Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 2. С. 311–324
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1406

УДК 517.951; 517.958:531.12

КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ С ЗАДЕЛАННЫМИ КОНЦАМИ

К. Б. Сабитов

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия, 443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

Аннотация

В работе изучена задача с начальными условиями для уравнения балки с заделанными концами. Доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости поставленной задачи в классах регулярных и обобщенных решений. Решение начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций одномерной спектральной задачи. У спектральной задачи найдены собственные значения как корни трансцендентного уравнения и соответствующая система собственных функций. Показано, что построенная система собственных функций является ортогональной и полной в пространстве L_2. На основании полноты системы собственных функций получена теорема единственности решения поставленной начально-граничной задачи для уравнения балки. Обобщенное решение определяется как предел последовательности регулярных решений задачи по среднеквадратичной норме по пространственной переменной.

Ключевые слова: уравнение балки, начально-граничная задача, спектральный метод, единственность, существование, ряд, устойчивость.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1406

1. Постановка задачи. Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка, чем уравнение струны.

Пусть балка длины l зажата с концами в массивные тиски. Изгибные колебания балки описываются уравнением четвертого порядка [1, с. 141–143]

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = 0, \tag{1}$$

где $\alpha^2 = k/\rho$, k — модуль сдвига, ρ — линейная плотность балки.

Для определения колебания $u(x,t)$ точек балки нужно задать граничные условия на концах $x = 0$ и $x = l$. В случае балки с наглухо закрепленными обоими концами граничными условиями являются неподвижность балки и горизонтальность касательной на концах:

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

Образец для цитирования
Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 2. С. 311–324. doi: 10.14498/vsgtu1406.

Сведения об авторе
Камиль Басирович Сабитов (д.ф.-м.н., проф.; sabitov_fmf@mail.ru), профессор, каф. высшей математики.

Начальные условия такие же, как в случае уравнения струны:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3}$$

В этой работе для уравнения балки (1) изучим задачу с условиями (2) и (3) в прямоугольной области

$$D = \{(x,t) \mid 0 < x < l, \quad 0 < t < T\},$$

где l и T — заданные положительные числа.

Отметим, что в работах [2, с. 45], [3, с. 35], [4, с. 151–152], [5, 1.6] методом разделения переменных найдены собственные частоты (собственные значения) и формы собственных колебаний (собственные функции) задачи (1) и (2). А начально-граничная задача (1)–(3) и другие аналогичные задачи практически не исследованы.

Для обоснования корректности поставленной задачи приведем более строгую ее постановку.

Начально-граничная задача. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям*:

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \cap C^{2,1}_{x,t}(\overline{D}); \tag{4}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D; \tag{5}$$

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{6}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{7}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

В настоящей работе доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения задачи (4)–(7) в классах регулярных (из пространства (4) и обобщенных решений. Обобщенное решение определяется как предел последовательности регулярных решений задачи по среднеквадратичной норме по пространственной переменной.

2. Единственность решения задачи. Для обоснования корректности постановки задачи (4)–(7) применим методы спектрального анализа [6, с. 74–111]. Разделяя переменные $u(x,t) = X(x)T(t)$, получим следующую спектральную задачу:

$$X^{IV}(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{8}$$

$$X(0) = X'(0) = X(l) = X'(l) = 0. \tag{9}$$

Обозначим через L дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением X^{IV} на множестве $C^4(0,l) \cap C^3[0,l]$, вообще говоря, комплексных функций, удовлетворяющих граничным условиям (9).

Оператор L является самосопряженным, так как задача, сопряженная к задаче (8) и (9), совпадает с этой задачей. Отсюда следует, что все собственные значения оператора L являются действительными и собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональными.

Оператор L является также положительным. Действительно,

$$(LX, \overline{X}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} LX\cdot\overline{X}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} X^{IV}(x)\overline{X}(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= X'''(x)\overline{X}(x)\Big|_0^l - X''(x)\overline{X}'(x)\Big|_0^l + \int_0^l X''(x)\overline{X}''(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^l |X''(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Следовательно, каждое собственное значение оператора L является неотрицательным и простым.

Теперь найдем собственные значения и соответствующие функции оператора L, т.е. найдем решения уравнения $LX = -\lambda X$, удовлетворяющие граничным условиям (9).

