text{div } F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 F \cdot e_1^0)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 F \cdot e_2^0)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 F \cdot e_3^0)}{\partial \xi_3} \right], \\ \nabla \times F &= \text{rot } F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \begin{vmatrix} h_1 e_1^0 & h_2 e_2^0 & h_3 e_3^0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ h_1 F \cdot e_1^0 & h_2 F \cdot e_2^0 & h_3 F \cdot e_3^0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Решение F спектральной задачи $\lambda F = \text{rot } F$ разложим по ортонормированному базису:

$$F = F_1 e_1^0 + F_2 e_2^0 + F_3 e_3^0.$$

Разлагая символический определитель в выражении для $\text{rot } F$ по элементам первой строки, получим

$$\frac{1}{h_1 g_1} \left(\frac{\partial G_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial G_2}{\partial \xi_3} \right) e_1^0 - \frac{1}{h_2 g_2} \left(\frac{\partial G_3}{\partial \xi_1} - \frac{\partial G_1}{\partial \xi_3} \right) e_2^0 + \frac{1}{h_3 g_3} \left(\frac{\partial G_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial G_1}{\partial \xi_2} \right) e_3^0,$$

где приняты следующие замены переменных:

$$G_1 = F_1 h_1, \quad G_2 = F_2 h_2, \quad G_3 = F_3 h_3$$

и следующие преобразования коэффициентов Ламе:

$$g_1 = \frac{h_2 h_3}{h_1}, \quad g_2 = \frac{h_1 h_3}{h_2}, \quad g_3 = \frac{h_1 h_2}{h_3}.$$

Нетрудно видеть, что $h_1 h_2 h_3 = g_1 g_2 g_3$, а обратное преобразование имеет вид

$$h_1 = \sqrt{g_2 g_3}, \quad h_2 = \sqrt{g_1 g_3}, \quad h_3 = \sqrt{g_1 g_2}.$$

Теперь видно, что скалярная форма спектральной задачи для ротора преобразует простой вид относительно новой группы переменных G_1, G_2, G_3 :

$$\lambda G_1 g_1 = \left(\frac{\partial G_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial G_2}{\partial \xi_3} \right), \quad \lambda G_2 g_2 = \left(\frac{\partial G_1}{\partial \xi_3} - \frac{\partial G_3}{\partial \xi_1} \right), \quad \lambda G_3 g_3 = \left(\frac{\partial G_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial G_1}{\partial \xi_2} \right).$$

В силу симметрии шара радиуса R , где решается спектральная задача для ротора, целесообразно перейти в сферическую систему координат относительно переменных

$$\xi_1 = r, \quad 0 \leq r < \infty; \quad \xi_2 = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad \xi_3 = \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

которые называются соответственно «радиусом», «широтой» и «долготой».

Формулы перехода от сферической системы к евклидовой задаются соотношениями

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta.$$

Поэтому для радиус вектора A текущей точки (x_1, x_2, x_3) евклидовой системы координат имеем

$$A = \{r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta\}.$$

Отсюда находим, что векторы подвижного репера выражаются формулами

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\},$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \{r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta\},$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi} = \{-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0\}.$$

Параметры Ламе следующие:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta.$$

Их преобразования имеют вид

$$g_1 = r^2 \sin \theta, \quad g_2 = \sin \theta, \quad g_3 = \frac{1}{\sin \theta}.$$

Поэтому в сферической системе координат спектральная задача для ротора $\lambda F = \text{rot } F$ в новых переменных $G_1 = F_1, G_2 = F_2 r, G_3 = F_3 r \sin \theta$ примет следующий вид:

$$\lambda G_1 r^2 \sin \theta = \left(\frac{\partial G_3}{\partial \theta} - \frac{\partial G_2}{\partial \varphi} \right), \quad \lambda G_2 \sin \theta = \left(\frac{\partial G_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial G_3}{\partial r} \right),$$

$$\lambda G_3 \frac{1}{\sin \theta} = \left(\frac{\partial G_2}{\partial r} - \frac{\partial G_1}{\partial \theta} \right).$$

