

УДК 517.958:[536.2+ 539.219.3]



## МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА ДЛЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ЛАМИНАРНОМ РЕЖИМЕ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

### Аннотация

Сформулирована задача теплопереноса (с учётом диссипации механической энергии) в неньютоновской жидкости, протекающей по круглой трубе в стабилизированном ламинарном режиме. Рассмотрены два варианта постановки: 1) нестационарная задача с учётом диффузионной составляющей теплопереноса вдоль трубы; 2) стационарная задача без учёта продольной диффузионной составляющей теплопереноса в жидкости. Для приближённого решения поставленных задач использован синтез метода начальных функций и метода дополнительных граничных условий, что позволяет понизить размерность задачи по пространственным переменным на единицу. В стационарном случае за счёт еще одного дополнительного граничного условия удалось получить более высокую степень аппроксимации температурного поля, чем в нестационарном случае. Исследованы разные способы аппроксимации краевых условий для температуры жидкости на входе в трубу как согласованных, так и не согласованных с температурой стенки. Проведены расчёты температурных полей для расплава полиэтилена высокого давления с учётом и без учёта диссипации механической энергии в полимере. Выполнено сравнение с расчётами, проведёнными на основе другого, ранее разработанного приближённого метода, отличного от предложенного в настоящем исследовании.

**Ключевые слова:** теплоперенос в трубе, неньютоновская жидкость, ламинарный режим течения, метод начальных функций, метод дополнительных граничных условий.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1433>

**Введение.** В ряде современных технических устройств для эффективно отвода тепла используются элементы конструкций с каналами, по которым движется жидкий теплоноситель: системы охлаждения ядерных реакторов [1], зеркал технологических лазеров [2], лопаток современных газотурбинных установок [3] и др. С точки зрения технологической реализации таких

© 2015 Самарский государственный технический университет.

### Образец для цитирования

Янковский А. П. Метод дополнительных граничных условий в задаче теплопереноса для неньютоновской жидкости, движущейся в ламинарном режиме в круглой трубе // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 3. С. 578–600. doi: [10.14498/vsgtu1433](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1433).

### Сведения об авторе

*Андрей Петрович Янковский* (д.ф.-м.н.; [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru)), ведущий научный сотрудник, лаб. физики быстропротекающих процессов.

элементов, по-видимому, наиболее целесообразно каналы в них создавать за счёт системы трубок, упакованных в связующий материал, так как трубки при этом выполняют как роль каналов, так и роль армирующих элементов, которые можно укладывать по достаточно сложным траекториям [4, 5].

Как показано в работах [6, 7], для математического описания процессов теплопереноса в таких трубчато-армированных конструкциях предварительно нужно решить задачу о теплопереносе в отдельно взятой тепловой трубке, причём это решение должно быть достаточно простым по структуре, чтобы оно было удобным для дальнейшего анализа проблемы в целом и при этом достаточно точным с точки зрения последующего инженерного приложения. Этим условиям удовлетворяет метод дополнительных граничных условий, предложенный в [8] для приближённого решения задачи Гретца—Нуссельта и использованный в [6, 7] для определения температурного поля в отдельно взятой тепловой трубке при стационарном и нестационарном теплопереносе.

Однако решения, полученные в [6–8], основывались на предположении о том, что по трубе в стабилизированном ламинарном режиме протекает жидкость, распределение скорости течения которой в поперечном сечении подчиняется закону Пуазеля—Гагена и диссипация механической энергии которой не учитывается. В действительности же в качестве жидкого теплоносителя могут быть использованы достаточно вязкие вещества (например, масла [9]), профиль скорости которых в круглой трубе при стабилизированном ламинарном режиме течения не соответствует закону Пуазеля—Гагена, т. е. такой теплоноситель представляет собой неньютоновскую жидкость. Кроме того, при исследовании тепловых процессов в таком теплоносителе целесообразно учитывать и диссипацию механической энергии, вызванную неравномерностью профиля скорости по сечению трубы [10].

В связи с этим настоящее исследование посвящено построению приближённого решения задачи теплопереноса для неньютоновской жидкости, прокачиваемой в стабилизированном ламинарном режиме по круглой трубе, методом дополнительных граничных условий с учётом диссипации механической энергии в теплоносителе.

Из сравнения решений, приведённых в [6, 7] для ньютоновской жидкости, прокачиваемой по тепловой трубке, можно заключить, что в случае стационарного теплообмена методом дополнительных граничных условий можно получить более точное решение, чем в нестационарной задаче, без увеличения порядка разрешающего дифференциального уравнения теплопереноса внутри трубки. В силу этого в настоящем исследовании также раздельно изучаются стационарный и нестационарный случаи.

