Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 4. С. 697–709
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1436

УДК 517.956.3

# АНАЛОГ ЗАДАЧИ $\Delta_1$ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*И. Н. Родионова, В. М. Долгополов*

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет),
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

**Аннотация**

В трехмерном евклидовом пространстве рассматривается уравнение второго порядка гиперболического типа. В бесконечной цилиндрической области, ограниченной характеристическими поверхностями данного уравнения, поставлена краевая задача с данными на смежных характеристических поверхностях уравнения и условиями сопряжения на внутренней нехарактеристической плоскости. На искомое решение налагается также условие обращения его в нуль при $z \to \infty$ вместе с производной по переменной $z$. Методом преобразования Фурье поставленная задача сводится к соответствующей плоской задаче $\Delta_1$ для гиперболического уравнения, которое в характеристических координатах является обобщенным уравнением Эйлера—Дарбу с отрицательным параметром. Авторами получены оценки как самого решения плоской задачи, так и его частных производных до второго порядка включительно. Это, в свою очередь, дало возможность на заданные граничные функции наложить условия, обеспечивающие существование классического решения поставленной задачи в виде преобразования Фурье.

**Ключевые слова:** интегральные уравнения, краевые задачи, уравнения гиперболического типа второго порядка.

**doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1436

**Введение.** В настоящей работе для уравнения гиперболического типа

$$W_{xx} - |y|^m W_{yy} + W_{zz} = 0, \qquad 0 < m < 1, \tag{1}$$

в бесконечной цилиндрической области, ограниченной характеристическими поверхностями уравнения (1), поставлена краевая задача с данными на смежных характеристических поверхностях и условиями сопряжения на нехарактеристической плоскости (задача $\Delta_1 C$). Методом преобразования Фурье поставленная задача сводится к соответствующей плоской задаче $\Delta_1$ для гиперболического уравнения, которое в характеристических координатах является



**Образец для цитирования**
Родионова И. Н., Долгополов В. М. Аналог задачи $\Delta_1$ для гиперболического уравнения второго порядка в трехмерном евклидовом пространстве // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 697–709. doi: 10.14498/vsgtu1436.

**Сведения об авторах**
*Ирина Николаевна Родионова* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. математики и бизнес-информатики.
*Вячеслав Михайлович Долгополов* (к.ф.-м.н., доц.; paskal1940@mail.ru; автор, ведущий переписку), доцент, каф. математики и бизнес-информатики.

обобщением уравнения Эйлера—Дарбу с отрицательным параметром

$$U_{\xi\eta} - \frac{q}{\xi-\eta}(U_\eta - U_\xi) - \frac{\lambda^2 U}{4} = 0, \qquad 0 < q = \frac{m}{2(2-m)} < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Отметим, что первая работа, где для трехмерного уравнения второго порядка в неограниченной цилиндрической области решалась краевая задача методом преобразования Фурье, принадлежит А. В. Бицадзе. Своё развитие метод получил в дальнейших работах А. М. Нахушева, С. П. Пулькина, Г. Д. Каратопраклиева [1–3] и других авторов.

В работе [4] авторами было рассмотрено полученное методом Римана решение задачи Коши для уравнения (2) в случае положительного параметра ($p = -q$), введено специальное интегральное представление одного из данных задачи Коши, вследствие чего формула решения задачи Коши не только значительно упростилась, но и получила распространение на случай отрицательных значений параметра. Этот результат взят за основу решения плоской задачи $\Delta_1$ для уравнения (2), получения оценки как самого решения задачи, так и его частных производных до второго порядка включительно, что позволило на заданные функции наложить условия, обеспечивающие существование решения задачи $\Delta_1 C$ в виде преобразования Фурье.

Полученные результаты являются продолжением исследований, начатых в работе [4] и получивших свое применение в работах [5, 6].

**1. Постановка задачи $\boldsymbol{\Delta_1 C}$ и её решение.** Уравнение (1) рассмотрим в бесконечной цилиндрической области, ограниченной характеристическими поверхностями данного уравнения (см. рис. 1):

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1: \quad x - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad y < 0, \quad -\infty < z < +\infty;\\
&\Sigma_2: \quad x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1, \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \quad y < 0, \quad -\infty < z < +\infty;\\
&\Sigma_3: \quad x + \frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}} = 1, \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \quad y > 0, \quad -\infty < z < +\infty;\\
&\Sigma_4: \quad x - \frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad y > 0, \quad -\infty < z < +\infty.
\end{aligned}$$

Обозначим за $T_1$ область пространства $\mathbb{R}_3$, ограниченную поверхностями $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $y = 0$, за $T_2$ — область, ограниченную поверхностями $\Sigma_3$, $\Sigma_4$, $y = 0$.