Пусть $\lambda = -d^4$, $d > 0$. Тогда общее решение уравнения (8) определим в следующем виде:

$$X(x) = \alpha_1 \operatorname{ch} dx + \alpha_2 \operatorname{sh} dx + \alpha_3 \cos dx + \alpha_4 \sin dx, \tag{10}$$

где α_i — произвольные постоянные. Удовлетворяя функцию (10) первыми двумя условиями из (9), находим $\alpha_3 = -\alpha_1$, $\alpha_4 = -\alpha_2$. Тогда функция (10) примет вид

$$X(x) = \alpha_1 (\operatorname{ch} dx - \cos dx) + \alpha_2 (\operatorname{sh} dx - \sin dx). \tag{11}$$

Удовлетворяя функцию (11) последними двумя граничными условиями из (9), получим

$$\begin{cases} \alpha_1 (\operatorname{ch} dl - \cos dl) + \alpha_2 (\operatorname{sh} dl - \sin dl) = 0, \\ \alpha_1 (\operatorname{sh} dl + \sin dl) + \alpha_2 (\operatorname{ch} dl - \cos dl) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Приравнивая определитель этой системы нулю, получаем трансцендентное уравнение
$$\operatorname{ch} dl \cdot \cos dl = 1 \tag{13}$$
для вычисления собственных значений. Графическим методом нетрудно показать существование счетного множества корней (собственных значений) уравнения (13):
$$d_1 < d_2 < \dots < d_n < \dots,$$
при этом справедлива при больших n асимптотическая формула

$$d_n \approx \frac{\pi}{2l}(2n-1). \tag{14}$$

Из системы (12) с учетом уравнения (13) выразим α_1 через α_2 и подставим в (11). В результате найдем соответствующую систему собственных функций

$$X_n(x) = \frac{\sin d_n l}{1+\cos d_n l}(\cos d_n x - \operatorname{ch} d_n x) + \operatorname{sh} d_n x - \sin d_n x. \tag{15}$$

Поскольку $\lambda \leqslant 0$, остается рассмотреть случай, когда $\lambda = 0$. В этом случае спектральная задача (8) и (9) имеет только нулевое решение.

Итак, собственные значения задачи (8) и (9) определяются по формуле $\lambda_n = -d_n^4$, где d_n — корень уравнения (13), а собственные функции по формуле (15).

Как было отмечено выше, система собственных функций (15) является ортогональной на промежутке $[0,l]$. Тем не менее проверим это свойство и найдем норму $||X_n||_{L_2[0,l]} = ||X_n(x)||$. Для этого формуле (15) с учетом равенства (13) при $d = d_n$ придадим более компактный вид:

$$X_n(x) = \frac{2\operatorname{ch}(d_n l/2)}{1+\operatorname{ch} d_n l}\operatorname{sh} d_n\,(x-l/2) - \frac{2\cos(d_n l/2)}{1+\cos(d_n l/2)}\sin d_n\,(x-l/2) = \\ = \frac{\operatorname{sh} d_n(x-l/2)}{\operatorname{ch}(d_n l/2)} - \frac{\sin d_n(x-l/2)}{\cos(d_n l/2)}. \quad (16)$$

На основании (16) рассмотрим интеграл

$$J_{nm} = \int_0^l X_n(x)X_m(x)\,dx = \int_0^l [a_n \operatorname{sh} d_n(x-l/2) - b_n \sin d_n(x-l/2)] \times \\ \times \left[a_m \operatorname{sh} d_n(x-l/2) - b_n \sin d_m(x-l/2)\right] \mathrm{d}x, \quad (17)$$

где

$$a_n = \frac{2\operatorname{ch}(d_n l/2)}{1+\operatorname{ch} d_n l}, \qquad b_n = \frac{2\cos(d_n l/2)}{1+\cos(d_n l/2)}.$$

Предварительно вычислим следующие интегралы:

$$i_1 = \int_0^l \operatorname{sh} d_n(x-l/2)\operatorname{sh} d_m(x-l/2)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{l/2} \operatorname{sh} d_n t \operatorname{sh} d_m t\,\mathrm{d}t = \\ = \int_0^{l/2} [\operatorname{ch}(d_n+d_m)t - \operatorname{ch}(d_n-d_m)t]\,\mathrm{d}t = \\ = \frac{\operatorname{sh}(d_n+d_m)l/2}{d_n+d_m} - \frac{\operatorname{sh}(d_n-d_m)l/2}{d_n-d_m}, \quad (18)$$