Непосредственной подстановкой проверяется, что эта система имеет два решения. Первое решение:

$$G_1 = \frac{1}{r^2} \sin(\lambda r), \quad G_2 = \lambda \cos(\lambda r) \cot \theta, \quad G_3 = -\lambda \sin(\lambda r) \cos \theta.$$

Второе решение:

$$G_1 = 0, \quad G_2 = -\cos(\lambda r) \frac{1}{\sin \theta}, \quad G_3 = \sin(\lambda r).$$

Заметим, что найденные решения зависят только от радиуса и широты θ , но не зависят от долготы φ .

Переходя к основным переменным и вспоминая, что $\lambda = \frac{\pi}{R}$, получим два решения спектральной задачи $\operatorname{rot} F = \frac{\pi}{R} F$:

$$F^1 = \left(\frac{1}{r^2} \sin \left(\frac{\pi r}{R} \right), \frac{\pi}{rR} \cos \left(\frac{\pi r}{R} \right) \cot \theta, -\frac{\pi}{rR} \sin \left(\frac{\pi r}{R} \right) \cot \theta \right),$$

$$F^2 = \left(0, -\frac{1}{r} \cos \left(\frac{\pi r}{R} \right) \operatorname{csc} \theta, \frac{1}{r} \sin \left(\frac{\pi r}{R} \right) \operatorname{csc} \theta \right).$$

Эти сингулярные решения указаны и в статье [24], при этом автор отмечает, что он находил их в работах 1966 года. Возможно, они приводятся в более ранних публикациях по электромагнетизму.

Для устранения сингулярности введём скалярное произведение с весом $(r \sin \theta)^2$:

$$(F^1, F^2) = \int_0^R \int_0^\pi F^1 \cdot F^2 (r \sin \theta)^2 dr d\theta.$$

Найденные решения ортогональны относительно этого скалярного произведения и после нормировки дают нам стационарные поля

$$P = F^1 / \sqrt{(F^1, F^1)}, \quad Q = F^2 / \sqrt{(F^2, F^2)}$$

изменяющегося с частотой $\omega = \pi c / R = 7.76344 \cdot 10^{20}$ локального электрического поля (предположительно) электрона

$$E(x; t) = \omega^2 (P(x) \cos \omega t + Q(x) \sin \omega t).$$

3. О независимости частоты от положения точки в пространстве. Изучим характер зависимости частоты $k(x)$ электрического поля $E(x; t)$ от положения x в пространстве \mathbb{R}^3 . Известная формула

$$\operatorname{rot} f(x)F(x) = f(x) \operatorname{rot} F(x) + \nabla f(x) \times F(x)$$

(здесь $f(x)$ — скалярное, а $F(x)$ — векторное поле в трёхмерном пространстве), применённая к равенству

$$B(x; t) = \operatorname{rot}[k(x)(Q(x) \cos k(x)t - P(x) \sin k(x)t)],$$

даёт линейный рост зависимости индукции магнитного поля от времени t .

При вычислении дивергенции электрического поля

$$E(x; t) = k^2(x)(P(x) \cos k(x)t + Q(x) \sin k(x)t),$$

воспользовавшись формулой

$$\operatorname{div} f(x)F(x) = f(x) \operatorname{div} F(x) + \nabla f(x) \cdot F(x)$$

(здесь точка “.” обозначает скалярное произведение в \mathbb{R}^3), опять получим линейный рост зависимости от времени t .