Задача $\Delta_1 C$. *На множестве $T = T_1 \cup T_2$ найти решение уравнения (1), непрерывное в $\overline{T}_1$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$W\big|_{\Sigma_1} = \Phi_1(x,z), \qquad W\big|_{\Sigma_4} = \Phi_2(x,z), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad -\infty < z < \infty,$$

*исчезающее на бесконечности вместе со своей производной по $z$*

$$\lim_{z\to\pm\infty} W(x,y,z) = \lim_{z\to\pm\infty} W_z(x,y,z) = 0 \tag{3}$$

*и на плоскости $y = 0$ удовлетворяющее условиям сопряжения*

$$\lim_{y\to 0+0} W(x,y,z) = \lim_{y\to 0-0} W(x,y,z), \quad \lim_{y\to 0+0} \frac{\partial W}{\partial y} = \lim_{y\to 0-0} \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Представляя решение задачи в форме преобразования Фурье

$$W(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x,y,\lambda) e^{-i\lambda z} d\lambda, \tag{4}$$

получим для неизвестной функции $U(x,y,\lambda)$ уравнение

$$U_{xx} - |y|^m U_{yy} - \lambda^2 U = 0. \tag{5}$$

Полагая

$$\varphi_k{}^*(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(x,z) e^{-i\lambda z} d\lambda, \quad k = 1, 2,$$

сведем пространственную задачу $\Delta_1 C$ к плоской для уравнения (5) в области, ограниченной кривыми (см. рис. 2):

$$\begin{aligned}
&\gamma_1: \quad x - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad y < 0;\\
&\gamma_2: \quad x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1, \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \quad y < 0;\\
&\gamma_3: \quad x + \frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}} = 1, \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \quad y > 0;\\
&\gamma_4: \quad x - \frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad y > 0,
\end{aligned}$$

являющимися линиями пересечения плоскости $z = 0$ с поверхностями $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, $\Sigma_4$.

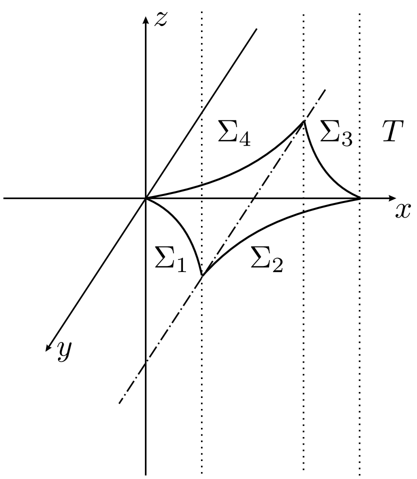


Рис. 1. [Figure 1]

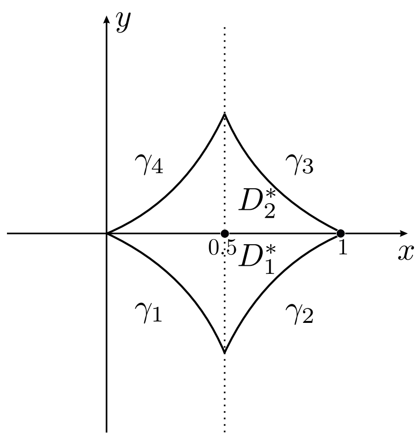


Рис. 2. [Figure 2]

**2. Постановка задачи $\Delta_1$ и её решение.** Пусть $D_1{}^*$ — область, ограниченная характеристическими кривыми $\gamma_1$, $\gamma_2$ уравнения (5) и осью $OX$, $D_2{}^*$ — ограничена линиями $\gamma_3$, $\gamma_4$, $y=0$.

Задача $\Delta_1$. *На множестве $D^* = D_1{}^* \cap D_2{}^*$ найти решения уравнения* (5), *непрерывное в $\overline{D}^*$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$U\Big|_{\gamma_1} = \varphi_1^*(x,\lambda), \qquad U\Big|_{\gamma_4} = \varphi_2^*(x,\lambda), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

*и условиям сопряжения*

$$\lim_{y\to 0-0} U(x,y,\lambda) = \lim_{y\to 0+0} U(x,y,\lambda), \quad \lim_{y\to 0-0} \frac{\partial U}{\partial y} = \lim_{y\to 0+0} \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Условия, налагаемые на заданные функции, определим позже.

