Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 4. С. 710–721
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1399

УДК 517.946

О ПРИМЕНЕНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ К ИЗУЧЕНИЮ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ*

Ж. Н. Тасмамбетов

Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова,
Казахстан, 030000, Актобе, пр. А. Молдагуловой, 34.

Аннотация

Показано, что введенная автором система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка является наиболее общей системой. Из данной системы можно вывести все системы, решениями которых являются гипергеометрические функций двух переменных со списка Горна и биортогональные системы многочленов Ш. Эрмита и П. Аппеля. При этом основным аппаратом исследования биортогональных многочленов двух переменных являются специальные функции двух переменных. Полученная система гипергеометрического типа позволяет осуществить единый подход к построению систем биортогональных многочленов. Установлены всевозможные особые кривые изучаемой системы. Существование регулярных решений установлено методом Фробениуса—Латышевой.

Ключевые слова: особые кривые, система гипергеометрического типа, биортогональные многочлены, условия совместности, подранг.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1399

Предварительные сведения. Обобщение классических ортогональных многочленов на случаи двух и более переменных привело к необходимости изучения так называемых биортогональных систем многочленов. Ш. Эрмит в 1865 г. рассмотрел две пары биортогональных систем многочленов по двум переменным, когда областями ортогональности являются вся плоскость или единичный круг. В 1881 г. П. Аппель ввел многочлены по двум переменным, биортогональные по треугольнику. Свойства многочленов Аппеля двух переменных и многочленов Эрмита по многим переменным изложены в монографии [2]. В этих исследованиях основным аппаратом являются обобщенные гипергеометрические функции двух и более переменных, где чаще всего находит применение гипергеометрическая функция Аппеля двух переменных $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y)$.

Образец для цитирования
Тасмамбетов Ж. Н. О применении специальных функций двух переменных к изучению ортогональных многочленов двух переменных // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 710–721. doi: 10.14498/vsgtu1399.

Сведения об авторе
Жаксылык Нурадинович Тасмамбетов (д.ф.-м.н.,проф.; tasmam@rambler.ru), профессор, каф. информатики и вычислительной техники.

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного автором на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

Определение. Гипергеометрическая функция $F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y)$ двух переменных x и y определяются с помощью ряда

$$F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y)=\sum_{m.n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_n(\beta')_n}{(\gamma)_m(\gamma')_n m!n!}x^m y^n. \tag{1}$$

Ряд (1) сходится абсолютно и равномерно в области $|x|+|y|<1$. Функция F_2 зависит от пяти действительных параметров α, β, β', γ, γ', а в (1) введены следующие обозначения:

$$(\alpha)_0=1,\quad (\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Известно [2], что гипергеометрические функции двух переменных являются решениями двух совместных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Так, функция Аппеля F_2 является решением системы

$$\begin{cases} x(1-x)Z_{xx}-xyZ_{xy}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]Z_x-\beta yZ_y-\alpha\beta Z=0,\\ y(1-y)Z_{yy}-xyZ_{xy}+[\gamma'-(\alpha+\beta'+1)y]Z_y-\beta' xZ_x-\alpha\beta' Z=0. \end{cases} \tag{2}$$

Целью данной работы является изучение этих систем и их решений в виде специальных функций двух переменных, раскрытие с единой точки зрения возможностей и применения при изучении ортогональных многочленов двух переменных.

1. Постановка задачи. Рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{cases} x^2p^{(0)}Z_{xx}+xyp^{(1)}Z_{xy}+xp^{(2)}Z_x+yp^{(3)}Z_y+p^{(4)}Z=0,\\ y^2q^{(0)}Z_{yy}+xyq^{(1)}Z_{xy}+xq^{(2)}Z_x+yq^{(3)}Z_y+q^{(4)}Z=0 \end{cases} \tag{3}$$

с коэффициентами вида

$$p^{(i)}=a_{00}^{(i)}+a_{10}^{(i)}x^k,\quad q^{(i)}=b_{00}^{(i)}+b_{01}^{(i)}y^k \tag{4}$$

где $i=0,1,2,3,4$; $a_{00}^{(i)}$, $b_{00}^{(i)}$, $a_{10}^{(i)}$ и $b_{01}^{(i)}$ — некоторые постоянные, а $Z=Z(x,y)$ — общая неизвестная.

