Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 2. С. 325–340
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1413

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.3

ОБЪЕКТИВНЫЕ РОТАЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ ТЕРМОУПРУГИХ ЛАГРАНЖИАНОВ*

В. А. Ковалев[1]**, *Ю. Н. Радаев***[2]

[1] Московский городской университет управления Правительства Москвы, Россия, 107045, Москва, ул. Сретенка, 28.
[2] Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

В представляемой работе приводится построение полной системы независимых ротационно-инвариантных функциональных аргументов для лагранжиана нелинейного микрополярного (микроморфного) термоупругого континуума второго типа, который включает тензор конечной деформации Коши—Грина, температурное смещение, референциальный градиент температурного смещения, три вектора экстрадеформации и три несимметричных тензора экстрадеформации второго ранга. Дополнительные (экстра) реперы, связанные с микроэлементами, предполагаются нежесткими, что допускает наиболее общую аффинную экстрадеформацию микроэлементов континуума. Исходя из принципа наименьшего действия Гамильтона получены 4-ковариантные уравнения термоупругого поля в микрополярном континууме в канонической форме Эйлера—Лагранжа. Сформулированы дифференциальные и функциональные условия ротационной инвариантности плотности действия. Последние затем используются с целью поиска ротационно-инвариантных функциональных аргументов лагранжиана. Найдена система независимых ротационно-инвариантных функциональных аргументов лагранжиана. Дается формальное доказательство ее полноты. Построены удовлетворяющие принципу объективности формы определяющих уравнений гиперболического микрополярного термоупругого континуума, соответствующие ротационно-инвариантному лагранжиану.

Образец для цитирования
Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Объективные ротационно-инвариантные формы термоупругих лагранжианов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 2. С. 325–340. doi: 10.14498/vsgtu1413.

Сведения об авторах
Владимир Александрович Ковалев (д.ф.-м.н., проф.; vlad_koval@mail.ru; автор, ведущий переписку), профессор, каф. прикладной математики и аналитической поддержки принятия решений.
Юрий Николаевич Радаев (д.ф.-м.н.; radayev@ipmnet.ru), ведущий научный сотрудник, лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела.

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного авторами на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

Ключевые слова: термоупругость, микроструктура, действие, переменная состояния, термодинамический базис, ротационная инвариантность, принцип объективности, тензор экстрадеформации, определяющее уравнение.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1413

1. Вводные замечания. Объективные термодинамические базисы. Нелинейные термомеханические модели сложных континуумов с микроструктурой, в частности микрополярные среды и метаматериалы, часто обладающие аномальными термомеханическими свойствами, в решающей степени определяются термодинамическими параметрами состояния, которые формируются из независимых объективных (т.е. выдерживающих повороты эйлеровой пространственной координатной системы в трехмерном пространстве) скалярных, векторных и тензорных переменных, определяющих термодинамическое состояние микроэлемента. Подобные системы термодинамических параметров состояния мы будем называть также термодинамическими базисами. Термодинамический базис должен обладать необходимыми свойствами полноты относительно тензорных мер состояния континуума.

Для решения проблем анализа и синтеза материалов с заданными свойствами существенна развитая иерархия математических моделей. Именно в связи с этим обстоятельством по-прежнему актуальны методы построения и исследования математических моделей сред с микроструктурой. Один из них состоит в обобщении континуальной модели, выражающемся в расширении понятия представительного объема среды (RVE) и учета дополнительных (экстра) внутренних степеней свободы — микроповоротов и аффинных деформаций мезообьема (континуум Коссера[1], микроморфная среда).

Значительный прогресс в области моделирования сложных термомеханических систем связан прежде всего с тем, что в качестве базисных переменных допускаются не только термодинамические переменные состояния (так называемые «медленные переменные»), ассоциированные с термическими и мироструктурными свойствами континуума, но и их референциальные градиенты («быстрые переменные»). При этом переменные состояния и их градиенты считаются функционально независимыми. Именно следуя по этому пути, удается создать новую термомеханику континуума с гиперболическими уравнениями транспорта тепла. Последнее обстоятельство вполне соответствует новой гиперболической парадигме развития теории и механики континуума [2, 3].

Современная механика и физика сплошных деформируемых сред в целом ряде важных прикладных направлений должна развиваться только на основе теоретико-полевого подхода; только в этом случае обеспечиваются физически приемлемые уравнения. Это обстоятельство характерно для сложных континуумов с экстрастепенями свободы, приписываемыми микроэлементам; в частности, для микрополярных сред, когда допустимы дополнительные повороты и аффинные деформации микроэлементов. Теории поля обладают одним весьма важным аналитическим качеством — возможностью их систе-

[1] Необходимо заметить, что континуум Коссера с «нежестким» репером микрополярных директоров, по существу, предполагает возможной произвольную аффинную деформацию микроэлемента и поэтому может трактоваться и как микроморфный континуум. Такие среды мы будем также называть микрополярными.

матического вывода из одного вариационного функционала. Преимущества теоретико-полевой точки зрения в механике микрополярных континуумов убедительно продемонстрированы в статье [4]. Важными элементами теоретико-полевого подхода являются также ковариантность дифференциальных уравнений поля и наличие вариационных симметрий поля. Последние позволяют находить законы сохранения, которые выступают в роли «первых интегралов» дифференциальных уравнений поля.

Классические теории поля (см., например, монографии [5,6]) основываются на предположении о том, что непрерывное физическое поле математически представляется некоторым интегральным функционалом $\Im$ (действием):

$$\Im = \int \mathscr{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \, \dots, X^\beta) d^4 X.$$

Здесь характерная для теорий поля символика имеет следующий смысл: $\mathscr{L}$ — «естественная» плотность лагранжиана (плотность действия); φ^k — упорядоченный массив физических полевых переменных; X^β $(\beta = 1, 2, 3{,}4)$ — пространственно-временные координаты.