$$i_2 = \int_0^l \operatorname{sh} d_n(x-l/2)\sin d_m(x-l/2)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{l/2} \operatorname{sh} d_n t \sin d_m t\,\mathrm{d}t = \\ = \frac{2}{d_n^2+d_m^2}\left[d_n \sin\frac{d_m l}{2}\operatorname{ch}\frac{d_n l}{2} - d_m\cos\frac{d_m l}{2}\operatorname{sh}\frac{d_n l}{2}\right], \quad (19)$$

$$i_3 = \int_0^l \sin d_n(x-l/2)\operatorname{sh} d_m(x-l/2)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{l/2} \operatorname{sh} d_n t \sin d_m t\,\mathrm{d}t = \\ = \frac{2}{d_m^2+d_n^2}\left[d_m \sin\frac{d_n l}{2}\operatorname{ch}\frac{d_m l}{2} - d_n\cos\frac{d_n l}{2}\operatorname{sh}\frac{d_m l}{2}\right], \quad (20)$$

$$i_4 = \int_0^l \sin d_n(x - l/2) \sin d_m(x - l/2)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{l/2} \sin d_n t \sin d_m t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{l/2} \left[\cos(d_n - d_m)t - \cos(d_n + d_m)t\right]\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{\sin(d_n - d_m)l/2}{d_n - d_m} - \frac{\sin(d_n + d_m)l/2}{d_n + d_m}. \quad (21)$$

Теперь, с учетом значений интегралов (18)–(21), найдем (17):

$$J_{nm} = a_n a_m i_1 - a_n b_m i_2 - b_n a_m i_3 + b_n b_m i_4 =$$
$$= \frac{1}{d_n + d_m}\big[a_n a_m \operatorname{sh}(d_n + d_m)l/2 - b_n b_m \sin(d_n + d_m)l/2\big] -$$
$$- \frac{1}{d_n - d_m}\big[a_n a_m \operatorname{sh}(d_n - d_m)l/2 - b_n b_m \sin(d_n - d_m)l/2\big] -$$
$$- \frac{2d_n}{d_n^2 + d_m^2}\left[a_n b_m \sin\frac{d_m l}{2} \operatorname{ch}\frac{d_n l}{2} - b_n a_m \cos\frac{d_n l}{2} \operatorname{sh}\frac{d_m l}{2}\right] +$$
$$+ \frac{2d_m}{d_n^2 + d_m^2}\left[a_n b_m \cos\frac{d_m l}{2} \operatorname{sh}\frac{d_n l}{2} - b_n a_m \sin\frac{d_n l}{2} \operatorname{ch}\frac{d_m l}{2}\right] =$$
$$= \frac{M_1}{d_n + d_m} - \frac{M_2}{d_n - d_m} - \frac{2d_n M_3}{d_n^2 + d_m^2} + \frac{2d_m M_4}{d_n^2 + d_m^2}. \quad (22)$$

Остается вычислить M_i:

$$M_1 = \frac{4\operatorname{ch}(d_n l/2)\operatorname{ch}(d_m l/2)}{(1 + \operatorname{ch} d_n l)(1 + \operatorname{ch} d_m l)} \operatorname{sh}(d_n + d_m)l/2 -$$
$$- \frac{4\cos(d_n l/2)\cos(d_m l/2)}{(1 + \cos d_n l)(1 + \cos d_m l)} \sin(d_n + d_m)l/2 = M_{11} - M_{12} = 0, \quad (23)$$

так как

$$M_{11} = \frac{4\operatorname{ch}(d_n l/2)\operatorname{ch}(d_m l/2)}{(1 + \operatorname{ch} d_n l)(1 + \operatorname{ch} d_m l)}\left(\operatorname{sh}\frac{d_n l}{2} \operatorname{ch}\frac{d_m l}{2} + \operatorname{sh}\frac{d_m l}{2} \operatorname{ch}\frac{d_n l}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{(1 + \operatorname{ch} d_n l)(1 + \operatorname{ch} d_m l)}\big[\operatorname{sh} d_n l(\operatorname{ch} d_m l + 1) + \operatorname{sh} d_m l(\operatorname{ch} d_n l + 1)\big] =$$
$$= \frac{\operatorname{sh} d_n l}{1 + \operatorname{ch} d_n l} + \frac{\operatorname{sh} d_m l}{1 + \operatorname{ch} d_m l} = \frac{\sin d_n l}{1 + \cos d_n l} + \frac{\sin d_n l}{1 + \cos d_n l},$$

