



# Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК 517.958:536.24

## РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОМОЩЬЮ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

*Р. В. Жалнин*<sup>1</sup>, *М. Е. Ладонкина*<sup>2</sup>,  
*В. Ф. Масыгин*<sup>1</sup>, *В. Ф. Тишкин*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский

Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва,  
Россия, 430005, Саранск, ул. Большевистская, 68.

<sup>2</sup> Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,  
Россия, 125047, Москва, Миусская пл., 4.

### Аннотация

Для решения уравнений диффузионного типа в настоящее время широко применяется конечно-элементный метод Галёркина с разрывными базисными функциями (РМГ), который характеризуется высоким порядком точности получаемого решения. Для применения РМГ исходное уравнение второго порядка преобразуется к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Для этого вводятся вспомогательные потоковые переменные. В соответствии с традиционным подходом в РМГ решение в каждой ячейке основной сетки представляется в виде линейной комбинации базисных функций. Тепловой поток ищется в виде линейной комбинации базисных функций на ячейках двойственной сетки. Двойственная сетка состоит из медианных контрольных объемов, построенных относительно вершин основной сетки. Интегрирование по объемам и граням ячеек базируется на

© 2015 Самарский государственный технический университет.

### Образец для цитирования

Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масыгин В. Ф., Тишкин В. Ф. Решение трехмерных уравнений теплопроводности с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 3. С. 523–533. doi: [10.14498/vsgtu1351](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1351).

### Сведения об авторах

*Руслан Викторович Жалнин* (к.ф.-м.н.; [zhalnin@gmail.com](mailto:zhalnin@gmail.com); автор, ведущий переписку), заведующий кафедрой, каф. прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики.

*Марина Евгеньевна Ладонкина* (к.ф.-м.н.; [ladonkina@imamod.ru](mailto:ladonkina@imamod.ru)), старший научный сотрудник.

*Виктор Федорович Масыгин*, ассистент; [vmasyagin@gmail.com](mailto:vmasyagin@gmail.com), каф. прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики.

*Владимир Федорович Тишкин* (д.ф.-м.н., проф.; [v.f.tishkin@mail.ru](mailto:v.f.tishkin@mail.ru)), зам. директора по научной работе.

использовании квадратурных формул Гаусса. Численный алгоритм рассматривается на примере решения начально-краевой задачи для трехмерного уравнения теплопроводности. Численная методика реализована в виде программного продукта и ориентирована на решение трехмерных задач теплопроводности на неструктурированных тетраэдральных сетках. В работе представлены результаты расчетов ряда тестовых задач, демонстрирующие возможности и точность методики.

**Ключевые слова:** уравнения параболического типа, разнесенные сетки, разрывный метод Галёркина.

**doi:** <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1351>

Несмотря на значительные успехи, которые получены в области разработки численных методов решения трехмерных уравнений теплопроводности, по-прежнему актуальной задачей является разработка численных алгоритмов высокого порядка точности с компактным шаблоном, которые были бы удобны для применения при параллельном программировании.

Самым распространенным методом решения уравнений теплопроводности является метод конечного объема, или FVM (Finite Volume Method), который часто применяется в специализированных программах. При этом ищутся средние значения неизвестных параметров в контрольных объемах, а для нахождения значения параметра в конкретной точке контрольного объема применяется полиномиальная аппроксимация с использованием некоторого набора соседних ячеек. Для обеспечения пространственной аппроксимации на границе между элементами необходимо вычислять поток. Метод конечного объема в этом случае показывает хорошую сходимость и требует небольших затрат дополнительной памяти при использовании сеток, близких к равномерным. Однако при решении практических задач часто приходится сталкиваться с сетками, в которых присутствуют сильно вытянутые ячейки. На таких сетках могут возникнуть проблемы с вычислением потоковых переменных, что в итоге может привести к отсутствию сходимости алгоритма при использовании как явной, так и неявной дискретизации по времени. При этом повышение порядка точности метода конечного объема неизменно связано с расширением шаблона аппроксимации.

Другим подходом к решению уравнений теплопроводности является использование методов конечного элемента. К достоинствам данных методов стоит отнести тот факт, что высокий порядок аппроксимации достигается за счет использования ограниченного шаблона, к тому же снижаются требования к равномерности сетки. На каждом элементе решение ищется в виде проекции на пространство непрерывных базисных функций. Неизвестные коэффициенты разложения определяются из решения системы дискретных уравнений, которая получается при умножении дифференциальных уравнений на пробные функции.