Отсюда следует, что первое уравнение системы Максвелла

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

выполняется тогда и только тогда, когда имеют место следующие тождества:

$$\operatorname{div} P(x) = 0, \quad \nabla k(x) \cdot P(x) = 0, \quad \operatorname{div} Q(x) = 0, \quad \nabla k(x) \cdot Q(x) = 0.$$

Второе и третье уравнение автоматически выполнены в силу представления трёхпараметрического поля смещения вакуума. Осталось получить эквивалент последнего уравнения. Имеем

$$\operatorname{rot} B(x; t) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} v(x; t) = \left(\frac{k(x)}{c} \right)^2 v(x; t).$$

В силу самосопряжённости оператора ротора у него нет присоединённых векторов. Поэтому переходим к спектральной задаче для ротора

$$\operatorname{rot} v(x; t) = \frac{k(x)}{c} v(x; t).$$

Так как

$$v(x; t) = k(x)(Q(x) \cos k(x)t - P(x) \sin k(x)t),$$

получим эквивалентную последнему уравнению Максвелла систему тождеств

$$\operatorname{rot} P(x) = \frac{k(x)}{c} P(x), \quad \nabla k(x) \times P(x) = 0,$$

$$\operatorname{rot} Q(x) = \frac{k(x)}{c} Q(x), \quad \nabla k(x) \times Q(x) = 0.$$

Все условия на функцию частоты $k(x)$ приводят к простому равенству

$$\nabla k(x) = 0,$$

что в случае отсутствия источников электромагнитного поля означает независимость частоты колебаний электрического поля от рассматриваемой точки x .

Однако, если применить трёхпараметрическую форму с переменной частотой $k(x)$ к системе уравнений Максвелла с источниками, то обнаружим линейный по времени рост плотности электрического заряда и плотности тока.

4. Малые течения физического вакуума. Течение физического вакуума описывается уравнением с нестационарным полем скоростей:

$$\frac{dy}{dt} = v(y; t), \quad y(0) = x.$$

Характер течения зависит от величины времени наблюдения за процессом. Предполагая, что интервал наблюдения мал, можно надеяться, что приращение $h = y(t) - x$ будет мало. В окрестности точки $(x; 0)$ имеет место разложение

$$v(y; t) = v(x; 0) + \nabla v(x; 0)h + \frac{\partial v(x; 0)}{\partial t}t + O(h^2 + t^2).$$

Введём обозначения для тензоров:

$$A = \nabla v(x; 0), \quad D = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad S = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

и векторов:

$$b = B(x; 0) = \text{rot } v(x; 0), \quad f(x) = v(x; 0) + \frac{\partial v(x; 0)}{\partial t} t = v(x; 0) - E(x; 0)t.$$

Заметим, что D — симметрический тензор скоростей деформаций в точке x , S — кососимметрический тензор с аксиальным вектором индукции магнитного поля в точке x : $Sh = \frac{1}{2}b \times h$. Так как $dy = dh$, линейризованное уравнение относительно приращения h запишется в виде

$$\frac{dh}{dt} = Ah + f = Dh + \frac{1}{2}b \times h + f, \quad h(0) = 0.$$

Классическая формула Коши решения этого неоднородного уравнения

$$h(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds,$$

где используется матричная экспонента $e^{A(t-s)}$, не позволяет увидеть физический смысл результата.

Поступим следующим образом. Так как тензоры D и S есть функции тензора A , они коммутируют. Значит, матричная экспонента интегрального представления решения расщепляется в произведение матричных экспонент

$$e^{A(t-s)} = e^{D(t-s)} e^{S(t-s)} = e^{S(t-s)} e^{D(t-s)}.$$

Имеем

$$h(t) = \int_0^t e^{S(t-s)} g(t, s) ds, \quad g(t, s) = e^{D(t-s)} f(s) = e^{D(t-s)} (v(x; 0) - E(x; 0)s),$$

где $E(x; 0)$ — вектор электрической напряжённости в точке x в начальный момент времени $t = 0$.

Пусть $D = T(x) \text{diag} \{ \nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x) \} T^*(x)$ — спектральное разложение симметрического тензора. Тогда

$$g(t, s) = T(x) \text{diag} \{ e^{\nu_1(x)(t-s)}, e^{\nu_2(x)(t-s)}, e^{\nu_3(x)(t-s)} \} T^*(x) (v(x; 0) - E(x; 0)s).$$

Отсюда видно влияние тензора скоростей деформаций на процесс интегрирования линейризованного уравнения, определяющего малые приращения при формировании течения эфира.