Для достижения указанной цели требуется установить всевозможные особые кривые этой системы и изучить возможности построения ее решения вблизи этих особенностей в виде специальных функций двух переменных, а также показать их роль при построении ортогональных многочленов двух переменных.

Допустим, что согласно общей теории таких систем выполняются условия совместимости и так называемое условие интегрируемости $p^{(1)}q^{(1)}\neq p^{(0)}q^{(0)}$. При выполнении этих двух условий [3] система (3) с коэффициентами вида (4) имеет до четырех линейно независимых частных решений:

$$Z_j(x,y)=x^{\rho_j}y^{\sigma_j}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}C_{\mu,\nu}^{(j)}x^\mu y^\nu\qquad (C_{00}^{(j)}\neq 0,\ \ j=1,2,3,4), \tag{5}$$

где ρ_j, σ_j, $C^{(j)}_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,\dots)$ — неизвестные постоянные.

Следующая общая теорема позволяет установить существование четырех регулярных решений вблизи особенности $(0,0)$ в виде обобщенных степенных рядов двух переменных (5).

Теорема *Пусть для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида* (3), (4) *с регулярными особенностями* $(x=0, y=0)$ *выполнены следующие условия*:

1) *коэффициенты представимы сходящимися степенными рядами двух переменных*
$$p^{(j)}(x,y)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a^{(j)}_{\mu,\nu}x^{\mu}y^{\nu}, \quad q^{(j)}(x,y)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b^{(j)}_{\mu,\nu}x^{\mu}y^{\nu} \quad (j=0,1,2,3,4); \tag{6}$$

2) *система определяющих уравнений*
$$\begin{cases} f^{(1)}_{00}(\rho,\sigma)=a^{(0)}_{00}\rho(\rho-1)+a^{(1)}_{00}\rho\sigma+a^{(2)}_{00}\rho+a^{(3)}_{00}\sigma+a^{(4)}_{00}=0,\\ f^{(2)}_{00}(\rho,\sigma)=b^{(0)}_{00}\sigma(\sigma-1)+b^{(1)}_{00}\rho\sigma+b^{(2)}_{00}\rho+b^{(3)}_{00}\sigma+b^{(4)}_{00}=0 \end{cases} \tag{7}$$
относительно особенности $(0,0)$ *имеет простые пары корней* (ρ_j,σ_j) $(j=1,2,3,4)$, *не отличающиеся на целые числа.*

Тогда существует одна и только одна система, которая состоит из четырех аналитических функций $Z_j(x,y)$ $(j=1,2,3,4)$, *регулярных и тождественно удовлетворяющих системе* (3), (4) *с коэффициентами* (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы состоит из двух этапов. Сначала следует построить решения вида (5), а затем доказать сходимость этих рядов [4]. Коэффициенты (4) системы (3) являются частными случаями (6), поэтому теорема справедлива и для этого случая.

Общее решение [2] системы (3), (4) представляется в виде
$$Z(x,y)=C_1Z_1(x,y)+C_2Z_2(x,y)+C_3Z_3(x,y)+C_4Z_4(x,y) \tag{8}$$
и зависит от произвольных постоянных C_j $(j=1,2,3,4)$. Как и в обыкновенном случае, исследование производится вблизи особенностей $(0,0)$ и (∞,∞), а остальные случаи приводятся к ним. Основные сведения об особых кривых изучаемой системы приводятся в дальнейшем.

Для построения решения (5) применяется метод Фробениуса—Латышевой [4], где регулярность и иррегулярность особых кривых системы (3), (4) устанавливаются с помощью понятия ранга $p=k+1$ (k — подранг) и антиранга $m=-1-\lambda$ (λ — антиранг). Для систем с полиномиальными коэффициентами одновременно можно определить как величину подранга
$$k=\max\frac{\tau_l-\tau_0}{l}, \quad l=1,2$$
по наибольшим степеням независимых переменных x и y коэффициентов $p^{(i)}$ и $q^{(i)}$ $(i=0,1,2,3,4)$, так и величину антиподранга
$$\lambda=\min\frac{\tau_j-\tau_0}{j}, \quad j=1,2$$

по наименьшим степеням независимых переменных коэффициентов.