В полевых теориях аргументы лагранжиана (определяющие переменные)

$$\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots$$

предполагаются функционально независимыми, образующими термодинамический базис. Элементы термодинамического базиса (термодинамические переменные состояния) разделяются на «медленные» и «быстрые». К первой категории относятся переменные φ^k, ко второй — их градиенты $\partial_\alpha \varphi^k$, $\partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots$.

Согласно принципу наименьшего действия, действительное поле реализуется таким образом, что действие оказывается экстремальным, т.е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^k:

$$\delta \Im = 0.$$

Здесь *не подвергаются* варьированию пространственно-временные координаты X^β и 4-область интегрирования.

Стационарность действия (при произвольных допустимых вариациях поля) необходимо влечет уравнения Эйлера—Лагранжа (дифференциальные уравнения поля):

$$\mathscr{E}_k(\mathscr{L}) \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \ldots = 0.$$

Последовательное применение теоретико-полевого подхода в механике континуума приводит к естественным формулировкам определяющих уравнений. Задание плотности действия позволяет однозначно сформулировать определяющие уравнения континуума, причем сразу же в ковариантной форме, без всякого дополнительного конструирования. То же самое касается соотношений совместности сильных разрывов на волновых поверхностях. Однако дополнительные рассмотрения все же необходимы, если вести речь об объективизации независимых функциональных аргументов плотности действия. Переход к ротационно-инвариантным функциональным аргументам лагранжиана наряду с требованием галилеевой трансляционной инвариантности окончательно определяет его общую форму и соответствующие общие формы объективных определяющих уравнений.

В представленной работе исходя из принципа наименьшего действия Гамильтона получены 4-ковариантные уравнения термоупругого поля в микрополярном континууме с «нежестким» репером ассоциированных директоров в канонической форме Эйлера—Лагранжа. Сформулированы дифференциальные и функциональные условия ротационной инвариантности плотности действия. Последние затем используются с целью поиска ротационно-инвариантных функциональных аргументов лагранжиана. Найдена система независимых ротационно-инвариантных функциональных аргументов лагранжиана. Дается формальное доказательство ее полноты. Построены удовлетворяющие принципу объективности формы определяющих уравнений гиперболического микрополярного термоупругого континуума, соответствующие ротационно-инвариантному лагранжиану.

2. Полевая теория гиперболического микрополярного термоупругого континуума с «нежестким» репером ассоциированных директоров. В теориях микрополярных континуумов (см., например, [4]) произвольная «конечная» деформация континуума, представляемая чисто геометрическим преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \tag{1}$$

положения $\mathbf{X}$ отсчетной конфигурации в соответствующее актуальное место $\mathbf{x}$ пространства, сопровождается экстрадеформацией, проявляющейся в форме нарушений взаимной ориентации и метрических характеристик системы трех пространственных полярных некомпланарных d-векторов $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$, связанных с микроэлементом:

$$\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}(\mathbf{X}, t). \tag{2}$$

Сделаем одно важное замечание. Индивидуальные точки континуума в механике континуума представляются специальной переменной $\boldsymbol{\xi}$, которая, в свою очередь, идентифицируется с помощью координат ξ^α (так называемые материальные координаты). Референциальная координата $\mathbf{X}$ всегда взаимно однозначно связана с материальной переменной $\boldsymbol{\xi}$, поэтому референциальную переменную $\mathbf{X}$ можно рассматривать как материальную и попросту отождествить переменные $\mathbf{X}$ и $\boldsymbol{\xi}$. То же самое относится к координатам X^α и ξ^α.

Переменные $\mathbf{X}$ и $\mathbf{x}$ (и позиционные координаты X^α, x^j) выступают как соответственно лагранжева (отсчетная, референциальная) и эйлерова (пространственная) переменные, если воспользоваться стандартной терминологией механики континуума. С этими переменными связаны метрики: отсчетная метрика ${}^{\backprime}g_{\alpha\beta}$ и пространственная метрика g_{ij}. Конвективная (сопутствующая) метрика характеризуется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ и, в отличие от ${}^{\backprime}g_{\alpha\beta}$ и g_{ij}, определяется деформацией (1).

Как ясно из предложенных обозначений, эйлеровы пространственные индексы всегда будут обозначаться латинскими буквами, греческие буквы всегда будут указывать на отсчетные или сопутствующие индексы. Обратным штрихом (backprime) слева от символа будут снабжаться величины, ассоциированные с референциальным состоянием. Так, например,

$${}^{\backprime}\mathbf{x} = \mathbf{X}.$$

В такого рода равенствах латинский индекс у координаты x^j трансформируется в греческий. Поэтому референциальное положение d-векторов указывается компонентами

$$ {}^{\backprime}\underset{\mathfrak{a}}{d}^{\alpha} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3). $$

Следуя известным схемам построения математических теорий континуумов, введем градиент «конечной» деформации

$$ \partial_\alpha x^j \qquad (j, \alpha = 1, 2, 3) $$

и соответствующий якобиан

$$ J = \det \left(\partial_\alpha x^j\right). $$

Дисторсия, как хорошо известно, характеризует аффинную деформацию элемента континуума. Она никогда не вырождается, поэтому якобиан деформации J сохраняет свой знак.