Остаётся выяснить влияние кососимметрического тензора. Для этого разложим в степенной ряд матричную экспоненту $e^{S(t-s)}$:

$$e^{S(t-s)} g = g + \frac{1}{1!} (t-s) Sg + \dots + \frac{1}{n!} (t-s)^n S^n g + \dots$$

Заметим, что $Sg = \frac{1}{2}b \times g$, где $b = B(x; 0)$ — вектор индукции магнитного поля в точке x в начальный момент времени $t = 0$.

Далее, $S^2g = \frac{1}{4}b \times (b \times g)$. Так как $S^2g = \frac{1}{4}b(b \cdot g) - \frac{1}{4}gb^2$, имеем

$$S^3g = \frac{1}{2}b \times S^2g = -\frac{b^2}{8}b \times g = -\frac{b^2}{4}Sg.$$

Сумму сходящегося степенного ряда найдём, суммируя сначала все нечётные степени отображения S , а потом все чётные степени этого отображения. С учётом найденных закономерностей образования степеней получим выражение для $e^{S(t-s)}g$ в виде

$$e^{S(t-s)}g = \alpha(t, s)b \times g + \beta(t, s)b \times (b \times g),$$

где скалярные функции $\alpha(t, s)$ и $\beta(t, s)$ могут быть явно выписаны.

Теперь остаётся воспользоваться теоремой о среднем для интеграла

$$h(t) = \int_0^t e^{S(t-s)}g(t, s) ds,$$

согласно которой для некоторой точки $s^* = s(t)$ можем написать выражение для зависимости от времени приращения в выражении для функции $y(t) = x + h(t)$, описывающей течение физического вакуума:

$$h(t) = g(t, s^*) + \alpha(t, s^*)b \times g(t, s^*) + \beta(t, s^*)b \times (b \times g(t, s^*)).$$

5. Нестандартное решение системы уравнений Максвелла. Примеры решений уравнений Максвелла без источников, отличные от найденных Максвеллом плоских волн, широко известны [24–26].

Здесь мы дополним этот список. Для этого рассмотрим «вырожденную форму» трёхпараметрического представления, когда $Q(x) = iP(x)$. Умножение на комплексную единицу i приводит к повороту на угол $\pi/2$ вектора $P(x)$ вокруг своей оси. По формуле Эйлера имеем экспоненциальный вид поля смещения эфира:

$$u(x; t) = P(x)e^{ik(x)t}.$$

Далее ограничимся случаем $k(x) \equiv i\mu$, где μ — константа любого знака. Стационарный вектор $P(x)$ выберем в виде произведения скалярной функции

$$f(x) = e^{\frac{\mu}{c}s}, \quad s = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

и постоянного вектора $G = (G_1, G_2, G_3)$. Очевидно, что

$$\nabla f(x) = \frac{\mu}{c}f(x) \{\alpha, \beta, \gamma\} \quad \text{и} \quad \text{rot } G = 0.$$

Теперь имеем

$$u(x; t) = f(x)Ge^{-\mu t}.$$

Предыдущие выкладки показывают, что для нахождения решения системы уравнений Максвелла без источников достаточно проверить выполнение равенства

$$\frac{i\mu}{c}P(x) = \text{rot } P(x).$$

Так как

$$\operatorname{rot} P(x) = \operatorname{rot}(f(x)G) = f(x) \operatorname{rot} G + \nabla f(x) \times G,$$

получим спектральную задачу

$$\frac{i\mu}{c} f(x)G = \nabla f(x) \times G.$$

После сокращения на $\frac{\mu}{c} f(x)$ эта задача запишется в простом виде:

$$iG - \{\alpha, \beta, \gamma\} \times G = 0.$$

Это обыкновенная однородная система линейных уравнений относительно координат G_1, G_2, G_3 постоянного вектора G . Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} i & \gamma & -\beta \\ -\gamma & i & \alpha \\ \beta & -\alpha & i \end{vmatrix} = i(-1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0.$$

Значит, эта система имеет ненулевое решение. При $\gamma^2 \neq 1$ подпространство решений одномерно и вектор

$$G = \left\{ \frac{i\beta + \alpha\gamma}{1 - \gamma^2}, \frac{i\alpha + \beta\gamma}{\gamma^2 - 1}, 1 \right\}$$

образует базис этого подпространства. В противном случае базис будет двумерным. Его также можно выписать явно.