$$M_{12} = \frac{4\cos(d_n l/2)\cos(d_m l/2)}{(1 + \cos d_n l)(1 + \cos d_m l)}\left(\sin\frac{d_n l}{2} \cos\frac{d_m l}{2} + \sin\frac{d_m l}{2} \cos\frac{d_n l}{2}\right) =$$
$$= \frac{\sin d_n l(\cos d_m l + 1) + \sin d_m l(\cos d_n l + 1)}{(1 + \operatorname{ch} d_n l)(1 + \operatorname{ch} d_m l)} = M_{11};$$

$$M_2 = \frac{4\operatorname{ch}(d_n l/2)\operatorname{ch}(d_m l/2)}{(1+\operatorname{ch} d_n l)(1+\operatorname{ch} d_m l)}\operatorname{sh}(d_n-d_m)l/2 - \\ - \frac{4\cos(d_n l/2)\cos(d_m l/2)}{(1+\cos d_n l)(1+\cos d_m l)}\sin(d_n-d_m)l/2 = 0, \quad (24)$$

что следует из равенства (23);

$$M_3 = \frac{4\operatorname{ch}(d_n l/2)\cos(d_m l/2)\sin(d_m l/2)\operatorname{ch}(d_n l/2)}{(1+\operatorname{ch} d_n l)(1+\cos d_m l)} - \\ - \frac{4\cos(d_n l/2)\operatorname{ch}(d_m l/2)\cos(d_n l/2)\operatorname{sh}(d_m l/2)}{(1+\cos d_n l)(1+\operatorname{ch} d_m l)} = \\ = \frac{\sin d_m l)(\operatorname{ch} d_n l+1)}{(1+\cos d_m l)(1+\operatorname{ch} d_n l)} - \frac{\operatorname{sh} d_m l(\cos d_n l+1)}{(1+\cos d_n l)(1+\operatorname{ch} d_m l)} = \\ = \frac{\sin d_m l}{1+\cos d_m l} - \frac{\operatorname{sh} d_m l}{1+\operatorname{ch} d_m l} = \frac{\sin d_m l}{1+\cos d_m l} - \frac{\sin d_m l}{1+\cos d_m l} = 0, \quad (25)$$

$$M_4 = \frac{4\operatorname{ch}(d_n l/2)\cos(d_m l/2)\cos(d_m l/2)\operatorname{sh}(d_n l/2)}{(1+\operatorname{ch} d_n l)(1+\cos d_m l)} - \\ - \frac{4\cos(d_n l/2)\operatorname{ch}(d_m l/2)\sin(d_n l/2)\operatorname{ch}(d_m l/2)}{(1+\cos d_n l)(1+\operatorname{ch} d_m l)} = \\ = \frac{\sin d_n l(\operatorname{ch} d_m l+1)}{(1+\operatorname{ch} d_n l)(1+\cos d_m l)} - \frac{\sin d_n l(\operatorname{ch} d_m l+1)}{(1+\cos d_n l)(1+\operatorname{ch} d_m l)} = \\ = \frac{\operatorname{sh} d_n l}{1+\operatorname{ch} d_n l} - \frac{\sin d_n l}{1+\cos d_n l} = 0. \quad (26)$$

Тогда на основании (23)–(26) из равенства (22), получим

$$J_{nm} = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

Далее, переходя к пределу в равенстве (22) при $d_m \to d_n$, найдем

$$||X_n(x)||^2 = \int_0^l X_n^2(x)\,\mathrm{d}x = J_{nn} = \\ = \frac{1}{2d_n}\left(a_n^2\operatorname{sh} d_n l - b_n^2\sin d_n l\right) + \frac{l}{2}(b_n^2 - a_n^2) = \\ = \frac{l}{2}\left(\frac{2}{1+\cos d_n l} - \frac{2}{1+\operatorname{ch} d_n l}\right) + \frac{1}{2d_n}\left(\frac{2\operatorname{sh} d_n l}{1+\operatorname{ch} d_n l} - \frac{2\sin d_n l}{1+\cos d_n l}\right) = \\ = \frac{l(1-\cos d_n l)}{1+\cos d_n l} = l\operatorname{tg}^2\frac{d_n l}{2}.$$

Отсюда

$$||X_n(x)|| = \sqrt{l}\left|\operatorname{tg}\frac{d_n l}{2}\right|. \quad (27)$$

Как известно из теории дифференциальных операторов [7, с. 91], система собственных функций $X_n(x)$ самосопряженного оператора L является полной в пространстве $L_2[0,l]$. Тогда полной является ортонормированная система

$$Y_n(x) = X_n(x)/||X_n(x)||, \tag{28}$$

где $X_n(x)$ и $||X_n(x)||$ определены формулами (16) и (27).