Конвективная метрика вычисляется с помощью градиента деформации согласно формуле

$$ g_{\alpha\beta} = g_{ij} \left(\partial_\alpha x^i\right) \left(\partial_\beta x^j\right) $$

и в силу своего определения ротационно-инвариантна (объективна) при произвольных поворотах эйлеровой координатной системы.

Применяя теоретико-полевой подход, примем лагранжевы переменные X^α $(\alpha = 1, 2, 3)$, дополненные четвертой временной координатой, в качестве пространственно-временных координат. Эйлеровы переменные x^j $(j = 1, 2, 3)$ представляют собой физические поля. То же самое относится к системе d-векторов $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$. Но они классифицируются нами как экстраполевые (сверх переменных x^j) переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью контравариантных пространственных компонент $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3;$ $j = 1, 2, 3)$. С теоретико-полевой точки зрения наличие микроструктуры приводит лишь к увеличению числа полевых переменных и, возможно, повышению максимального порядка дифференцирований в «естественной» плотности лагранжиана.

«Тонкая» (fine) микроструктура континуума представляется экстраполями контравариантных тензоров (d-тензоров) сколь угодно высоких рангов

$$ \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \ldots} \qquad (\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots). $$

Экстрадеформация, обусловленная наличием «тонкой» микроструктуры, математически описывается отображениями, подобными (2).

В качестве основной термической полевой переменной примем температурное смещение ϑ, которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных лагранжевых переменных) от абсолютной температуры θ. Именно такой подход характерен для теоретико-полевых формулировок термомеханики [7, 8].

Перечислим далее все определяющие переменные термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой. Помимо переменных x^j и ϑ, к ним относятся

– градиент деформации $\partial_\alpha x^j$ $(j, \alpha = 1, 2, 3)$;
– d-векторы $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ вместе с их референциальными градиентами $\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3)$;
– d-тензоры $\underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}$ $(\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots;\ j_1, j_2, \ldots = 1, 2, 3)$ и их референциальные градиенты $\partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}$ $(\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots;\ \alpha = 1, 2, 3;\ j_1, j_2, \ldots = 1, 2, 3)$;
– референциальный градиент температурного смещения $\partial_\alpha \vartheta$ $(\alpha = 1, 2, 3)$;
– скорость температурного смещения $\partial_4 \vartheta$.

В терминах отсчетных переменных X^α $(\alpha = 1, 2, 3)$, эйлеровых переменных x^j $(j = 1, 2, 3)$, экстраполевых d-переменных и температурного смещения ϑ «естественная» плотность действия (лагранжиан) в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии должна иметь форму

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\big(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j, \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1 j_2 \cdots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \partial_\alpha \vartheta\big). \tag{3}$$

Более специальная форма получается, если рассматривать плотность действия как разность плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{ij} \overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{J}} \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^i \underset{\mathfrak{b}}{\dot{d}}^j + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} \sum_{\kappa} g_{j_1 k_1} g_{j_2 k_2} \cdots \underset{\kappa}{\overset{\mathfrak{cd}}{\mathfrak{J}}} \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1 j_2 \cdots} \underset{\mathfrak{d}}{\dot{d}}^{k_1 k_2 \cdots} \cdots -$$

$$- \psi\big(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \vartheta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \partial_\alpha \vartheta\big).$$

Здесь точкой обозначается частное дифференцирование по времени ∂_4 при постоянных лагранжевых координатах X^α; ρ_{R} — референциальная плотность; $\overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{J}}$, $\underset{\kappa}{\overset{\mathfrak{cd}}{\mathfrak{J}}}$ — тензоры инерции микроэлемента.

Вариационный интеграл термоупругого действия в силу указанной формулой (3) плотности действия будет иметь следующий вид:

$$\mathfrak{S} = \int \mathscr{L}(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j, \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1 j_2 \cdots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \partial_\alpha \vartheta) d^4 X$$
$$(\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ \mathfrak{c} = 1, 2, 3,\ \ldots;\ \alpha,\ \beta = 1, 2, 3;\ j, j_1, j_2, \ldots = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Соответствующие вариационному интегралу (4) и принципу наименьшего действия связанные уравнения поля получаются в ковариантной форме и распадаются на следующие четыре группы:

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^j} \qquad (\alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3),\\
&\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j = 0 \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3),\\
&\partial_\alpha \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot\cdot\ldots}_{\cdot j_1 j_2 \ldots} + \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{A}}_{j_1 j_2 \ldots} - \partial_4 \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{Q}}_{j_1 j_2 \ldots} = 0\\
&(\mathfrak{c} = 1, 2, 3,\ \ldots;\ \alpha = 1, 2, 3;\ j_1, j_2, \ldots = 1, 2, 3)\\
&\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vartheta} \qquad (\alpha = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{5}$$

Лагранжев полевой формализм исключительно удобен тем, что *определяющие* уравнения континуума выступают просто как обозначения для полевых частных производных, которые вводятся для записи дифференциальных уравнений поля (5):

$$
\begin{aligned}
&P_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^j}, \quad \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^j}, \quad \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{Q}}_{j_1 j_2 \cdots} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\underset{\mathfrak{c}}{d}}{}^{j_1 j_2 \cdots}}, \\
&S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}, \quad \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j)}, \quad \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot\cdot\cdots}_{\cdot j_1 j_2 \cdots} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2 \cdots})}, \\
&\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j}, \quad \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{A}}_{j_1 j_2 \cdots} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2 \cdots}}, \quad s = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\vartheta}}, \quad j^\alpha_{\mathrm{R}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \vartheta)}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

В приведенных выше определяющих уравнениях (6) приняты следующие обозначения: P_j — обобщенный импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы; $\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j$, $\overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{Q}}_{j_1 j_2 \cdots}$ — обобщенные экстраимпульсы, соответствующие дополнительным (в том числе ротационным) степеням свободы; $S^{\alpha\cdot}_{\cdot j}$ — первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа; $\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j}$, $\overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot\cdot\cdots}_{\cdot j_1 j_2 \cdots}$ — «первые» тензоры экстранапряжений; $\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j$, $\overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{A}}_{j_1 j_2 \cdots}$ — обобщенные силы–моменты, сопряженные экстраполевым переменным $\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$), $\underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2 \cdots}$ ($\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots$; $j_1, j_2, \ldots = 1, 2, 3$); s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии); j^α_{R} — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии).