В настоящее время популярным методом является метод Галёркина с разрывными базисными функциями, или DGM (Discontinuous Galerkin Method), который хорошо себя зарекомендовал для решения уравнений Навье—Стокса [1–3]. В разрывном методе Галёркина пространства базисных и пробных функций совпадают. С целью обеспечения устойчивости метода потоки на границах элементов приближенно определяются с использованием стабилизирующих добавок [4].

Как правило, в качестве пробных (базисных) функций выбирают полиномы. Порядок точности получаемого решения находится в прямой зависимости от порядка используемых базисных полиномов. В отличие от метода конечного объема, повышение порядка точности не требует расширения шаблона.

В данной работе разрывный метод Галёркина применяется для решения трехмерных уравнений теплопроводности на неструктурированных разнесенных сетках. Подобно тому, как это сделано в работах [5, 6] для термодинамических переменных и компонент вектора скорости, в данной работе температура и компоненты теплового потока рассматриваются на двойственных сетках. В отличие от традиционного DGM-подхода [7–9], где решение и потоковые переменные рассматриваются на одной сетке, в настоящей работе температура рассматривается на ячейках основной сетки, а потоковые переменные рассматриваются на ячейках двойственной сетки. Такой подход позволяет избежать проблем с выбором потоковой функции на границе элемента и обеспечивает работоспособность метода на сетках с сильно вытянутыми ячейками [10]. Данная статья является продолжением работ [10, 11] и является их обобщением на трехмерный случай.

**1. Реализация метода Галёркина с разрывными базисными функциями при решении трехмерных уравнений теплопроводности.** Рассмотрим трехмерное уравнение теплопроводности

$$\rho C_\nu \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \cdot \nabla u) + f, \quad (x, y, z) \in G, \quad 0 < t \leq T \quad (1)$$

с известными начально-краевыми условиями; здесь  $C_\nu$  — коэффициент теплоемкости при постоянном объеме,  $\rho$  — плотность,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $u(x, y, z, t)$  — температура в точке  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$ ,  $f$  — плотность тепловых источников.

Область  $G$  — произвольная односвязная. Для применения метода на основе разрывного метода Галёркина в области зададим множество точек

$$\omega_p = \{P_i = (x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, \dots, N\},$$

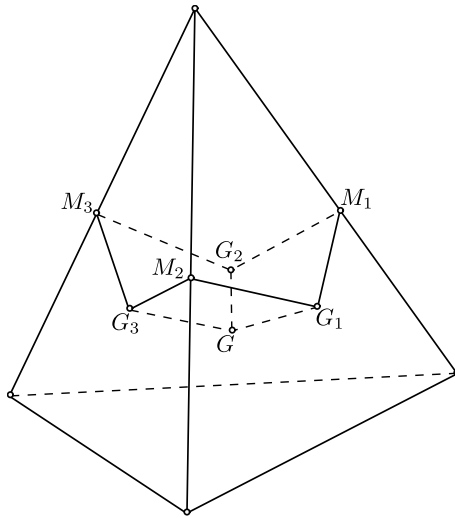
содержащее внутренние и граничные точки области  $G$ . На  $\omega_p$  построим тетраэдральную сетку на основе критерия Делоне:

$$T(\omega_p) = \{T_k = T(T_k^1, T_k^2, T_k^3, T_k^4), \quad T_k^1, T_k^2, T_k^3, T_k^4 \in \omega_p, \quad k = 1, 2, \dots, M\}.$$

Пусть  $T(\omega_p)$  содержит все узлы  $\omega_p$ ; все тетраэдры  $T_k$  имеют ненулевой объем и пересекаются не более чем по образующим их граням, ребрам или вершинам. В тетраэдре  $T_k$  с вершинами в точках  $T_k^1: \{x_1, y_1, z_1\}$ ,  $T_k^2: \{x_2, y_2, z_2\}$ ,  $T_k^3: \{x_3, y_3, z_3\}$ ,  $T_k^4: \{x_4, y_4, z_4\}$  центр  $(x_c, y_c, z_c)$  определим так:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \quad z_c = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}.$$

Также примем в рассмотрение двойственную сетку, составленную из барицентрических объемов вокруг каждой из точек  $\omega_p$ , ограниченных плоскостями, проходящими через центр тетраэдра, центры граней и середину ребра (см. рисунок). Точка из  $\omega_p$  будет являться центром соответствующей ей ячейки двойственной сетки.