С помощью ранга и антиранга можно произвести классификацию особых кривых по виду заданных коэффициентов $p^{(i)}$ и $q^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$. Действительно, если одновременно ранг $p \leqslant 0$ и антиранг $m \leqslant 0$, то особенности $(0, 0)$ и (∞, ∞) регулярные и вблизи них можно построить регулярные решения. В данной работе мы в основном занимаемся изучением регулярных систем. Ряд теорем, обеспечивающих существование решения вида (5), приведены в работе [5].

2. Гипергеометрическая система. Во многих случаях непосредственное применение метода Фробениуса—Латышевой вызывает определенные затруднения. В таких случаях при построении решений системы (3), (4) большую роль играет преобразование

$$x^k = u, \quad y^k = \nu, \tag{9}$$

с помощью которого заданная система приводится к виду

$$\begin{aligned}
&u^2(a_{00}^{(0)} + a_{10}^{(0)}u)Z_{uu} + u\nu(a_{00}^{(1)} + a_{10}^{(1)}u)Z_{u\nu} + u\Big[\Big(a_{00}^{(0)}\frac{k-1}{k} + \frac{a_{00}^{(2)}}{k}\Big) + \\
&\qquad + \Big(a_{10}^{(0)}\frac{k-1}{k} + \frac{a_{10}^{(2)}}{k}\Big)\Big]Z_u + \frac{1}{k}\nu(a_{00}^{(3)} + a_{10}^{(3)}u)Z_\nu + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{k^2}(a_{00}^{(4)} + a_{10}^{(4)}u)Z = 0, \\
&\nu^2(b_{00}^{(0)} + b_{01}^{(0)}\nu)Z_{\nu\nu} + u\nu(b_{00}^{(1)} + b_{01}^{(1)}\nu)Z_{u\nu} + \nu\Big[\Big(b_{00}^{(0)}\frac{k-1}{k} + \frac{b_{00}^{(3)}}{k}\Big) + \\
&\qquad + \Big(b_{01}^{(0)}\frac{k-1}{k} + \frac{b_{01}^{(3)}}{k}\Big)\Big]Z_\nu + \frac{1}{k}u(b_{00}^{(2)} + b_{01}^{(2)}\nu)Z_u + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{k^2}(b_{00}^{(4)} + b_{01}^{(4)}\nu)Z = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Полученная система называется *системой гипергеометрического типа*. Это название оправдывается тем, что многие системы из списка Я. Горна [7], решениями которых являются известные гипергеометрические функции двух переменных, получаются как частные случаи этой системы. В частности, не трудно убедиться, что система (2), решением которой является функция Аппеля $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y)$, также является частным случаем системы (10). В работах [6, 8] показано, что системы Эрмита и Лежандра получаются как частные случаи системы (3), (4) и преобразование вида (9) приводит к системе вида (2), поэтому решения этих систем выражаются через гипергеометрическую функцию Аппеля $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y)$. Данная методика применима и для построения биортогональных многочленов Аппеля. Покажем это на конкретном примере.

Пример. При одних и тех же значениях коэффициентов из системы (3), (4) и (10) получим две системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$
\begin{aligned}
&x(1-x^2)Z_{xx}-x^2yZ_{xy}+\left[2\gamma-1-2\left(2\gamma+\gamma'-\alpha-n+\tfrac{1}{2}\right)x^2\right]Z_x-\\
&\qquad -2(\gamma+m)xyZ_y-4(\gamma+m)(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n)xZ=0,\\
&y(1-y^2)Z_{yy}-xy^2Z_{xy}+\left[2\gamma'-1-2\left(\gamma+2\gamma'-\alpha-m+\tfrac{1}{2}\right)y^2\right]Z_y-\\
&\qquad -2(\gamma'+n)xyZ_x-4(\gamma'+n)(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n)yZ=0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&u(1-u)Z_{uu}-u\nu Z_{u\nu}+[\gamma-(2\gamma+\gamma'-\alpha-n+1)u]Z_u-\\
&\qquad -(\gamma+m)\nu Z_\nu-(\gamma+m)(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n)Z=0,\\
&\nu(1-\nu)Z_{\nu\nu}-u\nu Z_{u\nu}+[\gamma'-(\gamma+2\gamma'-\alpha-m+1)\nu]Z_\nu-\\
&\qquad -(\gamma'+n)uZ_u-(\gamma'+n)(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n)Z=0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Легко проверить, что система (12) получена из системы (11) с помощью преобразования $x^2=u$, $y^2=\nu$, то есть с помощью преобразования (9) при $k=2$. Совместное изучение исходной системы (3), (4) и системы гипергеометрического типа (10) позволяет достичь постановленной цели и раскрыть новые свойства таких систем, связанных с установлением их особых кривых и построением решений конкретных систем с решениями в виде биортогональных многочленов двух переменных.