Очевидно, что спектральный параметр μ может быть любым вещественным числом (спектр непрерывный, сплошной, занимает всю числовую прямую). Заметим, что скалярная функция $f(x)$ электрического поля

$$E(x; t) = -\mu^2 f(x) G e^{-\mu t}$$

вещественна, чего не скажешь относительно компонент постоянного вектора G .

Таким образом, существует электрическое поле, которое удовлетворяет системе уравнений Максвелла без источников и «заряжается» и «разряжается» по экспоненциальному закону с любой скоростью μ .

Заключение. Система уравнений Максвелла без источников нуждается в дальнейшем изучении. Новые локальные и глобальные решения этой системы открывают путь к изучению электромагнитного строения физического вакуума и элементарных частиц.

ORCID

Галимзян Газизович Исламов: <http://orcid.org/0000-0002-7004-0177>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Исламов Г. Г. Об одном классе векторных полей / Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 187.

2. Poincaré H. *Théorie des tourbillons. Leçons professées pendant le 2^e semestre 1891–92, rédigés par Lamotte*: [Reproduction en fac-similé, 1893]. Sceaux: J. Gabay, 1990. 221 pp. (на французском), [NUMM-29068](#).
3. Жилин П. А. Реальность и механика / *Актуальные проблемы механики*. Т. 1. СПб.: ИПМаш РАН, 2006. С. 54–90, http://teormeh.spbstu.ru/Zhilin_New/pdf/Zhilin_Reality_rus.pdf; *Труды XXIII летней школы “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”*. СПб., 1996. С. 6–49.
4. Козлов В. В. *Общая теория вихрей*. М., Ижевск: Инст. комп. иссл., 2013. 324 с.
5. Brown G. V. A new treatment of the theory of dimensions // *Proc. Phys. Soc.*, 1941. vol. 53, no. 4. pp. 418–432. doi: [10.1088/0959-5309/53/4/307](#).
6. ди Бартини Р. О. Некоторые соотношения между физическими константами // *ДАН СССР*, 1965. Т. 163, № 4. С. 861–864.
7. Kirsch A., Hettlich F. *The Mathematical Theory of Time-Harmonic Maxwell’s Equations / Applied Mathematical Sciences*. vol. 190. New York: Springer, 2015, xiii+337 pp. doi: [10.1007/978-3-319-11086-8](#).
8. Шапиро И. С. К истории открытия уравнений Максвелла // *Успехи физических наук*, 1972. Т. 108, № 2. С. 319–333. doi: [10.3367/UFNr.0108.197210f.0319](#).
9. Левин М. Л., Миллер М. А. Максвелловский «Трактат об электричестве и магнетизме» // *УФН*, 1981. Т. 135, № 3. С. 425–440. doi: [10.3367/UFNr.0135.198111d.0425](#).
10. Capria M. M., Manini M.-G. *On the relativistic unification of electricity and magnetism*, 2011. 47 pp., arXiv: [1111.7126](#) [physics.hist-ph]
11. Фуцич В. И., Никитин А. Г. О новых и старых симметриях уравнений Максвелла и Дирака // *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, 1983. Т. 14, № 1. С. 5–57, <http://www1.jinr.ru/Archive/Pepan/1983-v14/v-14-1/1.htm>.
12. Zhou X. L. On independence, completeness, uniqueness of Maxwell’s equations and uniqueness theorems in electromagnetics // *PIER*, 2006. vol. 64. pp. 117–134. doi: [10.2528/pier06061302](#).
13. Лаптев Г. Ф. *Элементы векторного исчисления*. М.: Наука, 1975. 336 с.
14. Chorin A. J., Marsden J. E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics / Universitext*. New York: Springer-Verlag, 1979. vii+205 pp.. doi: [10.1007/978-1-4684-0082-3](#).
15. Боголюбов А. Н., Левашова Н. Т., Могилевский И. Е., Мухартова Ю. В., Шапкина Н. Е. *Функция Грина оператора Лапласа*. М.: МГУ, Физический факультет, 2012. 130 с., http://math.phys.msu.ru/data/51/10_Func_Grina_WEB.pdf.
16. Мешков И. Н., Чириков Б. В. *Электромагнитное поле. Ч. 1. Электричество и магнетизм*. М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2013. 544 с.
17. Tomilin A. K. The potential-vortex theory of electromagnetic waves // *JEMAA*, 2013. vol. 5, no. 9. pp. 347–353. doi: [10.4236/jemaa.2013.59055](#).
18. Matute E. A. On the vector solutions of Maxwell equations in spherical coordinate systems // *Rev. Mex. Fis. E*, 2005. vol. 51, no. 1. pp. 31–36, arXiv: [physics/0512261](#) [physics.class-ph].
19. Филонов Н. Спектральный анализ самосопряженного оператора rot в области конечной меры // *Алгебра и анализ*, 1999. Т. 11, № 6. С. 178–190.
20. Сакс Р. С. Решение спектральной задачи для оператора ротор и оператора Стокса с периодическими краевыми условиями / *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 36 / Зап. научн. сем. ПОМИ*, Т. 318. СПб.: ПОМИ, 2004. С. 246–276.
21. Cantarella J., DeTurck D., Gluck H., Teytel M. The spectrum of the curl operator on spherically symmetric domains // *Phys. plasmas*, 2000. vol. 7, no. 7. pp. 2766–2775. doi: [10.1063/1.874127](#).
22. Ghrist R., Komendarczyk R. Overtwisted energy-minimizing curl eigenfields // *Nonlinearity*, 2006. vol. 19, no. 1. pp. 41–51, arXiv: [math/0411319](#) [math.SG]. doi: [10.1088/0951-7715/19/1/003](#).
23. Сакс Р. С. Собственные функции операторов ротора, градиента дивергенции и Стокса. Приложения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 2(31). С. 131–146. doi: [10.14498/vsgtu1166](#).