«Медианный» контрольный объем [“Median” control volume]

Для аппроксимации уравнения (1) с помощью разрывного метода Галёркина преобразуем его к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Для этого введем дополнительные переменные [1, 2]:

$$w_x = \kappa \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w_y = \kappa \frac{\partial u}{\partial y}, \quad w_z = \kappa \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$\rho C_\nu \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} w_x + \frac{\partial}{\partial y} w_y + \frac{\partial}{\partial z} w_z + f, \quad (x, y, z) \in G, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$w_x = \kappa \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x, y, z) \in G, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

$$w_y = \kappa \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (x, y, z) \in G, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

$$w_z = \kappa \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (x, y, z) \in G, \quad 0 < t \leq T. \quad (5)$$

В каждом тетраэдре  $T_k \in T(\omega_p)$  приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде проекции  $u$  на пространство полиномов  $P^1(x, y, z)$  первой степени в базисе  $\{\phi_i\} \in P^1, i = \overline{0, 3}$ :

$$\phi_0 = 1, \quad \phi_1 = \frac{x - x_c}{\Delta x}, \quad \phi_2 = \frac{y - y_c}{\Delta y}, \quad \phi_3 = \frac{z - z_c}{\Delta z},$$

где  $(x_c, y_c, z_c)$  — центр тетраэдра  $T_k$ ;  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  — проекции тетраэдра на соответствующие оси координат.

На каждой ячейке двойственной сетки  $D_k$  приближенное решение уравнений (3)–(5) будем искать в виде проекции  $w_x, w_y, w_z$  на пространство полиномов  $P^1(x, y, z)$  первой степени в базисе  $\{\psi_i\} \in P^1, i = \overline{0, 3}$ :

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_1 = \frac{x - x_c^d}{\Delta x_d}, \quad \psi_2 = \frac{y - y_c^d}{\Delta y_d}, \quad \psi_3 = \frac{z - z_c^d}{\Delta z_d},$$

где  $(x_c^d, y_c^d, z_c^d)$  — центр ячейки  $D_k$ ;  $\Delta x_d, \Delta y_d, \Delta z_d$  — проекции ячейки двойственной сетки на соответствующие оси координат.

В каждой ячейке основной и двойственной сетки линейная комбинация соответствующих базисных функций будет определять решение:

$$\begin{aligned} u_k &= u_{0k} + u_{1k} \frac{x - x_c}{\Delta x} + u_{2k} \frac{y - y_c}{\Delta y} + u_{3k} \frac{z - z_c}{\Delta z}, \\ u_{ik} &= u_{ik}(t), \quad (x, y, z) \in T_k, \quad i = \overline{0, 3}; \\ w_{xk} &= w_{x0k} + w_{x1k} \frac{x - x_c^d}{\Delta x_d} + w_{x2k} \frac{y - y_c^d}{\Delta y_d} + w_{x3k} \frac{z - z_c^d}{\Delta z_d}, \\ w_{xik} &= w_{xik}(t), \quad (x, y, z) \in D_k, \quad i = \overline{0, 3}; \\ w_{yk} &= w_{y0k} + w_{y1k} \frac{x - x_c^d}{\Delta x_d} + w_{y2k} \frac{y - y_c^d}{\Delta y_d} + w_{y3k} \frac{z - z_c^d}{\Delta z_d}, \\ w_{yik} &= w_{yik}(t), \quad (x, y, z) \in D_k, \quad i = \overline{0, 3}; \\ w_{zk} &= w_{z0k} + w_{z1k} \frac{x - x_c^d}{\Delta x_d} + w_{z2k} \frac{y - y_c^d}{\Delta y_d} + w_{z3k} \frac{z - z_c^d}{\Delta z_d}, \\ w_{zik} &= w_{zik}(t), \quad (x, y, z) \in D_k, \quad i = \overline{0, 3}. \end{aligned}$$

Определим коэффициенты разложения  $u_k$  из условия ортогональности невязки всем пробным функциям  $\phi_i$  на каждом тетраэдре  $T_k$  [2]:

$$\begin{aligned} (\rho C_\nu)_k \sum_{i=0}^3 \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} \int_{T_k} \phi_i \phi_m dV &= \\ &= \oint_{\partial T_k} n_x w_x \phi_m dS + \oint_{\partial T_k} n_y w_y \phi_m dS + \oint_{\partial T_k} n_z w_z \phi_m dS - \\ &- \int_{T_k} w_x \frac{\partial \phi_m}{\partial x} dV - \int_{T_k} w_y \frac{\partial \phi_m}{\partial y} dV - \int_{T_k} w_z \frac{\partial \phi_m}{\partial z} dV + \int_{T_k} \Phi_k \phi_m dV, \quad m = \overline{0, 3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда получаем систему для определения  $u_{ik}(t)$ . В вычислениях использовалась явная схема Эйлера для дискретизации по времени выражения (6).