В характеристических координатах

$$\xi = x + \frac{2}{2-m}\operatorname{sgn} y|y|^{\frac{2}{2-m}}, \qquad \eta = x - \frac{2}{2-m}\operatorname{sgn} y|y|^{\frac{2}{2-m}}$$

уравнение (5) принимает вид

$$U_{\xi\eta} - \frac{q}{\xi-\eta}(U_\eta - U_\xi) - \frac{\lambda^2 U}{4} = 0, \qquad 0 < q = \frac{m}{2(2-m)} < \frac{1}{2}. \tag{6}$$

На множестве $D = D_1 \cup D_2$, где

$$D_1 = \{(\xi,\eta) \mid 0 < \xi < \eta < 1\}, \quad D_2 = \{(\xi,\eta) \mid 0 < \eta < \xi < 1\},$$

найдем решение уравнения (6), непрерывное в $\overline{D}$, удовлетворяющее условиям сопряжения

$$\nu_1(\xi,\lambda) = \lim_{\eta\to\xi+0} (\eta-\xi)^{-2q}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = \\ = \lim_{\eta\to\xi-0} (\xi-\eta)^{-2q}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = \nu_2(\xi,\lambda) \tag{7}$$

и граничным условиям

$$U(0,\eta,\lambda) = \varphi_1{}^*(\eta/2,\lambda) = \varphi_1(\eta,\lambda), \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad -\infty < \lambda < +\infty; \tag{8}$$

$$U(\xi,0,\lambda) = \varphi_2{}^*(\xi/2,\lambda) = \varphi_2(\xi,\lambda), \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad -\infty < \lambda < +\infty. \tag{9}$$

За основу решения задачи $\Delta_1$ возьмем решение задачи Коши для уравнения (6) в областях $D_1$, $D_2$, соответственно, с данными

$$\lim_{\eta\to\xi\pm 0} U(\xi,\eta) = \tau_i(\xi,\lambda), \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad -\infty < \lambda < +\infty;$$

$$\lim_{\eta\to\xi\pm 0} |\eta-\xi|^{-2q}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = \nu_i(\xi,\lambda), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad -\infty < \lambda < +\infty,$$

которые при интегральном представлении функций

$$\tau_i(\xi,\lambda) = \int_0^\xi T_i(s,\lambda)(s-\xi)^{2q} {}_0F_1\Big(1+q; \frac{\lambda^2}{4}(\xi-s)^2\Big)ds, \quad i=1,2, \tag{10}$$

где

$$
{}_0F_1(\alpha, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\alpha)_n n!}
$$

в области $D_1(\eta > \xi)$ имеет вид [4]

$$
\begin{aligned}
U(\xi,\eta,\lambda) = \int_0^{\xi} T_1(s,\lambda)(\xi-s)^q(\eta-s)^q {}_0F_1\Big(1+q; \frac{\lambda^2}{4}(\xi-s)(\eta-s)\Big)ds + \\
+ \int_{\xi}^{\eta} N_1(s,\lambda)(\eta-s)^q(s-\xi)^q {}_0F_1\Big(1+q; -\frac{\lambda^2}{4}(s-\xi)(\eta-s)\Big)ds, \quad (11)
\end{aligned}
$$

а в области $D_2(\xi > \eta)$ — вид

$$
\begin{aligned}
U(\xi,\eta,\lambda) = \int_0^{\eta} T_2(s,\lambda)(\eta-s)^q(\xi-s)^q {}_0F_1\Big(1+q; \frac{\lambda^2}{4}(\xi-s)(\eta-s)\Big)ds + \\
+ \int_{\eta}^{\xi} N_2(s,\lambda)(s-\eta)^q(\xi-s)^q {}_0F_1\Big(1+q; -\frac{\lambda^2}{4}(s-\eta)(\xi-s)\Big)ds. \quad (12)
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
N_i(s,\lambda) = \frac{1}{2\cos\pi q} T_i(s,\lambda) \mp \frac{\Gamma(1+2q)}{2\Gamma^2(1+q)} \nu_i(s,\lambda), \quad i = 1,\, 2. \quad (13)
$$

Если функции $N_i$, $T_i$ непрерывны по $s$ на сегменте $[0,1]$ при любом $\lambda$, то формулы (11), (12) определяют классическое решение задачи Коши для уравнения (6) соответственно в областях $D_1$, $D_2$.

Исходя из условий задачи $\Delta_1$ найдем функции $N_i$, $T_i$ в формулах (11), (12). Для этого положим в выражении (11) $\xi = 0$, а в выражении (12) $\eta = 0$. С учетом условий (8), (9) и одинакового изменения переменных $\xi$ и $\eta$ получаем совокупность интегральных уравнений относительно $N_i$:

$$
\int_0^{\eta} N_i(s,\lambda) s^q (\eta-s)^q {}_0F_1\Big(1+q; -\frac{\lambda^2}{4} s(\eta-s)\Big)ds = \varphi_i(\eta,\lambda), \quad i = 1,2. \quad (14)
$$

Функции $\varphi_i(\eta,\lambda)$ будем считать дважды непрерывно дифференцируемыми по $\eta$ на сегменте $[0,1]$ и предполагать

$$
\varphi_i(0,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\eta}\varphi_i(0,\lambda) = 0 \quad (15)
$$

при любом $\lambda$.