3. Об особых кривых. Изучение особых кривых систем вида (3), (4) начнем с рассмотрения конкретного примера (11) и (12).

`3.1. Об особых кривых в частном случае.` Для решения системы (11) приведем ее сначала с помощью преобразования (9) при $k=2$ к виду (12). Затем, учитывая сходство системы (12) с системой (2), построим ее решения, которые выражаются через функцию Аппеля F_2. Поскольку решения систем следует построить вблизи определенных особых кривых, установим сначала особые кривые этих систем. Особые кривые системы (11) определяются приравниванием к нулю коэффициентов при старших производных Z_{xx} и Z_{yy}, данном случае — при $x(1-x^2)=0$ и $y(1-y^2)=0$. Тогда пары $(0,0)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, $(0,\infty)$, $(\infty,0)$, $(-1,\infty)$, $(\infty,-1)$, $(1,\infty)$ являются особенностями системы (11).

С помощью аналогичных рассуждений можно установить, что система гипергеометрического типа (12) имеет следующие особенности: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,\infty)$, $(\infty,0)$, $(1,\infty)$, $(\infty,1)$ и (∞,∞), то есть происходит слияние особенностей и вместо шестнадцати особенностей после слияния получаются девять.

Известно, что в обыкновенном случае, после слияния двух регулярных особенностей снова получится регулярная особенность, а слияние более двух особенностей дает иррегулярную особенность [9]. В отличие от этого в случае системы дифференциальных уравнений в частных производных слияние четырех пар особенностей $(-1,-1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ и $(0,0)$ на плоскости снова дает регулярную особенность. В [7, p. 230] отмечается, что при работе с такими системами дифференциальных уравнений в частных производных возникают трудности двух типов. Во-первых, очень мало сведений о поведении решений в окрестности точек, в которых пересекаются более чем две особые кривые или в которых две особые кривые касаются. Во-вторых, исследованию препятствуют возникающие в большом количестве различные системы.

3.2. Об особых кривых общей системы. Вышеприведенные рассуждения справедливы и для систем (3), (4) и (10). В этом случае самый простой случай с особенностями, зависящими от значения k, получается при следующем наборе коэффициентов: $a_{00}^{(j)} = b_{00}^{(j)} = 1$, $a_{10}^{(j)} = b_{01}^{(j)} = -1$ $(j = 0, 1)$. Тогда все особенности общей системы можно охватить следующими двумя случаями:

а) при $k = 2m + 1$ имеем особенности $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$, $y = 0$, $y = 1$, $y = \infty$; всего можно составить девять пар особенностей, как для системы гипергеометрического типа (12);

б) при $k = 2m$ имеем особенности $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$, $x = \infty$, $y = 0$, $y = -1$, $y = 1$, $y = \infty$; всего можно составить шестнадцать пар особенностей, как для системы типа (11).

В зависимости от значения k в преобразованиях $x^k = u$, $y^k = \nu$ решения общей системы (3), (4) зависят от x^3, y^3; x^4, y^4; $\ldots$; x^k, y^k. Так, в частности, решения системы (11), полученные при $k = 2$, зависят от x^2, y^2. Подытоживая вышеприведенные рассуждения, можно сформулировать нижеследующие выводы.

1. Система дифференциальных уравнений (3) с коэффициентами вида (4) с помощью преобразования $x^k = u$, $y^k = \nu$ приводится к системе гипергеометрического типа (10).
2. Из исходной системы (3) при различных значениях k определяются k разных систем с решениями, зависящими от x^k и y^k.
3. Если k — четное число, то система (3) может иметь до шестнадцати пар особенностей в зависимости от значений коэффициентов $a_{00}^{(j)}$, $a_{10}^{(j)}$, $b_{00}^{(j)}$ и $b_{01}^{(j)}$ $(j = 0, 1)$. Если k — нечетное число, то система (3) имеет до девяти пар особенностей. Если коэффициенты $a_{10}^{(j)}$ и $b_{01}^{(j)}$ $(j = 0, 1)$ неотрицательные числа и k — четное, то система (4) имеет регулярную особенность $(0, 0)$.
4. После преобразования $x^k = u$, $y^k = \nu$ происходит слияние пар особенностей.