Определим коэффициенты разложения  $w_{xk}, w_{yk}, w_{zk}$  из условия ортогональности невязки всем пробным функциям  $\psi_i$  на каждой ячейке двойственной сетки  $D_k$ :

$$\sum_{i=0}^3 w_{xik} \int_{T_k} \phi_i \phi_m dV = \oint_{\partial D_k} n_x \kappa u_k \psi_m dS - \int_{D_k} u_k \frac{\partial (\kappa \psi_m)}{\partial x} dV, \quad m = \overline{0, 3}, \quad (7)$$

$$\sum_{i=0}^3 w_{yik} \int_{T_k} \phi_i \phi_m dV = \oint_{\partial D_k} n_y \kappa u_k \psi_m dS - \int_{D_k} u_k \frac{\partial (\kappa \psi_m)}{\partial y} dV, \quad m = \overline{0, 3}, \quad (8)$$

$$\sum_{i=0}^3 w_{zik} \int_{T_k} \phi_i \phi_m dV = \oint_{\partial D_k} n_z \kappa u_k \psi_m dS - \int_{D_k} u_k \frac{\partial (\kappa \psi_m)}{\partial z} dV, \quad m = \overline{0, 3}. \quad (9)$$

Отсюда получаем систему для определения  $w_{xik}(t)$ ,  $w_{yik}(t)$ ,  $w_{zik}(t)$ .

Сначала вычисляются коэффициенты  $w_{xik}(t)$ ,  $w_{yik}(t)$ ,  $w_{zik}(t)$  в системах (7)–(9) с использованием значений  $u_{ik}(t)$  с предыдущего временного слоя, после чего решается система (6) для нахождения  $u_{ik}(t)$  на текущем временном слое.

**2. Вычисление поверхностного интеграла по треугольнику  $T_k$  и ячейке двойственной сетки  $D_k$ .** Рассмотрим грань  $T_k^1 T_k^2 T_k^3$  тетраэдра  $T_k^1 T_k^2 T_k^3 T_k^4$ . Произведём замену переменных так, чтобы треугольник  $\{T_k^1 T_k^2 T_k^3\}$  отображался на канонический треугольник на плоскости  $\{\xi, \eta\}$  с координатами  $T_1(1, 0)$ ,  $T_2(0, 1)$ ,  $T_3(0, 0)$ . Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки  $T_k^1$ ,  $T_k^2$ ,  $T_k^3$ :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Вектор нормали к этой плоскости определяется по формуле  $\bar{n} = (A/l, B/l, C/l)$ , где  $l = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ . После определения вектора нормали необходима проверка ориентации грани тетраэдра. Смешанное произведение векторов  $\bar{t}_1 = (x_1 - x_3, y_1 - y_3, z_1 - z_3)$ ,  $\bar{t}_2 = (x_2 - x_3, y_2 - y_3, z_2 - z_3)$  и вектора нормали  $\bar{n}$  всегда положительно ( $\text{sign}(\bar{t}_1 \cdot (\bar{t}_2 \times \bar{n})) > 0$ ) по построению и всегда образует правую тройку векторов, поэтому необходимо проверить смешанное произведение векторов  $\bar{t}_1$ ,  $\bar{t}_2$  и  $\bar{t}_4 = (x_4 - x_3, y_4 - y_3, z_4 - z_3)$ . Если знак выражения

$$(x_4 - x_3)A + (y_4 - y_3)B + (z_4 - z_3)C$$

положителен, то  $\text{sign}(\bar{t}_1 \cdot (\bar{t}_2 \times \bar{n})) = \text{sign}(\bar{t}_1 \cdot (\bar{t}_2 \times \bar{t}_4))$ ; т.е. данная тройка векторов тоже правая и вектор нормали направлен внутрь тетраэдра. Поэтому необходимо переориентировать грань, например  $T_k^1 T_k^3 T_k^2$ , и вектор внешней нормали будет определяться по формуле  $\bar{n} = (-A/l, -B/l, -C/l)$ .