Тождество (14) продифференцируем по $\eta$, затем применим к обеим частям оператор

$$
\int_0^x \ldots (x-\eta)^{-q} d\eta
$$

и, воспользовавшись методикой, изложенной в работе [4], получим единственное решение уравнений (14):

$$N_i(s,\lambda)=\frac{s^{-q}}{\Gamma(1+q)\Gamma(1-q)}\int_0^s {\varphi_i}''(t,\lambda)(s-t)^{-q}{}_0F_1\Big(1+q;\frac{\lambda^2}{4}s(s-t)\Big)dt-$$
$$-\frac{\lambda^2}{4(1-q)}\int_0^s {\varphi_i}'(t,\lambda)(s-t)^{1-q}{}_0F_1\Big(2-q;\frac{\lambda^2}{4}s(s-t)\Big)dt,\quad i=1,2,\quad (16)$$

непрерывное по $s$ на сегменте $[0,1]$ при выполнении условий (15).

Из непрерывности решения на линии $\eta=\xi$ имеем $\tau_1=\tau_2$, откуда в силу представлений (10) $T_1=T_2=T$. С учетом условия сопряжения (7) и соотношений (13) имеем

$$\cos\pi q\cdot(N_1+N_2)=T,$$

или из формулы (16) получаем

$$T(s,\lambda)=\frac{s^{-q}\cos\pi q}{\Gamma(1+q)\Gamma(1-q)}\int_0^s \big({\varphi_1}'(t)+{\varphi_2}'(t)\big)(s-t)^{-q}{}_0F_1\Big(1-q;\frac{\lambda^2}{4}s(s-t)\Big)dt-$$
$$-\frac{\lambda^2}{4(1-q)}\int_0^s \big({\varphi_1}'(t,\lambda)+{\varphi_2}'(t,\lambda)\big)(s-t)^{1-q}{}_0F_1\Big(2-q;\frac{\lambda^2}{4}s(s-t)\Big)dt.\quad (17)$$

**3. Условия, налагаемые на решение задачи $\boldsymbol{\Delta_1}$.** Отметим, что решение задачи $\Delta_1$, определяемое формулами (11), (12), (16), (17), является классическим для уравнения (6) при выполнении условий (15). Однако этих условий может быть недостаточно для того, чтобы указанное решение было классическим для уравнения (5). Выясним условия, при которых полученное решение задачи $\Delta_1$ на множестве $D^*$ будет иметь непрерывные частные производные $U_{xx}$ и $U_{yy}$, определяемые формулами

$$\begin{aligned}&U_{xx}=U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta},\\&U_{yy}=-\frac{m}{2}|y|^{-\frac{m}{2}-1}(U_\eta-U_\xi)+|y|^{-m}(U_{\xi\xi}-2U_{\eta\xi}+U_{\eta\eta}).\end{aligned}\quad (18)$$

Кроме этого произведем оценки решения задачи $\Delta_1$ и его производных (18), позволяющие на заданные функции $\Phi_k(x,z)$ наложить условия, обеспечивающие существование решения задачи $\Delta_1C$ в виде интеграла (4).

Из выражений (17), (16) получим оценки для $T$ и $N_i$. Обозначим слагаемые в формуле (17) $J_1$ и $J_2$ соответственно. Для $J_1$ имеем оценку

$$|J_1|\leqslant\max_{[0,1]}\ \big|{\varphi_1}''+{\varphi_2}''\big|\,\frac{s^{-q}}{\Gamma(1+q)\Gamma(1-q)}\int_0^s(s-t)^{-q}\,{}_0F_1\Big(1-q;\frac{\lambda^2}{4}s(s-t)\Big)dt.$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$|J_1|\leqslant\max_{[0,1]}\ \big|{\varphi_1}''+{\varphi_2}''\big|\,\frac{s^{1-q}}{\Gamma(1+q)\Gamma(2-q)}\,{}_0F_1\Big(2-q;\frac{\lambda^2s^2}{4}\Big).\quad (19)$$

Чтобы при оценке убрать $\lambda^2$ перед интегралом в слагаемом $J_2$, проинтегрируем интеграл по частям, взяв за $u = {\varphi_1}' + {\varphi_2}'$, тогда

$$J_2 = -\frac{\lambda^2}{4(1-q)} \int_0^s ({\varphi_1}'' + {\varphi_2}'') \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\lambda^2}{4}\Big)^n \frac{s^n (s-t)^{n+2-q}}{(2-q)_{n+1} n!} dt.$$

После замены порядка суммирования и интегрирования получаем оценку

$$|J_2| \leqslant \frac{s^{1-q}}{1-q} \max_{[0,1]} \big|{\varphi_1}'' + {\varphi_2}''\big| \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\lambda^2}{4}\Big)^{n+1} \frac{s^{2(n+1)}}{(2-q)_{n+1} n! (n+3-q)} <$$

$$< \max_{[0,1]} \big|{\varphi_1}'' + {\varphi_2}''\big| \frac{s^{1-q}}{1-q} \, {}_0F_1\Big(2-q; \frac{\lambda^2 s^2}{4}\Big). \tag{20}$$