Полевое уравнение в последней строке (5) выражает баланс энтропии. Если плотность действия не содержит явных вхождений температурного смещения, то производство энтропии будет равно нулю. Таким образом, уравнение транспорта тепла будет иметь гиперболический аналитический тип так же, как это имеет место в гиперболической термоупругости [6].

Рассмотрим важный и сравнительно простой случай, когда параметрами микрострукутры являются только d-векторы $\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$), не подчиняющиеся никаким дополнительным ограничениям. В этом случае система дифференциальных уравнений поля (5) будет иметь следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^j} \qquad (\alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3), \\
&\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j = 0 \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3), \\
&\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vartheta} \qquad (\alpha = 1, 2, 3).
\end{aligned}
$$

3. Объективные ротационно-инвариантные формы лагранжианов. «Естественная» плотность действия в форме (3) пока еще не позволяет вести речь о её объективности в том смысле, что в разных эйлеровых координатных системах эта форма будет сохраняться. Ясно, что вывод объективных форм лагранжиана [9] представляет собой первый и весьма важный шаг на пути построения объективных форм определяющих уравнений, первоначально задаваемых уравнениями (6). Ограничимся случаем, когда параметрами микроструктуры являются только d-векторы $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$). При этом «естественная» плотность действия микрополярного термоупругого континуума второго типа может быть представлена в виде следующей функции с явно перечисленными вхождениями определяющих переменных:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \vartheta). \tag{7}$$

В теориях континуумов лагранжиан имеет несколько более специальную форму, чем (7), разности плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{ij} \overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{I}} \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^i \underset{\mathfrak{b}}{\dot{d}}^j - \psi(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \vartheta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \vartheta).$$

Для изображения состояний и процессов в механике континуума используется трехмерное плоское пространство — время и независимое время. Поскольку выбор эйлеровых координат произволен и не должен никак сказываться на физических следствиях дифференциальных уравнений поля, то действие и лагранжиан обязаны обладать определенными свойствами инвариантности по отношению к выбору эйлеровой координатной системы и начала отсчета времени, т.е. по отношению к так называемым «движениям» эйлерова пространства. Существуют два принципиально различных вида «движений»: трансляционные и спинорные. Первые определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в эйлеровом пространстве. Спинорные «движения» определяются заданием тензорных функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три (тензоры поворота).

Вводя в пространстве прямоугольные декартовы координаты x^j, заметим, что одно из таких свойств инвариантности проявляется в форме трансляционной инвариантности интегрального функционала действия относительно произвольных сдвигов переменных x^j и времени t. Другое, как хорошо известно, — в форме ротационной инвариантности относительно произвольных поворотов эйлеровой координатной системы x^j.

Инвариантность действия относительно поворотов эйлерова координатного репера является проявлением изотропии эйлерова координатного пространства, т.е. отсутствия предпочтительных направлений в этом пространстве.

Инвариантность действия относительно преобразований лагранжевых переменных связана с симметрией физических свойств континуума. Так, трансляционная инвариантность действия относительно произвольных сдвигов координат X^α означает, что континуум однороден. Ротационная инвариантность относительно произвольных поворотов лагранжевой координатной системы указывает на изотропность континуума.

Таким образом, действие, в частности, должно быть инвариантно относительно преобразований сдвигов и поворотов координатной системы наблюдателя (принцип объективности) и сдвигов времени:

$$\widetilde{x}^i = R^i_j x^j + C^i, \quad \underset{\mathfrak{a}}{\widetilde{d}}^i = R^i_j \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \quad \widetilde{t} = t + C. \tag{8}$$

В приведенных выше формулах преобразования C^i, C есть произвольные постоянные; R^i_j — произвольная постоянная собственно ортогональная матрица.

Действие и плотность действия $\mathscr{L}$ инвариантны относительно преобразований (8) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^k} = 0, \qquad \partial_4^{\text{expl}} \mathscr{L} = 0, \qquad \mathscr{K}_{[ij]} = 0, \tag{9}$$

где тензор $\mathscr{K}_{ij}$ определяется согласно

$$\mathscr{K}_{ij} = x_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^j} + \underset{\mathfrak{a}}{d}_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j} + \dot{x}_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^j} + \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}{}^j} + (\partial_\alpha x_i) \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} + (\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}_i) \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j)}$$

и в (9) по индесам, заключенным в квадратные скобки, выполняется антисимметризация.