Теперь докажем единственность решения задачи (4)–(7) при условии ее существования. Введем функции

$$u_n(t) = \int_0^l u(x,t)Y_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

На основании (29) рассмотрим вспомогательные функции

$$u_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)Y_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

где ε — достаточно малое положительное число. Дифференцируя данное равенство два раза по $t \in (0,T)$ и используя уравнение (1), получим

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = -\alpha^2 \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xxxx}(x,t)Y_n(x)\,dx.$$

Интегрируя здесь по частям четыре раза и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (6) и (9), получим

$$u''_n(t) + \alpha^2 d_n^4 u_n(t) = 0. \tag{30}$$

Общее решение уравнения (30) определяются по формуле

$$u_n(t) = a_n \cos \alpha d_n^2 t + b_n \sin \alpha d_n^2 t, \tag{31}$$

при этом произвольные постоянные a_n и b_n находятся из условий (29) и (7):

$$u_n(0) = \int_0^l u(x,0)Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^l \varphi(x)Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \varphi_n, \tag{32}$$

$$u'_n(0) = \int_0^l u_t(x,0)Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^l \psi(x)Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \psi_n. \tag{33}$$

Тогда из (31)–(33) найдем

$$a_n = \varphi_n, \quad b_n = \psi_n/(\alpha^2 d_n^2).$$

Подставляя эти значения a_n и b_n в формулу (31), получим

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \alpha d_n^2 t + \frac{\psi_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2 t. \tag{34}$$

Пусть теперь $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$. Тогда в силу равенств (32) и (33) все $\varphi_n = \psi_n \equiv 0$, поэтому из формул (34) и (29) при любом $t \in [0, T]$ и $n \in \mathbb{N}$ следует равенство

$$\int_0^l u(x,t) Y_n(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы (28) в пространстве $L_2[0, l]$ следует, что $u(x,t) \equiv 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $t \in [0, T]$. В силу (4) функция $u(x,t)$ непрерывна на $\overline{D}$, поэтому функция $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если существует решение задачи (4)–(7), удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{x \to 0+0} u_{xxx} Y_n(x) = \lim_{x \to l-0} u_{xxx} Y_n(x) = 0,$$

то оно единственно.

Отметим, что последние условия возникают при получении уравнения (30) и они имеют место при условии, когда производная u_{xxx} при $x \to 0+0$ и $x \to l-0$ ограничена или даже может иметь особенности порядка меньше единицы.

Решение задачи (4)–(7) строится в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n(x), \tag{35}$$

где $u_n(t)$ и $Y_n(x)$ определяются соответственно по формулам (34) и (28).

Лемма 1. *При любом $t \in [0, T]$ справедливы оценки*

$$|u_n(t)| \leqslant C_1 \Big(|\varphi_n| + \frac{1}{n^2} |\psi_n| \Big), \tag{36}$$

$$|u_n''(t)| \leqslant C_2 \left(n^4 |\varphi_n| + n^2 |\psi_n| \right), \tag{37}$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные.

Справедливость оценок (36) и (37) непосредственно следует из формул (34) и (14).

Формально из (35) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) Y_n(x), \tag{38}$$

$$u_{xxxx} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n^{(4)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^4 u_n(t) Y_n(x). \tag{39}$$

Ряды (35), (38) и (39) при любых $(x,t) \in \overline{D}$ на основании леммы 1 мажорируются рядом

$$C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^4 |\varphi_n| + n^2 |\psi_n| \right). \tag{40}$$

Лемма 2. *Если* $\varphi(x) \in C^6[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi'(0) = \varphi'(l) = \varphi^{IV}(0) = \varphi^{IV}(l) = 0$, $\psi(x) \in C^4[0,l]$, $\psi(0) = \psi(l) = \psi'(0) = \psi'(l) = 0$, *то справедливы соотношения*

$$\varphi_n = \frac{1}{d_n^6}\varphi_n^{(6)}, \quad \psi_n = \frac{1}{d_n^4}\psi_n^{(4)}, \tag{41}$$