Из формул (19), (20) получаем оценку

$$|T(s,\lambda)| \leqslant 4 \max_{[0,1]} \big|{\varphi_1}'' + {\varphi_2}''\big| \, {}_0F_1\Big(2-q; \frac{\lambda^2}{4}\Big). \tag{21}$$

Числовой коэффициент получился из оценок множителей, содержащих в знаменателе $\Gamma(1+q)\Gamma(2-q)$, с учетом наименьшего значения ($\approx 0.8$), которое принимает $\Gamma$-функция при значении аргумента $\approx 1.4$, а также с учетом пределов изменения $0 < p < 1/2$ и $0 \leqslant s \leqslant 1$. Аналогичные оценки получаем для $N_i$:

$$|N_i(s,\lambda)| \leqslant 4 \max_{[0,1]} |{\varphi_i}''| \, {}_0F_1\Big(2-q; \frac{\lambda^2}{4}\Big). \tag{22}$$

На основании оценок (21), (22) легко получить оценку решения задачи $\Delta_1$, определяемого формулами (11), (12) при $T_1 = T_2 = T$.

$$|U(x,y,\lambda)| \leqslant 8[\max|\varphi_1^{*\prime\prime}| + \max|\varphi_2^{*\prime\prime}|] \, {}_0F_1^2\Big(1+q; \frac{\lambda^2}{4}\Big). \tag{23}$$

Непосредственным дифференцированием по $\xi$ и по $\eta$ выражений (11), (12) получаем, что частные производные первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial y} = |y|^{-\frac{m}{2}} \Big(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\Big) \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}$$

непрерывны в $D^*$,

$$\lim_{y \to 0+0} U_x = \lim_{y \to 0-0} U_x, \quad \lim_{y \to 0+0} U_y = \lim_{y \to 0-0} U_y$$

и имеют такие же оценки, что и само решение

$$\Big|\frac{\partial U}{\partial y}\Big| \leqslant 8\big[\max|\varphi_1^{*\prime\prime}| + \max|{\varphi_2}''|\big] \, {}_0F_1^2\Big(1+q; \frac{\lambda^2}{4}\Big), \tag{24}$$

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| \leqslant 8\big[\max|\varphi_1^{*}{}''| + \max|\varphi_2^{*}{}''|\big]\,{}_0F_1\Big(1+q;\frac{\lambda^2}{4}\Big). \tag{25}$$

При вычислении производных второго порядка, определяемых формулами (18), после ряда преобразований при $\eta > \xi$ получаем

$$\begin{gathered} U_{xx} = q\int_0^{\xi} \frac{\partial}{\partial s}T(s,\lambda)(\eta-s)^q(\xi-s)^{q-1}\,{}_0F_1\Big(q,\frac{\lambda^2}{4}(\eta-s)(\xi-s)\Big)ds+ \\ + q\int_0^{\xi} \frac{\partial}{\partial s}T(s,\lambda)(\eta-s)^{q-1}(\xi-s)^q\,{}_0F_1\Big(q,\frac{\lambda^2}{4}(\eta-s)(\xi-s)\Big)ds- \\ - q\int_{\xi}^{\eta} \frac{\partial}{\partial s}N_1(s,\lambda)(\eta-s)^q(s-\xi)^{q-1}\,{}_0F_1\Big(q,-\frac{\lambda^2}{4}(\eta-s)(s-\xi)\Big)ds+ \\ + q\int_{\xi}^{\eta} \frac{\partial}{\partial s}N_1(s,\lambda)(\eta-s)^{q-1}(s-\xi)^q\,{}_0F_1\Big(q,-\frac{\lambda^2}{4}(\eta-s)(s-\xi)\Big)ds, \end{gathered} \tag{26}$$

$$U_{yy} = y^{-m}(U_{xx} - \lambda^2 U). \tag{27}$$

При $\eta < \xi$ поступаем аналогично.

Из представлений (26), (27) следует, что если $\partial T/\partial s$ и $\partial N_i/\partial s$ непрерывны по $s$ на $[0,1]$, то $U_{xx}$ непрерывна в $D^*$ и

$$\lim_{y\to 0+0} U_{xx} = \lim_{y\to 0-0} U_{xx},$$

$U_{yy}$ непрерывна в $D^*$, а на линии $y=0$ имеет особенность порядка $m$ относительно $y$.