Регулярность и иррегулярность приведенных пар особенностей систем (10) и (12) устанавливается с помощью простого признака [5].

Таким образом, нами подробно изучены особенности общей системы (3), (4), конкретной системы (11) и гипергеометрических систем (10) и (12), полученные из них с помощью преобразования (9). Согласно общей теории систем вида (3), (4), вблизи каждой из особенностей должны существовать до четырех линейно независимых частных решений. Тогда система, имеющая 16 пар особенностей, должна иметь вблизи различных пар особенностей всего до 64-х линейно независимых частных решений. Однако не всегда это удается, поскольку во многих системах коэффициенты $C_{\mu,\nu}^{(j)}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots;$ $i = 0, 1, 2, 3, 4)$ решения (5) определяются неоднозначно.

4. Важные частные случаи. Перейдем к рассмотрению ряда интересных частных случаев, получающихся при различных значениях постоянной k.

4.1. Система типа Эйлера. Пусть $k = 0$, тогда из (3), (4) получим *си-*

стему типа Эйлера. Особенностями системы являются пары $(0,0)$, $(0,\infty)$, $(\infty,0)$ и (∞,∞). Вблизи каждой из этих особенностей она может иметь до четырех линейно независимых частных решений $Z_i(x,y)$ $(i=1,2,3,4)$, представленных в виде произведения двух элементарных функций относительно переменных x и y.

4.2. Системы гипергеометрического типа. При $k=1$ система (3) с коэффициентами вида (4) и система гипергеометрического типа (10), полученная из (3), (4) с помощью преобразования (9), совпадают. Многие из 34-х гипергеометрических функции двух переменных из списка Горна [7], применяемые при изучении ортогональных многочленов двух переменных, получаются как частные случаи этих систем. Действительно, система (2) относится к системе гипергеометрического типа (10). Ее ранг p и антиранг m удовлетворяют условиям $p\leqslant 0$, $m\leqslant 0$. Система определяющих уравнений (7) относительно особенности $(0,0)$ в этом случае имеет четыре пары корней:

$$\begin{gathered}(\rho_1=0,\sigma_1=0);\quad (\rho_2=1-\gamma,\sigma_1=0);\\ (\rho_1=0,\sigma_2=1-\gamma');\quad (\rho_2=1-\gamma,\sigma_2=1-\gamma').\end{gathered}$$

Тогда, используя метод Фробениуса—Латышевой [4], можно построить четыре линейно независимые регулярные решения системы (2):

$$\begin{aligned}&Z_1(x,y)=F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y),\\ &Z_2(x,y)=x^{1-\gamma}F_2(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,\beta',2-\gamma,\gamma';x,y),\\ &Z_3(x,y)=y^{1-\gamma}F_2(\alpha+1-\gamma',\beta+1-\gamma',\gamma,2-\gamma';x,y),\\ &Z_4(x,y)=x^{1-\gamma}y^{1-\gamma}F_2(\alpha-2-\gamma-\gamma',\beta+1-\gamma,\beta'+1-\gamma',2-\gamma,2-\gamma';x,y).\end{aligned}$$

4.3. Системы, связанные с ортогональными многочленами двух переменных. Пусть $k=2$, тогда из (3), (4) можно выводить все системы, решениями которых являются ортогональные многочлены двух переменных. Действительно, решением системы (12) является многочлен

$$\begin{gathered}J_{mn}(\alpha,\gamma,\gamma';x,y)=(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha}\frac{x^{1-\gamma}y^{1-\gamma}}{(\gamma)_m(\gamma')_n}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\times\\ \times\left[x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}\right],\end{gathered}\tag{13}$$