Заметим, что в силу (9) и в обозначениях (6) тензор $\mathscr{K}_{ij}$ сводится к

$$\mathscr{K}_{ij} = \underset{\mathfrak{a}}{d}_i \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j + \dot{x}_i P_j + \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}_i \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j - (\partial_\alpha x_i) S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - (\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}_i) \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j}.$$

Ясно, что в том случае, когда плотность действия не зависит явно от директоров $\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j$, их производных по времени $\underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}{}^j$ и референциальных градиентов $\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j$, последнее в группе условий (9) позволяет сразу же установить симметрию тензора напряжений Коши

$$T^{l\cdot}_{\cdot k} = -J^{-1} (\partial_\beta x^l) \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta x^k)} \quad (\beta = 1, 2, 3).$$

Инвариантность действия относительно трансляций эйлеровых координат, известная как принцип галилеевой инвариантности действия (принцип относительности Галилея), мы дополним требованием инвариантности действия относительно сдвигов температурного смещения (C' — произвольная постоянная):

$$\widetilde{\vartheta} = \vartheta + C', \tag{10}$$

что обеспечивается выполнением следующего условия:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vartheta} = 0.$$

Поскольку кинетическая составляющая плотности действия инвариантна относительно преобразований (8), (10), плотность свободной энергии Гельмгольца (α, $\beta = 1, 2, 3$)

$$\psi = \psi\big(X^\beta, \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j, \partial_\alpha \vartheta\big),$$

в свою очередь, обязана выдерживать преобразования вида (8), (10), т.е.

$$\psi\big(X^\beta, R^i_j \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j, \dot{\vartheta}, R^i_j \partial_\alpha x^j, R^i_j \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j, \partial_\alpha \vartheta\big) = \psi\big(X^\beta, \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j, \partial_\alpha \vartheta\big).$$

Последнее обстоятельство означает, что свободная энергия Гельмгольца является некоторой функцией от переменных X^β, $\dot{\vartheta}$, $\partial_\alpha\vartheta$, в запись которых не входят эйлеровы индексы, а также следующих инвариантных относительно вращений эйлеровой координатной системы аргументов:

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j), \quad \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{R}}_\alpha = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)\underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \quad \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d}^j). \tag{11}$$

Каждая из величин, перечисленных в (11), действительно инвариантна относительно произвольных вращений эйлеровой координатной системы, поскольку по всем эйлеровым индексам производится сворачивание с помощью эйлеровых метрических коэффициентов g_{ij}.

Заметим, что в списке инвариантных аргументов (11) отсутствуют тензоры

$$\underset{\mathfrak{ab}}{\mathscr{R}} = g_{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d}^i\underset{\mathfrak{b}}{d}^j, \quad \underset{\mathfrak{ab}}{\mathscr{R}}_\alpha = g_{ij}(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^i)\underset{\mathfrak{b}}{d}^j, \quad \underset{\mathfrak{ab}}{\mathscr{T}}_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^i)(\partial_\beta \underset{\mathfrak{b}}{d}^j). \tag{12}$$

Рациональной основой для этого выступает требование того, чтобы экстрадеформация континуума была невозможна, если отсутствует деформация $(g_{\alpha\beta} = {}^{\backprime}g_{\alpha\beta})$.

Полноту системы ротационно-инвариантных аргументов (11) с учетом данного выше замечания можно доказать, опираясь на известные результаты теории алгебраических инвариантов (см., например, [10]) системы (эйлеровых векторов)

$$\partial_\alpha x^i,\ \underset{\mathfrak{a}}{d}^j,\ \partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d}^j. \tag{13}$$

Во-первых, полная система инвариантов векторов (13) включает их попарные внутренние произведения, что приводит к эйлеровым инвариантам (11), (12).

Во-вторых, указанная система инвариантов содержит также всевозможные 3×3-определители, в столбцах которых расположены эйлеровы компоненты всевозможных троек векторов системы (13). A priori ясно, что интересующие нас определители должны содержать по меньшей мере один столбец из эйлеровыых компонент градиента деформации $\partial_\alpha x^i$. Такие определители, размещая эйлеровы компоненты градиента деформации $\partial_\alpha x^j$ в первом столбце, можно разбить на следующие шесть групп:

$$\text{I.}\quad \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \underset{\mathfrak{a}}{d}^1 & \underset{\mathfrak{b}}{d}^1 \\ \partial_\alpha x^2 & \underset{\mathfrak{a}}{d}^2 & \underset{\mathfrak{b}}{d}^2 \\ \partial_\alpha x^3 & \underset{\mathfrak{a}}{d}^3 & \underset{\mathfrak{b}}{d}^3 \end{vmatrix} \qquad (\mathfrak{a}\neq\mathfrak{b}),$$

$$\text{II.}\quad \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta\underset{\mathfrak{a}}{d}^1 & \underset{\mathfrak{b}}{d}^1 \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta\underset{\mathfrak{a}}{d}^2 & \underset{\mathfrak{b}}{d}^2 \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta\underset{\mathfrak{a}}{d}^3 & \underset{\mathfrak{b}}{d}^3 \end{vmatrix},$$

$$\text{III.}\quad \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta\underset{\mathfrak{a}}{d}^1 & \partial_\gamma\underset{\mathfrak{b}}{d}^1 \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta\underset{\mathfrak{a}}{d}^2 & \partial_\gamma\underset{\mathfrak{b}}{d}^2 \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta\underset{\mathfrak{a}}{d}^3 & \partial_\gamma\underset{\mathfrak{b}}{d}^3 \end{vmatrix} \qquad (\beta\neq\gamma \quad \text{и} \quad \mathfrak{a}\neq\mathfrak{b} \quad \text{одновременно}),$$

$$\text{IV.}\ \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta x^1 & \underset{\mathfrak{a}}{d}^1 \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta x^2 & \underset{\mathfrak{a}}{d}^2 \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta x^3 & \underset{\mathfrak{a}}{d}^3 \end{vmatrix} \quad \text{(исключаются варианты, когда} \quad \beta = \alpha),$$

$$\text{V.}\ \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta x^1 & \partial_\gamma \underset{\mathfrak{a}}{d}^1 \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta x^2 & \partial_\gamma \underset{\mathfrak{a}}{d}^2 \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta x^3 & \partial_\gamma \underset{\mathfrak{a}}{d}^3 \end{vmatrix} \quad \text{(исключаются варианты, когда} \quad \beta = \alpha),$$

$$\text{VI.}\ \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta x^1 & \partial_\gamma x^1 \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta x^2 & \partial_\gamma x^2 \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta x^3 & \partial_\gamma x^3 \end{vmatrix}.$$