24. McDonald K. T. *Force-Free Magnetic Fields aka Eigenfunctions of the Curl Operator*, 2011. 11 pp., <http://www.hep.princeton.edu/~mcdonald/examples/forcefree.pdf>
25. Chubykalo A. E. Espinoza A. Unusual formations of the free electromagnetic field in vacuum // *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2002. vol.35, no.38. pp. 8043–8053, arXiv: [physics/0503193](https://arxiv.org/abs/physics/0503193) [physics.gen-ph]. doi: [10.1088/0305-4470/35/38/307](https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/38/307).
26. Arrayás M., Trueba J. L. A class of non-null toroidal electromagnetic fields and its relation to the model of electromagnetic knots // *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2015. vol.48, no.2, 025203, arXiv: [1106.1122](https://arxiv.org/abs/1106.1122) [hep-th]. doi: [10.1088/1751-8113/48/2/025203](https://doi.org/10.1088/1751-8113/48/2/025203).

Поступила в редакцию 19/ХІІ/2014;
в окончательном варианте — 19/ІІ/2015;
принята в печать — 08/ІV/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 680–696

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1382>

MSC: 78A25, 83C50

ON A CLASS OF VECTOR FIELDS*

G. G. Islamov

Udmurt State University,
1, Universitetskaya str., Izhevsk, 426034, Russian Federation.