введенный в 1881 г. П. Аппелем [2]. Многочлен (13) является аналогом многочлена Якоби и рассматривается в треугольной области

$$G=\{(x,y):\ \ x>0,\ \ y>0,\ \ x+y<1\}$$

с весовой функцией

$$h(x,y)=x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'},$$

где параметры весовой функции удовлетворяют условиям

$$\gamma>0,\ \ \gamma'>0,\ \ \alpha>\gamma+\gamma'-1.$$

4.3.1. Построение многочленов Аппеля. Многочлен (13) является одним из решений системы (12). Построим вблизи особенности $(0,0)$ линейно независимые регулярные решения системы (12). Сравнение систем (2) и (12) показывает, что если ввести обозначения

$$\alpha = \gamma + \gamma' - \alpha - m - n, \;\; \beta = \gamma + m, \;\; \beta' = \gamma' + n,$$

то система гипергеометрического типа (12) приводится к виду (2). На основании результатов предыдущего пункта ее линейно независимые частные решения выражаются через функцию F_2 относительно переменных u и ν:

$$\begin{aligned}
Z_1(u,\nu) &= F_2(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n, \gamma+m, \gamma'+n, \gamma, \gamma'; u, \nu),\\
Z_2(u,\nu) &= u^{1-\gamma} F_2(\gamma'-\alpha-m-n+1, m+1, \gamma'+n, 2-\gamma, \gamma'; u, \nu),\\
Z_3(u,\nu) &= \nu^{1-\gamma'} F_2(\gamma-\alpha-m-n+1, \gamma+1-\gamma', \gamma, 2-\gamma'; u, \nu),\\
Z_4(u,\nu) &= u^{1-\gamma}\nu^{1-\gamma'} F_2(-\alpha-m-n-2, m, n, 2-\gamma, 2-\gamma'; u, \nu).
\end{aligned}$$

Тогда с учетом преобразования $x^k = u$, $y^k = \nu$ частные решения исходной системы (11) представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
Z_1(x,y) &= F_2(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n, \gamma+m, \gamma'+n, \gamma, \gamma'; x^2, y^2),\\
Z_2(x,y) &= x^{2(1-\gamma)} F_2(\gamma'-\alpha-m-n+1, m+1, \gamma'+n, 2-\gamma, \gamma'; x^2, y^2),\\
Z_3(x,y) &= y^{2(1-\gamma')} F_2(\gamma-\alpha-m-n+1, \gamma+1-\gamma', \gamma, 2-\gamma'; x^2, y^2),\\
Z_4(x,y) &= x^{2(1-\gamma)} y^{2(1-\gamma')} F_2(-\alpha-m-n-2, m, n, 2-\gamma, 2-\gamma'; x^2, y^2).
\end{aligned}$$

Выпишем решение (8) системы (11):

$$\begin{aligned}
Z(x,y) = C_1 F_2(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n, \gamma+m, \gamma'+n, \gamma, \gamma'; x^2, y^2)+\\
+ x^{2(1-\gamma)} F_2(\gamma'-\alpha-m-n+1, m+1, \gamma'+n, 2-\gamma, \gamma'; x^2, y^2)+\\
+ y^{2(1-\gamma')} F_2(\gamma-\alpha-m-n+1, \gamma+1-\gamma', \gamma, 2-\gamma'; x^2, y^2)+\\
+ x^{2(1-\gamma)} y^{2(1-\gamma')} F_2(-\alpha-m-n-2, m, n, 2-\gamma, 2-\gamma'; x^2, y^2).
\end{aligned}$$

Здесь C_j $(j = 1,2,3,4)$ — произвольные постоянные.

4.3.2. Многочлены Аппеля F_{mn} и E_{mn}. Пусть $\alpha = \gamma + \gamma'$. Тогда система (12) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned}
&u(1-u)Z_{uu} - u\nu Z_{u\nu} + [\gamma - (\gamma - n + 1)u]Z_u -\\
&\qquad -(\gamma+m)\nu Z_\nu + (m+n)(\gamma+m)Z = 0,\\
&\nu(1-\nu)Z_{\nu\nu} - u\nu Z_{u\nu} - (\gamma'+n)uZ_u +\\
&\qquad +[\gamma' - (\gamma' - m + 1)\nu]Z_\nu + (m+n)(\gamma'+n)Z = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Используя вышеприведенный метод, построим решение системы (14). Эта система является системой гипергеометрического типа (10) и при

$$\alpha = -(m+n), \;\; \beta = \gamma + m, \;\; \beta' = \gamma' + n$$

приводится к системе (2), линейно независимые частные решения которой выражаются через функцию F_2:

$$\begin{aligned}
&Z_1(u,\nu) = F_2(-m-n,\gamma+m,\gamma'+n,\gamma,\gamma';u,\nu),\\
&Z_2(u,\nu) = u^{1-\gamma}F_2(-m-n-\gamma+1,m+1,\gamma'+n,2-\gamma,\gamma';u,\nu),\\
&Z_3(u,\nu) = \nu^{1-\gamma'}F_2(-m-n-1-\gamma',m+1-\gamma',\gamma,2-\gamma';u,\nu),\\
&Z_4(u,\nu) = u^{1-\gamma}\nu^{1-\gamma'}F_2(-m-n-2-\gamma-\gamma',m+1,n+1,2-\gamma,2-\gamma';u,\nu).
\end{aligned} \tag{15}$$

Первое решение $Z_1(u,\nu)$ в обозначениях x и y дает [10, p. 259] введенный в 1882 г. П. Аппелем многочлен

$$\begin{aligned}
F_{mn}(\gamma,\gamma';x,y) &= J_{mn}(\gamma+\gamma',\gamma,\gamma';x,y) =\\
&= \frac{x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}}{(\gamma)_m(\gamma')_n}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\left[x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)\right] =\\
&= F_2(-m-n,\gamma+m,\gamma'+n,\gamma,\gamma';x,y).
\end{aligned}$$

Используя частные решения (15) системы (14), общее решение (8) можно представить, как в предыдущем случае. Аналогичным образом можно вывести систему дифференциальных уравнений в частных производных, которую удовлетворяет введенный П. Аппелем второй многочлен

$$E_{mn}(\gamma,\gamma';x,y) = F_2(\gamma+\gamma'+m+n,-m,-n,\gamma,\gamma';x,y).$$

Отсюда легко заметить, что полученная система гипергеометрического типа к виду (3) приводится с помощью замены параметров

$$\alpha = \gamma+\gamma'+m+n,\ \ \beta=-m,\ \ \beta'=-n.$$

Выводы. Таким образом, мы убедились, что введенная нами система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка является наиболее общей системой, из которой можно выводить все системы, решениями которой являются гипергеометрические функции двух переменных из списка Горна и биортогональные системы многочленов Ш. Эрмитта и П. Аппеля. При этом основным аппаратом исследования биортогональных многочленов двух переменных являются специальные функции двух переменных, в частности функция Аппеля F_2. Система гипергеометрического типа (10), полученная из общей системы (3), (4) с помощью преобразования (9), позволила осуществить единый подход к построению систем биортогональных многочленов. Существование регулярных решений установлено методом Фробениуса—Латышевой.

В данной работе построением регулярных решений в основном занимались вблизи особенности $(0,0)$. Построение систем биортогональных многочленов вблизи особенности (∞,∞) осуществляется с помощью функций Аппеля F_3. В [7] отмечается, что полученные в этом случае ряды также можно выразить через F_2 и они встречаются в исследованиях по гиперсферическим гармоникам.

ORCID
Жаксылык Нурадинович Тасмамбетов: http://orcid.org/0000-0002-7832-3622

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тасмамбетов Ж. Н. О применении специальных функций двух переменных к изучению ортогональных многочленов многих переменных / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 349–350.
2. Appell P., Kampé de Fériet J. *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques: polynomes d'Hermite*. Paris: Gauthier-Villars, 1926.
3. Sternberg W. Über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen // *Math. Ann.*, 1920. vol. 81, no. 2. pp. 119–186. doi: 10.1007/BF01564865.
4. Тасмамбетов Ж. Н. *Построение решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с регулярной особенностью обобщенным методом Фробениуса–Латышевой*: Препр./ Киев: АН УССР Институт математики: 91.29, 1991. 44 с.
5. Тасмамбетов Ж. Н. Об иррегулярных особых кривых систем типа Уиттекера // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. №4(33). С. 25–33. doi: 10.14498/vsgtu1239.
6. Тасмамбетов Ж. Н. Об одной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // *Укр. мат. журн.*, 1992. Т. 44, №3. С. 427–431.
7. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*. vol. 1 / Bateman Manuscript Project. New York: McGraw-Hill Book Co., 1953. xxvi+302 pp., Retrieved from http://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140123-104529738 (August 08, 2015).
8. Тасмамбетов Ж. Н. Многочлены Лежандра двух переменных как решения приведенной системы в частных производных / *Проблемы оптимизации сложных систем*: Труды X Международной Азиатской школы-семинара, Часть II. Кыргызстан: Иссык-Куль Аврора, 2014. С. 119–186.
9. Ince E. L. *Ordinary differential equations*. New York: Dover Pub., 1956.
10. Erdélyi A.; Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*. vol. II / Bateman Manuscript Project. New York: McGraw-Hill Book Co., 1953. xvii+396 pp., Retrieved from http://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140123-104529738 (August 08, 2015).