Найдем выражения для $\partial T/\partial s$ и $\partial N_i/\partial s$ соответственно из формул (16), (17), в которых нужно предварительно проинтегрировать по частям первые слагаемые, добавив к условиям (15) непрерывность $\partial^3\varphi_i/\partial\xi^3$ по $\xi$ на $[0,1]$ и $\varphi_i''(0,\lambda)=0$. В результате имеем

$$\begin{gathered} \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\cos\pi q}{\Gamma(1+q)\Gamma(1-q)}\times \\ \times\Bigg[\frac{s^{-1-q}}{1-q}\int_0^s(\varphi_1+\varphi_2)'''(s-t)^{1-q}\,{}_0F_1\Big(2-q,\frac{\lambda^2 s(s-t)}{4}\Big)dt+ \\ + \frac{s^{-q}\lambda^2}{4(1-q)(2-q)}\int_0^s(\varphi_1+\varphi_2)'''(s-t)^{2-q}\,{}_0F_1\Big(3-q,\frac{\lambda^2 s(s-t)}{4}\Big)dt+ \\ + s^{-q}\int_0^s(\varphi_1+\varphi_2)'''(s-t)^{-q}\,{}_0F_1\Big(1-q,\frac{\lambda^2 s(s-t)}{4}\Big)dt- \\ - \Big[\frac{\lambda^2}{4(1-q)}\Big]^2\int_0^s(\varphi_1+\varphi_2)'\frac{(s-t)^{2-q}}{2-q}\,{}_0F_1\Big(3-q,\frac{\lambda^2 s(s-t)}{4}\Big)dt- \\ - \frac{\lambda^2}{4(1-q)}\int_0^s(\varphi_1+\varphi_2)'(s-t)^{-q}\,{}_0F_1\Big(1-q,\frac{\lambda^2 s(s-t)}{4}\Big)dt\Bigg]. \end{gathered} \tag{28}$$

Проводя такие же рассуждения, как и при оценке $T(s,\lambda)$, получаем

$$\left|\frac{\partial T}{\partial s}\right| \leqslant 6\big[\max|\varphi_1''+\varphi_2''| + \lambda^2\max|\varphi_1'+\varphi_2'|\big]\,{}_0F_1\Big(1+q;\frac{\lambda^2}{4}\Big). \tag{29}$$

Аналогично

$$\left|\frac{\partial N_i}{\partial s}\right|_{i=1,2} \leqslant 6[\max|\varphi_i{}''| + \lambda^2 \max|\varphi_i{}'|]\ {}_0F_1\left(1+q; \frac{\lambda^2}{4}\right). \tag{30}$$

При дополнительном условии непрерывности $\varphi_i{}'''$ непрерывность $\partial T/\partial s$ следует из представления (28). Аналогичное утверждение справедливо и для $\partial N_i/\partial s$.

Из формул (23), (26), (27), (29), (30) имеем оценки

$$|U_{xx}| \leqslant 24\Big[\lambda^2\Big(\max_{\gamma_1}|\varphi_1{}^{*\prime}| + \max_{\gamma_4}|\varphi_2{}^{*\prime}|\Big) + \\ + \max_{\gamma_1}|\varphi_1{}^{*\prime\prime\prime}| + \max_{\gamma_4}|\varphi_2{}^{*\prime\prime\prime}|\Big]\ {}_0F_1^2\Big(1+q; \frac{\lambda^2}{4}\Big), \tag{31}$$

$$|U_{yy}| \leqslant 24|y|^{-m}\Big[\lambda^2\Big(\max_{\gamma_1}|\varphi_1{}^{*\prime}| + \max_{\gamma_4}|\varphi_2{}^{*\prime}|\Big) + \max_{\gamma_1}|\varphi_1{}^{*\prime\prime}| + \max_{\gamma_4}|\varphi_2{}^{*\prime\prime}| + \\ + \max_{\gamma_1}|\varphi_1{}^{*\prime\prime\prime}| + \max_{\gamma_4}|\varphi_2{}^{*\prime\prime\prime}|\Big]\ {}_0F_1^2\Big(1+q; \frac{\lambda^2}{4}\Big). \tag{32}$$

**4. Условия, налагаемые на решение задачи $\boldsymbol{\Delta_1 C}$.** Определим условия, налагаемые на данные задачи $\Delta_1 C$.

Условия A (обеспечивающие разрешимость плоской задачи $\Delta_1$). *Функции $\varphi_i^*(x,\lambda)$, $\partial\varphi_i^*/\partial x$, $\partial^2\varphi_i^*/\partial x^2$, $\partial^3\varphi_i^*/\partial x^3$ $(i=1,2)$ непрерывны на множестве $\underline{O}_1 = \big\{0 \leqslant x \leqslant 1/2, |\lambda| < +\infty\big\}$;*

$$\varphi_i^*(0,\lambda) = \frac{\partial\varphi_i^*(0,\lambda)}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi_i^*(0,\lambda)}{\partial x^2} = 0.$$

При выполнении условий A задача $\Delta_1$ имеет единственное решение. Справедливость данного утверждения следует из единственности решения задачи Коши, взятого за основу и однозначной разрешимости интегральных уравнений, к которым свелась задача $\Delta_1$.