Следуя работе [13], возьмем три точки на каноническом треугольнике:

$$\tilde{t}_1 : (\xi_1 = 2/3, \eta_1 = 1/6), \quad p\omega_1 = 1/3,$$

$$\tilde{t}_2 : (\xi_2 = 1/6, \eta_2 = 2/3), \quad p\omega_2 = 1/3,$$

$$\tilde{t}_3 : (\xi_3 = 1/6, \eta_3 = 1/6), \quad p\omega_3 = 1/3.$$

Вычислим интеграл по поверхности  $\{T_k^1 T_k^2 T_k^3\}$ :

$$\begin{aligned} \oint_{\{T_k^1 T_k^2 T_k^3\}} f(x, y, z) dS &= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sum_{i=1}^3 \tilde{f}(\xi_i, \eta_i) p\omega_i, \end{aligned}$$

где  $\tilde{f}$  — значение подынтегральной функции в образах квадратурных точек в исходном треугольнике.

**3. Вычисление объемного интеграла по тетраэдру  $T_k$  и ячейке  $D_k$ .** Рассмотрим тетраэдр  $T_k$  с вершинами в точках  $T_k^1, T_k^2, T_k^3, T_k^4$ . Произведём замену переменных так, чтобы тетраэдр  $T_k$  отображался на канонический тетраэдр на плоскости  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  с координатами:  $T_1(1, 0, 0)$ ,  $T_2(0, 1, 0)$ ,  $T_3(0, 0, 1)$ ,

$T_4(0, 0, 0)$ . В случае квадратичного приближения необходимо взять 4 точки в каноническом тетраэдре с координатами с соответствующими весами [13]:

$$\begin{aligned}\tilde{t}_1 &: (\xi_1 = \alpha, \eta_1 = \beta, \zeta_1 = \beta), & p\omega_1 &= 0.25, \\ \tilde{t}_2 &: (\xi_2 = \beta, \eta_2 = \alpha, \zeta_2 = \beta), & p\omega_2 &= 0.25, \\ \tilde{t}_3 &: (\xi_3 = \beta, \eta_3 = \beta, \zeta_3 = \alpha), & p\omega_3 &= 0.25, \\ \tilde{t}_4 &: (\xi_4 = \beta, \eta_4 = \beta, \zeta_4 = \beta), & p\omega_4 &= 0.25,\end{aligned}$$

где  $\alpha = 0.58541020, \beta = 0.13819660$ . Вычислим объемный интеграл по тетраэдру  $T_k$ :

$$\begin{aligned}\iiint_{T_k} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= |J| \iiint_T \tilde{f}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \frac{1}{6} |J| \sum_{i=1}^4 \tilde{f}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) p\omega_i,\end{aligned}$$

где  $J$  — якобиан перехода на канонический тетраэдр,  $\tilde{f}$  — значение подынтегральной функции в образах квадратурных точек в исходном тетраэдре.

**4. Примеры расчетов.** В качестве первого примера рассматривалась следующая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z < 1, \quad 0 < t \leq 0.02,$$

$$u(x, y, z, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

$$u(0, y, z, t) = 0, \quad u(1, y, z, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0, z, t) = 0, \quad u(x, 1, z, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, y, 0, t) = 0, \quad u(x, y, 1, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

которая имеет точное решение

$$u_T = e^{-3\pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z).$$

Порядки точности определены в норме  $L_2$ :

$$\|u_h - u_T\|_{L_2} = \left( \sum_{k=1}^N \int_{T_k} (u_h - u_T)^2 dV \right)^{1/2},$$

где  $u_h$  — численное решение задачи на сетке с характеристическим размером ячейки  $h$ ,  $N$  — число ячеек в расчетной области.

В табл. 1 приведены порядки точности исследуемого метода (DGM) и метода конечных объемов (FVM) для первой задачи на момент времени  $T = 0.02$  с числом Куранта для тепла, равным  $2.5 \cdot 10^{-5}$ .

В следующих задачах порядки точности исследуемого метода  $r$  в норме  $L_2$  определены по формуле [14]

$$r = \log_2 \frac{\|u_h - u_{h/2}\|_{L_2}}{\|u_{h/2} - u_{h/4}\|_{L_2}},$$

Таблица 1

N	h	DGM		FVM	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
48	0.433	$4.212 \cdot 10^{-3}$	—	$5.085 \cdot 10^{-4}$	—
725	0.226	$3.219 \cdot 10^{-4}$	3.717	$3.001 \cdot 10^{-4}$	0.761
3748	0.121	$4.095 \cdot 10^{-5}$	2.974	$7.967 \cdot 10^{-5}$	1.913
25558	0.063	$5.369 \cdot 10^{-6}$	2.936	$2.261 \cdot 10^{-5}$	1.817

где  $u_h, u_{h/2}, u_{h/4}$  — численные решения задачи на сетках с характеристическим размером ячеек  $h, h/2$  и  $h/4$  соответственно.