Вычисление всех шести определителей можно осуществить с помощью правила Грама—Шмидта, т.е. через определители, элементы которых представляют собой всевозможные внутренние произведения эйлеровых векторов, расположенных в столбцах исходных определителей. Таким образом, каждый из приведенных выше определителей вычисляется через внутренние произведения в соответствии с данной ниже схемой:

(I) $g_{ij}(\partial_\alpha x^i)\underset{\mathfrak{e}}{d}^j$, $g_{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d}^i\underset{\mathfrak{b}}{d}^j$;

(II) $g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d}^j)$, $g_{ij}(\partial_\alpha x^i)\underset{\mathfrak{b}}{d}^j$, $g_{ij}(\partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d}^i)\underset{\mathfrak{b}}{d}^j$;

(III) $g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\omega \underset{\mathfrak{e}}{d}^j)$, $g_{ij}(\partial_\beta \underset{\mathfrak{a}}{d}^i)(\partial_\gamma \underset{\mathfrak{b}}{d}^j)$;

(IV) $g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j)$, $g_{ij}(\partial_\alpha x^i)\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$;

(V) $g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j)$, $g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\gamma \underset{\mathfrak{a}}{d}^j)$;

(VI) $g_{\alpha\beta}$.

Хорошо видно, что определители (I)–(VI) вычисляются только через тензорные и векторные величины, перечисленные в (11) и (12), что и доказывает полноту ротационно-инвариантных аргументов (11) с учетом исключения аргументов вида (12).

Заметим также, что кинематическое ограничение

$$\underset{\mathfrak{ab}}{\mathscr{R}} = \underset{\mathfrak{ab}}{\delta}$$

устанавливает, что d-векторы составляют «жесткий» репер, поэтому экстрадеформация континуума сводится лишь к вращениям составляющих его элементов.

В итоге, считая, что континуум однороден, т.е.

$$\partial_\beta^{\text{expl}} \mathscr{L} = 0 \qquad (\beta = 1, 2, 3),$$

и, следовательно, все лагранжевы переменные X^β являются циклическими (игнорируемыми), получаем следующую удовлетворяющую принципу объективности ротационно-инвариантную форму свободной энергии Гельмгольца:

$$\psi = \psi(g_{\alpha\beta}, \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{R}}_\alpha, \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\alpha\beta}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha \vartheta) \quad (\mathfrak{a}{=}1,\ 2,\ 3;\ \alpha,\ \beta{=}1,\ 2,\ 3). \tag{14}$$

Мы неявно подразумеваем, что приведенная форма (14) должна зависеть также от отсчетной метрики ${}^{\backprime}g_{\alpha\beta}$ и референциального положения d-векторов ${}^{\backprime}\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^{j}$ ($\mathfrak{a}$=1, 2, 3).

В форме (14) ротационно-инвариантный аргумент $g_{\alpha\beta}$ без ограничения общности может быть заменен на

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta} - {}^{\backprime}g_{\alpha\beta}\right).$$

Компоненты $\epsilon_{\alpha\beta}$ преобразуются по тензорному закону при заменах лагранжевых координат. Тензор $\epsilon_{\alpha\beta}$ называется тензором деформации Грина. Использование тензора деформации Грина в качестве ротационно-инвариантного аргумента лагранжиана исключительно удобно, т.к. он в силу своего определения учитывает только ту часть деформации континуума (1), которая наблюдается относительно некоторой фиксированной референциальной конфигурации.

По аналогичным соображениям вместо векторной меры экстрадеформации $\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{R}}{}_{\alpha}$ следует использовать относительный вектор экстрадеформации

$$-\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}{}_{\alpha} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{R}}{}_{\alpha} - g_{\alpha\beta}\,{}^{\backprime}\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^{\beta}.$$

Здесь векторы ${}^{\backprime}\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^{\beta}$ указывают референциальное состояние системы d-векторов. Вектор $\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}{}_{\alpha}$ оказывается нулевым, только если каждый из d-векторов поворачивается и удлиняется так, как это в точности предписывается деформацией континуума (1). Если последнее обстоятельство действительно имеет место, то ${}^{\backprime}d$-векторы и d-векторы будут связаны зависимостями

$$\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^{i} - \left(\partial_{\alpha}x^{i}\right){}^{\backprime}\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^{\alpha} = 0;$$

умножая обе части полученного равенства на компоненты дисторсии $\partial_{\beta}x^{j}$ и сворачивая с g_{ij}, находим

$$\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{R}}{}_{\beta} - g_{\beta\alpha}{}^{\backprime}\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^{\alpha} = 0,$$

т.е. относительный вектор экстрадеформации становится равным нулю:

$$\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}{}_{\beta} = 0.$$

Таким образом, окончательно ротационно-инвариантная форма свободной энергии Гельмгольца получается в виде [11]:

$$\psi = \psi(\epsilon_{\alpha\beta}, \underset{\mathfrak{a}}{\gamma}{}_{\alpha}, \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}{}_{\alpha\beta}, \dot{\vartheta}, \partial_{\alpha}\vartheta) \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Полученная форма указывает на явную зависимость свободной энергии Гельмгольца от одного скалярного аргумента $\dot{\vartheta}$; четырех отсчетных векторных аргументов $\partial_{\alpha}\vartheta$, $\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}{}_{\alpha}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3$) и четырех отсчетных тензорных аргументов $\epsilon_{\alpha\beta}$, $\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}{}_{\alpha\beta}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, 3$), три из которых являются несимметричными тензорами второго ранга.