Abstract

It is shown that a simple postulate “The displacement field of the vacuum is a normalized electric field”, is equivalent to three parametric representation of the displacement field of the vacuum:

$$u(x; t) = P(x) \cos k(x)t + Q(x) \sin k(x)t.$$

Here t — time; $k(x)$ — frequency vibrations at the point of three-dimensional Euclidean space; $P(x), Q(x)$ — a pair of stationary orthonormal vector fields; (k, P, Q) — parameter list of the displacement field. In this case, the normalization factor has dimension T^{-2} . The speed of the displacement field

$$v(x; t) = \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} = k(x)(Q(x) \cos k(x)t - P(x) \sin k(x)t).$$

The electric field corresponding to this distribution of the displacement field of vacuum, is given by the formula

$$E(x; t) = -\frac{\partial v(x; t)}{\partial t} = k^2(x)u(x; t).$$

© 2015 Samara State Technical University.

Please cite this article in press as:

Islamov G. G. On a class of vector fields, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 680–696. doi: [10.14498/vsgtu1382](https://doi.org/10.14498/vsgtu1382). (In Russian)

Author Details:

Galimzian G. Islamov (Dr. Phis. & Math. Sci.; ggislamov@gmail.com), Head of Department, Dept. of HPC & Parallel programming.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

Moreover, the magnetic induction

$$B(x; t) = \operatorname{rot} v(x; t).$$

These constructions are used in the determination of local and global solutions of Maxwell's equations describing the dynamics of electromagnetic fields.

Keywords: local and global solutions of Maxwell's equations, spectral problem for rotor operator, the small flow of the displacement field.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1382>

ORCID

Galimzian G. Islamov: <http://orcid.org/0000-0002-7004-0177>

REFERENCES

- Islamov G. G. On a class of vector fields, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 187 (In Russian).
- Poincaré H. *Théorie des tourbillons. Leçons professées pendant le 2^e semestre 1891–92, rédigés par Lamotte*, [Reproduction en fac-similé, 1893]. Sceaux, J. Gabay, 1990, 221 pp. (In French), [NUMM-29068](#).
- Zhilin P. A. Reality and Mechanics, *Analysis and Synthesis of Nonlinear Mechanical Systems*, Proc. of XXIII school–seminar. St. Petersburg, 1996, pp. 6–49 (In Russian).
- Kozlov V. V. *Dynamical Systems X. General Theory of Vortices*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 67. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2003, viii+184 pp. doi: [10.1007/978-3-662-06800-7](#).
- Brown G. B. A new treatment of the theory of dimensions, *Proc. Phys. Soc.*, 1941, vol. 53, no. 4, pp. 418–432. doi: [10.1088/0959-5309/53/4/307](#).
- di Bartini R. O. Some relations between physical constants, *Doklady Acad. Nauk USSR*, 1965, vol. 163, no. 4, pp. 861–864 (In Russian).
- Kirsch A., Hettlich F. *The Mathematical Theory of Time-Harmonic Maxwell's Equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 190. New York, Springer, 2015, xiii+337 pp. doi: [10.1007/978-3-319-11086-8](#).
- Shapiro I. S. On the history of the discovery of the Maxwell equations, *Sov. Phys. Usp.*, 1973, vol. 15, no. 5, pp. 651–659. doi: [10.1070/PU1973v015n05ABEH005038](#).
- Levin M. L., Miller M. A. Maxwell's 'Treatise on Electricity and Magnetism', *Sov. Phys. Usp.*, 1981, vol. 24, no. 12, pp. 904–913. doi: [10.1070/PU1981v024n11ABEH004793](#).
- Capria M. M., Manini M.-G. *On the relativistic unification of electricity and magnetism*, 2011, 47 pp., arXiv: [1111.7126](#) [physics.hist-ph]
- Fushchich V. I., Nikitin A. G. On new and old symmetries of the Maxwell and Dirac equations, *Phys. Part. Nuclei*, 1983, vol. 14, no. 1, pp. 1–22.
- Zhou X. L. On independence, completeness of Maxwell's equations and uniqueness theorems in electromagnetics, *PIER*, 2006, vol. 64, pp. 117–134. doi: [10.2528/pier06061302](#).
- Lapteva G. F. *Elementy vektornogo ischisleniia* [Elements of vector calculus]. Moscow, Nauka, 1975, 336 pp. (In Russian)
- Chorin A. J., Marsden J. E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Universitext. New York, Springer-Verlag, 1979, vii+205 pp.. doi: [10.1007/978-1-4684-0082-3](#).
- Bogolyubov A. N., Levashova N. T., Mogilevskiy I. E., Mukhartova Iu. V., Shapkina N. E. *Funktsiia Grina operatora Laplasya* [The Green function of the Laplace operator]. Moscow, Moscow State Univ., Phys. Faculty, 2012, 130 http://math.phys.msu.ru/data/51/10_Func_Grina_WEB.pdf pp. (In Russian)