Во второй задаче был рассмотрен единичный куб  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ , на гранях  $x = 0$  и  $x = 1$  которого задан тепловой поток  $\omega = 1$ . На остальных четырех гранях происходит свободная теплоотдача с коэффициентом 0.5. Начальное условие имеет вид

$$u(x, y, z, 0) = 0.$$

В табл. 2 приведены порядки сходимости исследуемого метода (DGM) и метода конечных объемов (FVM) для второй задачи на момент времени  $T = 0.02$  с числом Куранта для тепла, равным  $2.5 \cdot 10^{-5}$ .

В третьей задаче определялось температурное поле единичного куба с начальным условием

$$u(x, y, z, 0) = 1 + x^2 + y^2 + z^2.$$

На плоскостях  $x = 0, y = 0, z = 0$  были заданы условия теплоизоляции  $\omega = 0$ , а на плоскостях  $x = 1, y = 1, z = 1$  фиксировалась температура начального условия.

В табл. 3 приведены порядки сходимости исследуемого метода (DGM) и метода конечных объемов (FVM) для третьей задачи на момент времени  $T = 0.02$  с числом Куранта для тепла, равным  $2.5 \cdot 10^{-5}$ .

Таблица 2

h	DGM	FVM
0.433	3.518	0.429
0.226	1.619	1.161

Таблица 3

h	DGM	FVM
0.433	1.833	2.458
0.226	1.639	1.772

**Заключение.** Результаты расчетов показывают возможность применения исследуемой методики для решения трехмерных уравнений теплопроводности. Применение описанного метода позволяет получить порядки точности, близкие ко вторым и выше.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-31260-мол-а).

**ORCIDs**

Руслан Викторович Жалнин: <http://orcid.org/0000-0002-1103-3321>

Марина Евгеньевна Ладонкина: <http://orcid.org/0000-0001-7596-1672>

Виктор Федорович Масыгин: <http://orcid.org/0000-0001-6738-8183>

Владимир Федорович Тишкин: <http://orcid.org/0000-0001-7295-7002>



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Bassi F., Rebay S. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations // *J. Comput. Phys.*, 1997. vol. 131, no. 2. pp. 267–279. doi: [10.1006/jcph.1996.5572](https://doi.org/10.1006/jcph.1996.5572).
2. Cockburn B., Shu C.-W. Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems // *J. Sci. Comput.*, 2001. vol. 16, no. 3. pp. 173–261. doi: [10.1023/A:1012873910884](https://doi.org/10.1023/A:1012873910884).
3. Волков А. В., Ляпунов С. В. Применение конечно-элементного метода Галёркина с разрывными базисными функциями к решению уравнений Рейнольдса на неструктурированных адаптивных сетках // *Ученые записки ЦАГИ*, 2007. Т. 38, № 3-4. С. 22–31.
4. Pany A. K., Yadav S. An hp-Local Discontinuous Galerkin method for Parabolic Integro-Differential Equations // *J. Sci. Comput.*, 2010. vol. 46, no. 1. pp. 71–99. doi: [10.1007/s10915-010-9384-z](https://doi.org/10.1007/s10915-010-9384-z).
5. Вабищевич П. Н., Павлов А. Н., Чурбанов А. Г. Численные методы решения нестационарных уравнений Навье–Стокса в естественных переменных на частично разнесенных сетках // *Матем. моделирование*, 1997. Т. 9, № 4. С. 85–114.
6. В. И. Лебедев Разностные аналоги ортогональных разложений, основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1964. Т. 4, № 3. С. 449–465.
7. Ayuso B., Marini L. D. Discontinuous Galerkin Methods for Advection-Diffusion-Reaction Problems // *SIAM J. Numer. Anal.*, 2009. vol. 47, no. 2. pp. 1391–1420. doi: [10.1137/080719583](https://doi.org/10.1137/080719583).
8. Brdar F., Dedner A., Klöforn R. Compact and Stable Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Diffusion Problems // *SIAM J. Sci. Comput.*, 2012. vol. 34, no. 1. pp. A263–A282. doi: [10.1137/100817528](https://doi.org/10.1137/100817528).
9. Токарева С. А. RKDG-метод и его применение для численного решения задач газовой динамики / *Необратимые процессы в природе и технике*: Труды пятой Всероссийской конференции, Ч. 2. Москва, 2009. С. 93–96.
10. Жалнин Р. В., Масыгин В. Ф., Панюшкина Е. Н. О применении разрывного метода Галёркина для численного решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных разнесенных сетках // *Современные проблемы науки и образования*, 2013. № 6, 113-10929, [www.science-education.ru/113-10929](http://www.science-education.ru/113-10929).
11. Масыгин В. Ф., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф. Об одном способе аппроксимации трехмерных уравнений теплопроводности с помощью разрывного метода Галёркина на неструктурированных сетках / *Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем*: сб. ст. IX Междунар. науч.-техн. конф. (Россия, г. Пенза, 28–31 октября 2014 г.); ред. И. В. Бойков. Пенза: ПГУ, 2014. С. 104–107.
12. Cockburn B. Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems / *High-Order Methods for Computational Physics* / Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 9; eds. T. Barth, H. Deconik. Berlin: Springer Verlag, 1999. pp. 69–224. doi: [10.1007/978-3-662-03882-6\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-662-03882-6_2).
13. Li B. Q. *Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer* / Computational Fluid and Solid Mechanics. Berlin: Springer, 2006, xvii+578 pp. doi: [10.1007/1-84628-205-5](https://doi.org/10.1007/1-84628-205-5).
14. Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. О связи разрывного метода Галеркина и методов типа Годунова высокого порядка точности // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2014, 049. 10 с., <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-49>.