Поступила в редакцию 11/I/2015;
в окончательном варианте — 27/V/2015;
принята в печать — 08/VIII/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 710–721

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1399

MSC: 33C65, 42C05

ON THE USAGE OF SPECIAL FUNCTIONS OF TWO VARIABLES FOR STUDYING OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS OF TWO VARIABLES*

Zh. N. Tasmambetov

Aktobe Regional State University named after K. Zhubanov,
34, A. Moldagulova st., Aktobe, 030000, Kazakhstan.

Abstract

It is shown that the second order partial differential equations system defined by author is the most general system. It is possible to get all systems, solutions of which are hypergeometric functions of two variables from a Horn list and biorthogonal systems of Hermite and Appel polynomials. In this case the main apparatus of biorthogonal polynomials of two variables study is special functions of two variables. The resulting system of hypergeometric type allows us to use unified approach for the construction of biorthogonal systems of polynomials. All possible singular curves of the studied system are set. The existence of regular solutions is set by Frobenius–Latysheva method.

Keywords: singular curves, hypergeometric type system, biorthogonal polynomials, consistency conditions, underrank.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1399

ORCID
Zhaksylyk N. Tasmambetov: http://orcid.org/0000-0002-7832-3622

REFERENCES

1. Tasmambetov Zh. N. On the usage of special functions of two variables for studying of orthogonal polynomials of two variables, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 349–350 (In Russian).
2. Appell P., Kampé de Fériet J. *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques: polynomes d'Hermite*. Paris, Gauthier-Villars, 1926.

Please cite this article in press as:
Tasmambetov Zh. N. On the usage of special functions of two variables for studying of orthogonal polynomials of two variables, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 710–721. doi: 10.14498/vsgtu1399. (In Russian)

Author Details:
Zhaksylyk N. Tasmambetov (Dr. Phys. & Math. Sci.; tasmam@rambler.ru), Professor, Dept. of Computer Science and Computing Technology.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

3. Sternberg W. Über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, 1920, vol. 81, no. 2, pp. 119–186. doi: 10.1007/BF01564865.
4. Tasmambetov Zh. N. *The construction of solutions of the system of differential equations with a regular feature by Frobenius–Latysheva generalized method*, Preprint /Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Mathematics Institute: 91.29, Kiev, 1991, 44 pp. (In Russian)
5. Tasmambetov Zh. N. On irregular singular curves of Whittaker type systems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2013, no. 4(33), pp. 25–33 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1239.
6. Tasmambetov Zh. N. A Certain system of second-order partial differential equations, *Ukrainian Mathematical Journal*, 1992, vol. 44, no. 3, pp. 371–375. doi: 10.1007/BF01063140.
7. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*, vol. 1, Bateman Manuscript Project. New York, McGraw-Hill Book Co., 1953, xxvi+302 pp., Retrieved from http://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140123-104529738 (August 08, 2015).
8. Tasmambetov Zh. N. Legendre polynomials of two variables as solutions of the reduced system of partial differential equations, *Problemy optimizatsii slozhnykh sistem [Optimization Problems of Complex Systems]*, Proc. of the 10th International Asian Summer School, Part II. Kyrgyzstan, Issyk-Kul' Avrora, 2014, pp. 119–186 (In Russian).
9. Ince E. L. *Ordinary differential equations.* New York, Dover Pub., 1956.
10. Erdélyi A.; Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*, vol. II, Bateman Manuscript Project. New York, McGraw-Hill Book Co., 1953, xvii+396 pp., Retrieved from http://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140123-104529738 (August 08, 2015).

Received 11/I/2015;
received in revised form 27/V/2015;
accepted 08/VIII/2015.