4. Определяющие уравнения в терминах объективного термодинамического базиса. Как показано в предыдущем разделе работы, объективный термодинамический базис для микрополярного термоупругого континуума, распространение тепла в котором не сопровождается производством энтропии, состоит из следующего набора функционально независимых переменных

$$\epsilon_{\alpha\beta},\ \underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_{\alpha},\ \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\alpha\beta},\ \dot{\vartheta},\ \partial_\alpha\vartheta \qquad (\mathfrak{a}=1,2,3;\quad \alpha,\beta=1,2,3).$$

Определяющие уравнения микрополярного термоупругого континуума (6) были получены в термодинамическом базисе, который не удовлетворяет принципу ротационной инвариантности. Поэтому естественно поставить задачу о преобразовании уравнений (6) к объективным формам. Далее рассмотрим вывод объективных форм определяющих уравнений. На основании

$$\begin{gathered}
\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}=g_{jk}(\partial_\beta x^k\delta^\alpha_\sigma+\partial_\sigma x^k\delta^\alpha_\beta),\\
\frac{\partial \epsilon_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}=\frac{1}{2}g_{jk}(\partial_\mu x^k\delta^\alpha_\nu+\partial_\nu x^k\delta^\alpha_\mu),\\
\frac{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{e}}{d}^j)}=g_{jk}\partial_\mu x^k\delta^\alpha_\nu\overset{\mathfrak{e}}{\underset{\mathfrak{a}}{\delta}},\qquad
\frac{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{R}}_{\beta}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}=g_{jk}\delta^\alpha_\beta\underset{\mathfrak{a}}{d}^k,\\
\frac{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}=g_{jk}\delta^\alpha_\mu\partial_\nu\underset{\mathfrak{a}}{d}^k,\qquad
\frac{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{R}}_{\beta}}{\partial \underset{\mathfrak{e}}{d}^j}=g_{ij}\partial_\beta x^i\overset{\mathfrak{e}}{\underset{\mathfrak{a}}{\delta}}
\end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\epsilon_{\mu\nu}}\frac{\partial\epsilon_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\beta}\frac{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{R}}_{\beta}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\beta}\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}\underset{\mathfrak{a}}{d}^\sigma+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\mu\nu}}\frac{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha x^j)},\\
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{e}}{d}^j)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\mu\nu}}\frac{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{e}}{d}^j)},\qquad
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\mathfrak{e}}{d}^j}=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\beta}\frac{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{R}}_{\beta}}{\partial\underset{\mathfrak{e}}{d}^j}
\end{gathered}$$

можно получить следующие объективные формы определяющих уравнений (6):

$$\begin{aligned}
-S^{\alpha\cdot}_{\cdot j}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\epsilon_{\mu\alpha}}g_{jk}\partial_\mu x^k-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\beta}g_{jk}\underset{\mathfrak{a}}{d}^k\delta^\alpha_\beta+&\\
+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\beta}g_{jk}\left(\partial_\beta x^k\underset{\mathfrak{a}}{d}^\alpha+\partial_\sigma x^k\delta^\alpha_\beta\underset{\mathfrak{a}}{d}^\sigma\right)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\mu\nu}}g_{jk}\partial_\nu\underset{\mathfrak{a}}{d}^k,&
\end{aligned}$$

$$-\overset{\mathfrak{e}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{e}}{d}^j)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\mathfrak{e}}{\mathscr{T}}_{\mu\nu}}g_{jk}\partial_\mu x^k\delta^\alpha_\nu,\qquad
\overset{\mathfrak{e}}{\mathscr{A}}_j=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\mathfrak{a}}{d}^j}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\mathfrak{e}}{\gamma}_\beta}g_{jk}\partial_\beta x^k.$$

Определяющее уравнение (1) после очевидных преобразований представляется в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
-S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \epsilon_{\mu\alpha}} g_{jk}\partial_\mu x^k + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\alpha} g_{jk}(\partial_\sigma x^{k\backprime} \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^\sigma - \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^k) + \\
+ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\gamma}_\beta} g_{jk}\partial_\beta x^{k\backprime} \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^\alpha + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{T}}_{\mu\nu}} g_{jk}\partial_\nu \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^k.
\end{aligned}
$$

Заключая работу, следует отметить, что существует еще только один, принципиально отличающийся от рассмотренного путь построения полной системы независимых ротационно-инвариантных функциональных аргументов лагранжиана. Он основывается на полярном разложении Коши градиента деформации и градиентов микрополярных d-директоров и приводит к новым объективным формам определяющих уравнений, отличным от данных выше.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 13–01–00139-а «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой») и Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания ФГБОУ ВПО «СамГТУ» (проект № 16.2518.2014/(K)).