Поступила в редакцию 05/XI/2014;  
в окончательном варианте — 23/III/2015;  
принята в печать — 08/VIII/2015.

MSC: 58J35, 65M08

## SOLUTION OF 3D HEAT CONDUCTION EQUATIONS USING THE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD ON UNSTRUCTURED GRIDS

R. V. Zhalnin<sup>1</sup>, M. E. Ladonkina<sup>2</sup>,  
V. F. Masyagin<sup>1</sup>, V. F. Tishkin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ogarev Mordovia State University,  
68, Bol'shevistskaya st., Saransk, 430005, Russian Federation.

<sup>2</sup> Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences,  
4, Miusskaya pl., Moscow, 125047, Russian Federation.

### Abstract

The discontinuous Galerkin method with discontinuous basic functions which is characterized by a high order of accuracy of the obtained solution is now widely used. In this paper a new way of approximation of diffusion terms for discontinuous Galerkin method for solving diffusion-type equations is proposed. The method uses piecewise polynomials that are continuous on a macroelement surrounding the nodes in the unstructured mesh but discontinuous between the macroelements. In the proposed numerical scheme the spaced grid is used. On one grid an approximation of the unknown quantity is considered, on the other is the approximation of additional variables. Additional variables are components of the heat flux. For the numerical experiment the initial-boundary problem for three-dimensional heat conduction equation is chosen. Calculations of three-dimensional modeling problems including explosive factors show a good accuracy of offered method.

**Keywords:** parabolic equations, spaced grids, discontinuous Galerkin method, convergence and accuracy of the method.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1351>

**Acknowledgments.** This work has been supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-01-31260-mol-a).

### ORCIDs

Ruslan V. Zhalnin: <http://orcid.org/0000-0002-1103-3321>

Marina E. Ladonkina: <http://orcid.org/0000-0001-7596-1672>

Victor F. Masyagin: <http://orcid.org/0000-0001-6738-8183>

Vladimir F. Tishkin: <http://orcid.org/0000-0001-7295-7002>

© 2015 Samara State Technical University.

### Please cite this article in press as:

Zhalnin R. V., Ladonkina M. E., Masyagin V. F., Tishkin V. F. Solution of 3D heat conduction equations using the discontinuous Galerkin method on unstructured grids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 3, pp. 523–533. doi: [10.14498/vsgtu1351](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1351). (In Russian)

### Authors Details:

*Ruslan V. Zhalnin* (Cand. Phys. & Math. Sci.; [zhrv@hpc.mrsu.ru](mailto:zhrv@hpc.mrsu.ru); Corresponding Author), Head of Dept., Dept. of Applied Mathematics, Differential Equations & Theoretical Mechanics.

*Marina E. Ladonkina* (Cand. Phys. & Math. Sci.; [ladonkina@imamod.ru](mailto:ladonkina@imamod.ru)), Senior Researcher.