Условия B (обеспечивающие существование решения уравнения (1) в виде интеграла (4)). *Из оценок (23), (24), (25), (31), (32) следует, что для достаточно больших $\lambda$ имеют место следующие представления:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_i^*(x,\lambda) = \frac{\varphi_{i1}^*(x,\lambda)}{|\lambda|^{2+p}\ {}_0F_1^2\left(1+q; \frac{\lambda^2}{4}\right)}, \quad p>1,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_i^*(x,\lambda) = \frac{\varphi_{i2}^*(x,\lambda)}{|\lambda|^{2+p}\ {}_0F_1^2\left(1+q; \frac{\lambda^2}{4}\right)},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\varphi_i^*(x,\lambda) = \frac{\varphi_{i3}^*(x,\lambda)}{|\lambda|^{p}\ {}_0F_1^2\left(1+q; \frac{\lambda^2}{4}\right)}, \quad i=1,2,$$

*где* $\varphi^*_{ij}(x,\lambda)$ — *равномерно ограниченные относительно параметра* $\lambda$ *функции* $(j=1,2,3)$.

От функций $\Phi_k(x,z)$ $(k=1,2)$ потребуем выполнения следующих условий.

Условия С. *Функции* $\Phi_k$, $\partial\Phi_k/\partial x$, $\partial^2\Phi_k/\partial x^2$, $\partial^3\Phi_k/\partial x^3$ $(i=1,2)$ *непрерывны на множестве* $\underline{O}_2=\{(x,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1/2, |z|<+\infty\}$. *Интегралы*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_k(x,z)e^{i\lambda z}dz,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\Phi_k}{\partial x}e^{i\lambda z}dz,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x^2}e^{i\lambda z}dz,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^3\Phi_k}{\partial x^3}e^{i\lambda z}dz$$

*сходятся равномерно относительно* $x$ *на сегменте* $[0,1/2]$;

$$\Phi_k(0,z)=\frac{\partial\Phi_k(0,z)}{\partial x}=\frac{\partial^2\Phi_k(0,z)}{\partial x^2}=0.$$

Условия С обеспечивают выполнимость условий А.

При выполнении условий А–С задача $\Delta_1 C$ для уравнения (1) имеет единственное решение. Справедливость этого утверждения следует из однозначной разрешимости плоской задачи $\Delta_1$ и свойств преобразования Фурье. Решение задачи $\Delta_1 C$ представимо интегралом (1), где $U(x,y,\lambda)$ в характеристических координатах определяется формулами (11) при $y<0$, (12) при $y>0$, а также (17), (18). Из приведенных вычислений и свойств преобразования Фурье следует непрерывность функции $W$ на множестве $\overline{T}$, а также непрерывность ее частных производных до второго порядка включительно на множестве $T$. Выполнимость условий (3), которые обеспечивают эквивалентность пространственной и плоской задач, автоматически следует из представлений А и свойства преобразования Фурье.

**Резюме.** Для уравнения $W_{xx}-|y|^mW_{yy}+W_{zz}=0$ $(0<m<1)$ в бесконечной цилиндрической области, ограниченной характеристическими поверхностями данного уравнения

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1: \quad x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}, \quad y<0, \quad |z|<\infty;\\
&\Sigma_2: \quad x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1, \quad \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1, \quad y<0, \quad |z|<\infty;\\
&\Sigma_3: \quad x+\frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}=1, \quad \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1, \quad y>0, \quad |z|<\infty;\\
&\Sigma_4: \quad x-\frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}, \quad y>0, \quad |z|<\infty,
\end{aligned}$$

поставлена краевая задача с условиями

$$W|_{\Sigma_1}=\Phi(x,z);\qquad W|_{\Sigma_4}=\Phi(x,z),$$

$$\lim_{z\to\pm\infty}W=\lim_{z\to\pm\infty}W_z=0$$

и сопряжением на плоскости $y=0$:

$$\lim_{y\to 0+0}W(x,y,z)=\lim_{y\to 0-0}W(x,y,z);\qquad \lim_{y\to 0+0}\frac{\partial W}{\partial y}=\lim_{y\to 0-0}\frac{\partial W}{\partial y}.$$

Методом преобразования Фурье поставленная задача сводится к соответствующей плоской задаче для гиперболического уравнения, которое в характеристических координатах является обобщенным уравнением Эйлера—Дарбу с отрицательным параметром:

$$U_{\xi\eta} + \frac{q}{\xi-\eta}(U_\eta - U_\xi) - \frac{\lambda^2 U}{4} = 0, \qquad q = -\frac{m}{2(2-m)}.$$

Авторами получено решение плоской задачи, а также оценки как самого решения, так и его частных производных до второго порядка включительно, что позволило на данные задачи наложить условия, обеспечивающие существование классического решения поставленной задачи в виде преобразования Фурье.