где

$$\varphi_n^{(6)} = \frac{1}{||X_n||}\int_0^l \varphi^{(6)}(x)\left[a_n \operatorname{sh} d_n(x-l/2) + b_n \sin d_n(x-l/2)\right] \mathrm{d}x,$$

$$\psi_n^{(4)} = \int_0^l \psi^{(4)}(x) Y_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл (32), в силу уравнения (8) при $\lambda = -d_n^4$ будем иметь

$$\varphi_n = \frac{1}{d_n^4}\int_0^l \varphi(x) Y_n^{IV}(x)\,\mathrm{d}x.$$

В этом интеграле, интегрируя по частям четыре раза и учитывая условия леммы и (9), найдем

$$\varphi_n = \frac{1}{d_n^4}\int_0^l \varphi^{IV}(x) Y_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{42}$$

В (42), интегрируя по частям два раза, получим первое представление из (41). А второе следует из равенства (42). □

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 2, то в силу представлений (41) ряд (40) оценивается сходящимся числовым рядом

$$C_4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(|\varphi_n^{(6)}| + |\psi_n^{(4)}|\right).$$

Тогда ряды (35)–(37) сходятся равномерно на $\overline{D}$, следовательно, сумма ряда (35) удовлетворяет условиям (4), (5) и (6), так как сумма ряда (35) принадлежит пространству $C_{x,t}^{4,2}(\overline{D})$.

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 2, *то существует единственное решение задачи* (4)–(7), *определяемое рядом* (35), *коэффициенты которого находятся по формуле* (34).

Теперь установим устойчивость решения поставленной задачи от начальных данных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Теорема 3. *Для решения* (35) *задачи* (4)–(7) *имеет место оценка*

$$||u(x,t)||_{L_2[0,l]} \leqslant C_5\left(||\varphi(x)||_{L_2[0,l]} + ||\psi(x)||_{L_2[0,l]}\right). \tag{43}$$

Доказательство. Поскольку система $Y_n(x)$ ортонормирована, из формулы (35) в силу леммы 1 имеем

$$||u(x,t)||^2_{L_2[0,l]} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \leqslant 2C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n^2 + \psi_n^2\right) = \\ = C_5^2\big(||\varphi(x)||^2_{L_2[0,l]} + ||\psi(x)||^2_{L_2[0,l]}\big). \quad (44)$$

Из неравенства (44) следует справедливость оценки (43). □

Таким образом, нами установлена корректность постановки задачи (4)–(7). При этом отметим, что при доказательстве теоремы 2 существования решения задачи на начальные условия (6) наложены достаточно сильные условия гладкости. Если ввести понятие обобщенного решения этой задачи, то эти условия можно значительно ослабить.

Рассмотрим множество функций $f(x,t)$, заданных в области

$$\Omega = \{(x,t) \mid \ a \leqslant x \leqslant b, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$$

и интегрируемых с квадратом на сегменте $[a,\, b]$ при любом $t \in [\alpha, \beta]$. На этом множестве введем норму

$$||f||_{L_2[a,b]} = ||f||_{L_2} = \left(\int_a^b f^2(x,t)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

по переменной x при любом t из $[\alpha, \beta]$, которая обладает всеми свойствами нормы пространства L_2.

Предварительно введем следующие понятия и установим их свойства.

Определение 1. Функция $f(x,t)$ называется *непрерывной в среднем по переменной t в точке $t_0 \in [\alpha, \beta]$*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что как только $|\Delta t| < \delta$, следует неравенство

$$||f(x, t_0 + \Delta t) - f(x, t_0)||_{L_2} < \varepsilon.$$

Функцию, непрерывную в среднем в каждой точке t_0 сегмента $[\alpha, \beta]$, называют *непрерывной в среднем на этом промежутке.*

Определение 2. Последовательность $f_n(x,t)$ называется *равномерно по t сходящейся в среднем к функции $f(x,t)$*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такой, что для любых $n > n_0$ и $t \in [\alpha, \beta]$ выполняется неравенство

$$\|f_n(x,t) - f(x,t)\|_{L_2} < \varepsilon.$$

Лемма 3. *Если существует предел последовательности $f_n(x,t)$, равномерно по t сходящейся в среднем, то этот предел единственен с точностью эквивалентности функций в L_2.*

Доказательство проводится на основании определения 2.