ORCID
Владимир Александрович Ковалев: http://orcid.org/0000-0003-2991-9531
Юрий Николаевич Радаев: http://orcid.org/0000-0002-0866-2151

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Объективные ротационно-инвариантные формы термоупругих лагранжианов / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 195–196.
2. Радаев Ю. Н. Гиперболические теории и задачи механики деформируемого твердого тела / *Современные проблемы механики*: Тезисы докладов международной конференции, посвящённой 100-летию Л. А. Галина (20–21 сентября 2012 г., г. Москва, Россия). М., 2012. С. 75–76.
3. Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Гиперболические теории и задачи механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 1. С. 186–202. doi: 10.14498/vsgtu1412.
4. Toupin R. A. Theories of elasticity with couple-stress // *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1964. vol. 17, no. 2. pp. 85–112. doi: 10.1007/BF00253050.
5. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. *Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты.* М.: Физматлит, 2009. 156 с.
6. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. *Волновые задачи теории поля и термомеханика.* Саратов: Саратовский гос. университет, 2010. 328 с.
7. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Вывод тензоров энергии-импульса в теориях микрополярной гиперболической термоупругости // *Изв. РАН. МТТ*, 2011. № 5. С. 58–77.
8. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Полевые уравнения и d-тензоры термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2013. Т. 13, № 2(1). С. 60–68.
9. Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Ротационная инвариантность и объективные формы лагранжианов нелинейного микрополярного термоупругого континуума второго типа // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2013. Т. 13, № 4(1). С. 96–102.

10. Гуревич Г. Б. *Основы теории алгебраических инвариантов*. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 408 с.

11. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. О нелинейных тензорах и векторах экстрадеформации в теории и механике континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. №1(34). С. 66–85. doi: 10.14498/vsgtu1310.

Поступила в редакцию 25/II/2015;
в окончательном варианте — 11/III/2015;
принята в печать — 08/IV/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 325–340

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1413

MSC: 74A60, 74F05

ON FRAME INDIFFERENT LAGRANGIANS OF MICROPOLAR THERMOELASTIC CONTINUUM*

V. A. Kovalev, Y. N. Radayev

[1] Moscow City Government University of Management,
28, Sretenka st., Moscow, 107045, Russian Federation.
[2] A. Ishlinsky Institite for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

A non-linear mathematical model of type-II thermoelastic continuum with fine microstructure is developed. The model is described in terms of 4-covariant field theoretical formalism attributed to field theories of continuum mechanics. Fine microstructure is introduced by d-vectors and tensors playing role of extra field variables. A Lagrangian density for type-II thermoelastic continuum with fine microstructure is proposed and the least action principle is formulated. Virtual microstructural inertia is added to the considered action density. It is also valid for the thermal inertia. Corresponding 4-covariant field equations of type-II thermoelasticity are obtained. Constitutive equations of type-II microstructural thermoelasticity are discussed. Following the usual procedure for type-II micropolar thermoelastic Lagrangians functionally independent rotationally invariant arguments are obtained. Those are proved to form a complete set. Objective forms of the

Please cite this article in press as:
K o v a l e v V. A., R a d a y e v Yu. N. On frame indifferent Lagrangians of micropolar thermoelastic continuum, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 325–340. doi: 10.14498/vsgtu1413. (In Russian)

Authors Details:
Vladimir A. Kovalev (Dr. Phys. & Math. Sci.; vlad_koval@mail.ru; Corresponding Author), Professor, Dept. of Applied Mathematics and Analytical Support of Making Decisions.
Yuri N. Radayev, Dr. Phys. & Math. Sci.; radayev@ipmnet.ru, Leader Researcher, Lab. of Modeling in Solid Michanics.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

Lagrangians satisfying the frame indifference principle are given. Those are derived by using extrastrain vectors and tensors.

Keywords: thermoelasticity, microstructure, action, thermodynamical basis, rotational invariance, frame indifference principle, extrastrain tensor, constitutive equation.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1413

Acknowledgments. This work has been partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13–01–00139-a "Hyperbolic Thermal Waves in Solid Bodies with Microstructure") and by the Russian Ministry of Education and Science within the design basis portion of the state task to Samara State Technical University (project no. 16.2518.2014/(K)).

ORCID
Vladimir A. Kovalev: http://orcid.org/0000-0003-2991-9531
Yuri N. Radayev: http://orcid.org/0000-0002-0866-2151

REFERENCES

1. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On frame indifferent Lagrangians of micropolar thermoelastic continuum, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 195–196 (In Russian).
2. Radayev Yu. N. Hyperbolic theories and problems of solid mechanics, *Sovremennye problemy mekhaniki* [Modern Problems of Mechanics], Abstracts of the International Conference. Moscow, 2012, pp. 75–76 (In Russian).
3. Radayev Yu. N., Kovalev V. A. Hyperbolic theories and problems of continuum mechanics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 186–202 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1412.
4. Toupin R. A. Theories of elasticity with couple-stress, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1964, vol. 17, no. 2, pp. 85–112. doi: 10.1007/BF00253050.
5. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Elementy teorii polia: variatsionnye simmetrii i geometricheskie invarianty* [Field Theory Elements: Variational Symmetries and Geometric Invariants]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 156 pp. (In Russian)
6. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave problems of the field theory and thermomechanic]. Saratov, Saratov State Univ., 2010, 328 pp. (In Russian)
7. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Derivation of energy-momentum tensors in theories of micropolar hyperbolic thermoelasticity, *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 705–720. doi: 10.3103/S0025654411050062.
8. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. Covariant field equations and *d*-tensors of hyperbolic thermoelastic continuum with fine microstructure, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 2(1), pp. 60–68 (In Russian).
9. Radayev Yu. N., Kovalev V. A. Rotational invariance of non-linear Lagrangians of type-II micropolar thermoelastic continuum, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 4(1), pp. 96–102 (In Russian).
10. Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Groningen, Netherlands, P. Noordhoff Ltd., 1964, viii+429 pp.
11. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On Nonlinear Strain Vectors and Tensors in Continuum Theories of Mechanics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 1(34), pp. 66–85 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1310.

Received 25/II/2015;
received in revised form 11/III/2015;
accepted 08/IV/2015.