*Victor F. Masyagin*, Assistant Lecturer; [vmasyagin@gmail.com](mailto:vmasyagin@gmail.com), Dept. of Applied Mathematics, Differential Equations & Theoretical Mechanics.

*Vladimir F. Tishkin* (Dr. Phys. & Math. Sci.; [v.f.tishkin@mail.ru](mailto:v.f.tishkin@mail.ru)), Deputy Director.

## REFERENCES

1. Bassi F., Rebay S. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations, *J. Comput. Phys.*, 1997, vol. 131, no. 2, pp. 267–279. doi: [10.1006/jcph.1996.5572](https://doi.org/10.1006/jcph.1996.5572).
2. Cockburn B., Shu C.-W. Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems, *J. Sci. Comput.*, 2001, vol. 16, no. 3, pp. 173–261. doi: [10.1023/A:1012873910884](https://doi.org/10.1023/A:1012873910884).
3. Wolkov A. V., Lyapunov S. V. Application of Galerkin finite element method with discontinuous basis functions to the solution of the Reynolds equations on unstructured adaptive grids, *Uchenye zapiski TsAGI*, 2007, vol. 38, no. 3-4, pp. 22–31 (In Russian).
4. Pany A. K., Yadav S. An hp-Local Discontinuous Galerkin method for Parabolic Integro-Differential Equations, *J. Sci. Comput.*, 2010, vol. 46, no. 1, pp. 71–99. doi: [10.1007/s10915-010-9384-z](https://doi.org/10.1007/s10915-010-9384-z).
5. Vabishchevich P. N., Pavlov A. N., Churbanov A. G. Numerical methods for the unsteady Navier–Stokes equations using primitive variables and partially staggered grids, *Matem. Mod.*, 1997, vol. 9, no. 4, pp. 85–114 (In Russian).
6. Lebedev V. I. Difference analogues of orthogonal decompositions, basic differential operators and some boundary problems of mathematical physics. I, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1964, vol. 4, no. 3, pp. 69–92. doi: [10.1016/0041-5553\(64\)90240-X](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90240-X).
7. Ayuso B., Marini L. D. Discontinuous Galerkin Methods for Advection-Diffusion-Reaction Problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 2009, vol. 47, no. 2, pp. 1391–1420. doi: [10.1137/080719583](https://doi.org/10.1137/080719583).
8. Brdar F., Dedner A., Klöforn R. Compact and Stable Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Diffusion Problems, *SIAM J. Sci. Comput.*, 2012, vol. 34, no. 1, pp. A263–A282. doi: [10.1137/100817528](https://doi.org/10.1137/100817528).
9. Tokareva S. A. RKDG method and its application for the numerical solution of the problems of gas dynamics, *Neobratimye protsessy v prirode i tekhnike* [Irreversible processes in nature and technology], Proc. of the Fifth All-Russian Conference, Part 2. Moscow, 2009, pp. 93–96 (In Russian).
10. Zhalnin R. V., Masyagin V. F., Panyushkina E. N. Discontinuous galerkin method for numerical solution of two-dimensional diffusion problems on unstructural staggered grids, *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniia* [Modern problems of science and education], 2013, no. 6, 113-10929 (In Russian), [www.science-education.ru/113-10929](http://www.science-education.ru/113-10929).
11. Masyagin V. F., Zhalnin R. V., Tishkin V. F. On one method of approximation of the three-dimensional heat conduction equations using discontinuous Galerkin method on unstructured grids, *Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniia estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem* [Analytical and numerical methods for modeling of natural and social problems]; ed. I. V. Boikov. Penza, Penza State Univ., 2014, pp. 104–107 (In Russian).
12. Cockburn B. Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems, *High-Order Methods for Computational Physics*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 9; eds. T. Barth, H. Deconik. Berlin, Springer Verlag, 1999, pp. 69–224. doi: [10.1007/978-3-662-03882-6\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-662-03882-6_2).
13. Li B. Q. *Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer*, Computational Fluid and Solid Mechanics. Berlin, Springer, 2006, xvii+578 pp. doi: [10.1007/1-84628-205-5](https://doi.org/10.1007/1-84628-205-5).
14. Ladonkina M. E., Tishkin V. F. On the connection of discontinuous Galerkin method and Godunov type methods of high order accuracy, *Keldysh Institute preprints*, 2014, 049, 10 pp. (In Russian), <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-49>.

Received 05/XI/2014;  
 received in revised form 23/III/2015;  
 accepted 08/VIII/2015.