Определение 3. Последовательность $f_n(x,t)$ назовем *равномерно по t сходящейся в себе*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такой, что при всех n, $m > n_0$ и $t \in [\alpha, \beta]$ выполняется неравенство

$$\|f_n(x,t) - f_m(x,t)\|_{L_2} < \varepsilon.$$

Лемма 4. *Если последовательность $f_n(x,t)$ равномерно по t сходится в среднем к функции $f(x,t)$, то она сходится в себе равномерно по t.*

Доказательство. Пусть $f_n(x,t)$ равномерно по t сходится в среднем к функции $f(x,t)$. Тогда в силу определения 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0, такой, что при всех n, $m > n_0$ и $t \in [\alpha, \beta]$ имеем

$$\|f_n - f_m\|_{L_2} \leqslant \|f_n - f\|_{L_2} + \|f - f_m\|_{L_2} < 2\varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение. □

Лемма 5. *Если последовательность $f_n(x,t)$ равномерно по t сходится в себе, то она равномерно по t сходится в среднем к функции $f(x,t)$, интегрируемой с квадратом на $[a,b]$ при любом $t \in [\alpha, \beta]$.*

Это утверждение при любом фиксированном t представляет известную из теории функций теорему Э. Фишера [8, с. 159]. Поэтому здесь не остановимся на его доказательстве.

Лемма 6. *Предел $f(x,t)$равномерно по t сходящейся в среднем последовательности функций $f_n(x,t)$, каждая из которых непрерывна в среднем, есть также непрерывная в среднем функция.*

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем номер n_0 столь большим, чтобы при всех $n > n_0$ и $t \in [\alpha, \beta]$ имело место неравенство

$$\|f_n(x,t) - f(x,t)\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{45}$$

По условию, функции $f_n(x,t)$ непрерывны в среднем на $[\alpha, \beta]$, тогда на основании определения 1 существует $\delta > 0$ такое, что при $|\Delta t| < \delta$

$$\|f_n(x,t+\Delta t) - f_n(x,t)\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{46}$$

Тогда в силу неравенств (45) и (46) получим

$$\begin{aligned}
&\|f(x,t+\Delta t) - f(x,t)\|_{L_2} = \\
&\qquad = \|f(x,t+\Delta t) - f_n(x,t+\Delta t) + f_n(x,t+\Delta t) - f_n(x,t) + \\
&\qquad + f_n(x,t) - f(x,t)\|_{L_2} \leqslant \|f(x,t+\Delta t) - f_n(x,t+\Delta t)\|_{L_2} + \\
&\qquad\qquad + \|f_n(x,t+\Delta t) - f_n(x,t)\|_{L_2} + \|f_n(x,t) - f(x,t)\|_{L_2} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

а это означает, что предельная функция $f(x,t)$ непрерывна в среднем на $[\alpha, \beta]$. □

Лемма 7. *Если последовательность $f_n(x,t)$ функций, каждая из которых непрерывна в среднем, равномерно по t сходится в себе, то она равномерно по t сходится в среднем к функции $f(x,t)$, интегрируемой с квадратом на $[a,b]$ непрерывной в среднем на $[\alpha, \beta]$.*

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из лемм 5 и 6.

Теперь на основании оценки (43) установим существование и единственность обобщенного решения задачи (4)–(7) по среднеквадратичной норме.

Определение 4. Решение задачи (4)–(7) из класса $C^{4,2}_{x,t}(\overline{D})$ назовем *классическим*, или *регулярным*, решением этой задачи.

Определение 5. Функцию $u(x,t)$ будем называть *обобщенным решением задачи* (4)–(7), если существует последовательность $u_k(x,t)$ регулярных решений задачи (4)–(7) с начальными данными

$$u_k(x,t) = \varphi_k(x), \quad u_{k\,t}(x,0) = \psi_k(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

равномерно по t сходящаяся в среднем на промежутке $[0,l]$ к функции $u(x,t)$, при этом функции $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и они сходятся в среднем на $[0,l]$ соответственно к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Теорема 4. *Если $\varphi(x) \in L_2[0,l]$, $\psi(x) \in L_2[0,l]$, то существует единственное и устойчивое обобщенное решение задачи* (4)–(7), *которое определяется суммой ряда* (35) *и является непрерывным в среднем.*

Доказательство. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 4. Тогда существуют последовательности функций $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$, удовлетворяющие условиям теоремы 2, сходящиеся в среднем на $[0,l]$ соответственно к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. По функциям $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ на основании теоремы 2 построим последовательность $u_k(x,t)$ регулярных решений задачи (4)–(7). В силу линейности изучаемой задачи разность $u_k(x,t) - u_m(x,t)$ является решением задачи (4)–(7) с начальными функциями $\varphi_k(x) - \varphi_m(x)$ и $\psi_k(x) - \psi_m(x)$. Тогда в силу оценки (43) при любых k, $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|u_k - u_m\|_{L_2[0,l]} \leqslant C_6 \left(\|\varphi_k - \varphi_m\|_{L_2[0,l]} + \|\psi_k - \psi_m\|_{L_2[0,l]}\right). \tag{47}$$