**ORCID**
**Вячеслав Михайлович Долгополов:** http://orcid.org/0000-0002-4638-8800

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях // *ДАН СССР*, 1956. Т. 110, № 6. С. 901–902.
2. Нахушев А. М. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта // *Дифференц. уравнения*, 1968. Т. 4, № 1. С. 52–62.
3. Пулькин С. П. К вопросу о постановке задачи Трикоми в пространстве // *Ученые записки Куйб. пед. ин-та*, 1956. № 14. С. 63–77.
4. Долгополов В. М., Долгополов М. В., Родионова И. Н. Построение специальных классов решений некоторых дифференциальных уравнений гиперболического типа // *Докл. РАН*, 2009. Т. 429, № 5. С. 583–589.
5. Долгополов В. М., Родионова И. Н. Задачи для уравнений гиперболического типа на плоскости и в трехмерном пространстве с условиями сопряжения на характеристике // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011. Т. 75, № 4. С. 21–28. doi: 10.4213/im4117.
6. Долгополов В. М., Родионова И. Н. Экстремальные свойства решений специальных классов одного уравнения гиперболического типа // *Матем. заметки*, 2012. Т. 92, № 4. С. 533–540. doi: 10.4213/mzm8900.

Поступила в редакцию 17/V/2015;
в окончательном варианте — 27/VIII/2015;
принята в печать — 08/IX/2015.

**Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki**
**[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 697–709**

**ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print)** **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1436

**MSC: 35L10**

# A SIMILAR FOR $\Delta_1$ PROBLEM FOR THE SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATION IN THE 3D EUCLIDEAN SPACE

***V. M. Dolgopolov, I. N. Rodionova***

Samara State Aerospace University,
34, Moskovskoye sh., Samara, 443086, Russian Federation.

**Abstract**

The second-order hyperbolic type equation is considered in the 3D Euclidean space. Boundary value problem is posed in the infinite cylindrical region bounded by the characteristic surfaces of this equation with data on the related characteristic surfaces of the equation and with conditions mates on the internal non-descriptive plane. The solution is also assumed to be zero when $z \to \infty$ with derivative by variable $z$. By the Fourier transform method the problem reduced to the corresponding planar problem $\Delta_1$ for hyperbolic equation, which in characteristic coordinates is the generalized Euler–Darboux equation with a negative parameter. Authors obtained estimates of the plane problem solution and its partial derivatives up to the second order inclusive. This, in turn, provided an opportunity to impose the conditions to given boundary functions ensuring the existence of a classical solution of the problem in the form of the Fourier transform.

**Keywords:** integral equations, boundary value problems, second-order hyperbolic type equations.

**doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1436

**ORCID**
**Vyacheslav M. Dolgopolov:** http://orcid.org/0000-0002-4638-8800

## REFERENCES

1. Bitsadze A. V. On the problem of equations of mixed type in multidimensional domains, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1956, vol. 110, no. 6, pp. 901–902 (In Russian).
2. Nakhushev A. M. On an Three-Dimensional Analog of the Gellerstedt Problem, *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 1, pp. 52–62 (In Russian).



**Please cite this article in press as:**
Dolgopolov V. M., Rodionova I. N. A similar for $\Delta_1$ problem for the second-order hyperbolic equation in the 3D Euclidean space, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 697–709. doi: 10.14498/vsgtu1436. (In Russian)

**Authors Details:**
*Irina N. Rodionova* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Dept. of Mathematics & Business Informatics.
*Vyacheslav M. Dolgopolov* (Cand. Phys. & Math. Sci.; paskal1940@mail.ru; Corresponding Author), Associate Professor, Dept. of Mathematics & Business Informatics.

3. Pul'kin S. P. On the question of formulating the Tricomi problem in space, *Uchenye zapiski Kuib. ped. in-ta*, 1956, no. 14, pp. 63–77 (In Russian).
4. Dolgopolov V. M., Dolgopolov M. V., Rodionova I. N. Construction of special classes of solutions for some differential equations of hyperbolic type, *Dokl. Math.*, 2009, vol. 80, no. 3, pp. 860–866. doi: 10.1134/S1064562409060209.
5. Dolgopolov M. V., Rodionova I. N. Problems involving equations of hyperbolic type in the plane or three-dimensional space with conjugation conditions on a characteristic, *Izv. Math.*, 2011, vol. 75, no. 4, pp. 681–689. doi: 10.1070/IM2011v075n04ABEH002549.
6. Dolgopolov V. M., Rodionova I. N. Extremal properties of solutions of special classes of a hyperbolic-type equation, *Math. Notes*, 2012, vol. 92, no. 4, pp. 490–496. doi: 10.1134/S0001434612090210.

Received 17/V/2015;
received in revised form 27/VIII/2015;
accepted 08/IX/2015.