16. Meshkov I. N., Chirikov B. V. *Elektromagnitnoe pole. Ch. 1. Elektrichestvo i magnetizm* [Electromagnetic field. Part 1. Electricity and Magnetism]. Moscow, Izhevsk, Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika, 2013, 544 pp. (In Russian)
17. Tomilin A. K. The potential-vortex theory of electromagnetic waves, *JEMAA*, 2013, vol. 5, no. 9, pp. 347–353. doi: [10.4236/jemaa.2013.59055](https://doi.org/10.4236/jemaa.2013.59055).
18. Matute E. A. On the vector solutions of Maxwell equations in spherical coordinate systems, *Rev. Mex. Fis. E*, 2005, vol. 51, no. 1, pp. 31–36, arXiv: [physics/0512261](https://arxiv.org/abs/physics/0512261) [physics.class-ph].
19. Filonov N. Spectral analysis of the selfadjoint operator rot in a domain of finite measure, *St. Petersburg Math. J.*, 2000, vol. 11, no. 6, pp. 1085–1095.
20. Saks R. S. Solution of the spectral problem for the curl and Stokes operators with periodic boundary conditions, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2006, vol. 136, no. 2, pp. 3794–3811. doi: [10.1007/s10958-006-0201-z](https://doi.org/10.1007/s10958-006-0201-z).
21. Cantarella J., DeTurck D., Gluck H., Teytel M. The spectrum of the curl operator on spherically symmetric domains, *Phys. plasmas*, 2000, vol. 7, no. 7, pp. 2766–2775. doi: [10.1063/1.874127](https://doi.org/10.1063/1.874127).
22. Ghrist R., Komendarczyk R. Overtwisted energy-minimizing curl eigenfields, *Nonlinearity*, 2006, vol. 19, no. 1, pp. 41–51, arXiv: [math/0411319](https://arxiv.org/abs/math/0411319) [math.SG]. doi: [10.1088/0951-7715/19/1/003](https://doi.org/10.1088/0951-7715/19/1/003).
23. Saks R. S. The eigenfunctions of curl, gradient of divergence and Stokes operators. Applications, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2013, vol. 2(31), pp. 131–146 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1166](https://doi.org/10.14498/vsgtu1166).
24. McDonald K. T. *Force-Free Magnetic Fields aka Eigenfunctions of the Curl Operator*, 2011, 11 pp., <http://www.hep.princeton.edu/~mcdonald/examples/forcefree.pdf>
25. Chubykalo A. E. Espinoza A. Unusual formations of the free electromagnetic field in vacuum, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2002, vol. 35, no. 38, pp. 8043–8053, arXiv: [physics/0503193](https://arxiv.org/abs/physics/0503193) [physics.gen-ph]. doi: [10.1088/0305-4470/35/38/307](https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/38/307).
26. Arrayás M., Trueba J. L. A class of non-null toroidal electromagnetic fields and its relation to the model of electromagnetic knots, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2015, vol. 48, no. 2, 025203, arXiv: [1106.1122](https://arxiv.org/abs/1106.1122) [hep-th]. doi: [10.1088/1751-8113/48/2/025203](https://doi.org/10.1088/1751-8113/48/2/025203).

Received 19/XII/2014;
received in revised form 19/II/2015;
accepted 08/IV/2015.