По условию последовательности $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ сходятся в среднем на $[0,l]$ соответственно к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Следовательно, являются последовательностями в себе. Поэтому из оценки (47) следует, что $u_k(x,t)$ является последовательностью в себе. Тогда в силу леммы 7 она равномерно по t сходится в среднем к единственной функции $u(x,t)$, определенной рядом (35). Из доказательства теоремы 3 следует, что для обобщенного решения задачи (4)–(7) справедлива оценка (43), что и означает устойчивость такого решения. □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Коренев Б. Г. *Вопросы расчета балок и плит на упругом основании.* М.: Стройиздат, 1954. 232 с.
3. Коллатц Л. *Задачи на собственные значения с техническими приложениями.* М.: Наука, 1968. 503 с.
4. Бидерман В. Л. *Теория механических колебаний.* М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
5. Andrianov I., Awrejcewicz J., Danishevs'kyy V., Ivankov A. *Asymptotic Methods in the Theory of Plates with Mixed Boundary Conditions.* United Kingdom: John Wiley & Sons, 2014. doi: 10.1002/9781118725184.
6. Сабитов К. Б. *Уравнения математической физики.* М.: Физматлит, 2013. 352 с.
7. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука, 1969. 528 с.
8. Натансон И. П. *Теория функций вещественной переменной.* М.: Наука, 1974. 480 с.

Поступила в редакцию 06/II/2015;
в окончательном варианте — 26/III/2015;
принята в печать — 08/IV/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 311–324

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1406

MSC: 35G16

FLUCTUATIONS OF A BEAM WITH CLAMPED ENDS

K. B. Sabitov

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russian Federation.

Abstract

In this paper we study the initial problem for the equation of a beam with clamped ends. Uniqueness, existence and stability theorems are proved for the problem in the classes of regular and generalized solutions. Solution of the initial-boundary value problem is constructed in the form of a series in the system of eigenfunctions of one-dimensional spectral problem. We found the spectral problem eigenvalues as roots of the transcendental equation and the corresponding system of eigenfunctions. It is shown that the system of eigenfunctions is orthogonal and complete in L_2. On the basis of the completeness of the eigenfunctions the uniqueness theorem for the initial-boundary value problem for the equation of the beam is obtained. The generalized solution is defined as the limit of a sequence of regular solutions of the mean-square norm on the space variable.

Keywords: equation beams, initial-boundary value problem, spectral method, uniqueness, existence, series resistance.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1406

REFERENCES

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1966, 724 pp. (In Russian)
2. Korenev B. G. *Voprosy rascheta balok i plit na uprugom osnovanii* [Problems of Calculating Beams and Plates on Elastic Foundation]. Moscow, Stroiizdat, 1954, 232 pp. (In Russian)
3. Kollatts L. *Zadachi na sobstvennye znacheniia s tekhnicheskimi prilozheniiami* [Eigenvalue Problems with Engineering Applications]. Moscow, Nauka, 1968, 503 pp. (In Russian)
4. Biderman V. L. *Teoriia mekhanicheskikh kolebanii* [Theory of mechanical fluctuations]. Moscow, Vysshaia shkola, 1980, 408 pp. (In Russian)
5. Andrianov I., Awrejcewicz J., Danishevs'kyy V., Ivankov A. *Asymptotic Methods in the Theory of Plates with Mixed Boundary Conditions.* United Kingdom, John Wiley & Sons. doi: 10.1002/9781118725184.

Please cite this article in press as:
Sabitov K. B. Fluctuations of a beam with clamped ends, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 311–324. doi: 10.14498/vsgtu1406. (In Russian)

Author Details:
Kamil B. Sabitov (Dr. Phys. & Math. Sci.; sabitov_fmf@mail.ru), Professor, Dept. of Higher Mathematics.

6. Sabitov K. B. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit, 2013, 352 pp. (In Russian)
7. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka, 1969, 528 pp. (In Russian)
8. Natanson I. P. *Teoriia funktsii veshchestvennoi peremennoi* [Theory of Functions of a Real Variable]. Moscow, Nauka, 1974, 480 pp. (In Russian)

Received 06/II/2015;
received in revised form 26/III/2015;
accepted 08/IV/2015.