**1. Нестационарный случай.** Рассматривается стабилизированный ламинарный режим течения несжимаемой нетермочувствительной неньютоновской жидкости в круглой трубе, профиль скорости которой подчиняется степенному закону Освальда—де Вилия. При этом уравнение теплового баланса жидкости с учётом диссипации механической энергии в цилиндрической системе координат в предположении об осевой симметрии задачи имеет вид [10]

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v(r) \frac{\partial T}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) + \frac{k}{\rho c_p} \left( \frac{dv}{dr} \right)^{n+1}, \quad (1)$$

$$0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq z \leq L, \quad t \geq 0,$$

где

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} = \text{const}, \quad v(r) = v_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^{(n+1)/n} \right]; \quad (2)$$

$\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c_p$  — коэффициент теплопроводности, плотность и удельная теплоемкость (при постоянстве давления) жидкости;  $k$ ,  $n$  — реологические постоянные жидкости:  $k$  — постоянная консистенности ( $k \geq 0$ ),  $n$  — индекс течения ( $0 < n \leq 1$ );  $v$  — скорость жидкости в продольном (осевом) направлении  $z$ ;  $v_0$  — скорость жидкости на оси трубы (при  $r = 0$ );  $r$  — полярный радиус;  $r_0$  — радиус внутренней стенки трубы;  $L$  — длина трубы;  $T$  — температура жидкости;  $t$  — время.

При  $n = 1$  согласно (2) получаем профиль течения жидкости, соответствующий закону Пуазеля—Гагена.

Уравнение (1) с учётом (2) целесообразно переписать так:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{v(r)}{a} \frac{\partial T}{\partial z} + D(T) - W \left( \frac{r}{r_0} \right)^{(n+1)/n}, \quad (3)$$

$$0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq z \leq L, \quad t \geq 0,$$

где

$$W = \frac{k}{\lambda} \left( \frac{n+1}{n} \frac{v_0}{r_0} \right)^{n+1} = \text{const}, \quad D(\cdot) = \frac{1}{a} \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2}; \quad (4)$$

$D$  — параболический оператор одномерной задачи теплопроводности. Последние слагаемые в правых частях уравнений (1), (3) порождены диссипацией механической энергии в жидкости [10].

Для приближённого решения начально-краевой задачи, соответствующей уравнению (3), используем метод начальных функций, совмещённый с методом дополнительных граничных условий.

Согласно идее метода начальных функций [11], разложим функцию  $T$  в ряд Маклорена по переменной  $r$ :

$$T(t, z, r) = T_0(t, z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{m!} \frac{\partial^m T}{\partial r^m} \Big|_{r=0}, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad (5)$$

где  $T_0(t, z) \equiv T(t, z, 0)$  — температура жидкости в точках, лежащих на оси трубы («начальная» функция).

Так как распределение температуры  $T$  в трубе считается осесимметричным, в (5)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^m T}{\partial r^m} = 0, \quad m = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (6)$$

Ограничиваясь частичной суммой ряда (5), с учётом (6) получим

$$T(t, z, r) = T_0(t, z) + \sum_{m=1}^M T_{2m}(t, z) \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2m}, \quad (7)$$

$$0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq z \leq L, \quad t \geq 0,$$

где  $T_0$ ,  $T_{2m}$  — функции, подлежащие определению и зависящие только от времени  $t$  и от осевой координаты  $z$ .

Выразим в (7) все функции  $T_{2m}$  через  $T_0$ . Для этого будем использовать уравнение (3) и его производные по  $r$  при  $r \rightarrow 0$ . Так как левая часть уравнения (3) полностью совпадает с левой частью равенства (9) в работе [7], то, повторяя почти дословно рассуждения (14)–(26) из [7], с учётом (4), (6) получим

$$T_2(t, z) = \frac{r_0^2}{4} \bar{D}(T_0), \quad T_4(t, z) = \frac{r_0^4}{64} \bar{D}^2(T_0), \quad 0 < n < 1, \quad (8)$$

где

$$\bar{D}(\cdot) = D(\cdot) + \frac{v_0}{a} \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} = \frac{1}{a} \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2} + \frac{v_0}{a} \frac{\partial(\cdot)}{\partial z}. \quad (9)$$

Второе равенство (8) справедливо только при выполнении строгого неравенства  $n < 1$ . В случае же  $n = 1$  выражение для  $T_4$  содержит еще одно слагаемое (см. формулу (26) в [7]). Так как при  $n = 1$  профиль скорости соответствует закону Пуазеля–Гагена (стабилизированному ламинарному режиму течения ньютоновской жидкости), этот случай далее не рассматривается.

Согласно (8) с учётом (9) функции  $T_2, T_4$  определяются через производные от начальной функции  $T_0(t, z)$ . Аналогично можно получить выражения и для функций  $T_{2m}$  ( $3 \leq m \leq M$ ) в разложении (7) через производные от  $T_0$ . На основании (8), (9) эти зависимости можно представить в таком виде:

$$T_{2m}(t, z) = \mathfrak{S}^{(m)}(T_0(t, z); W), \quad 1 \leq m \leq M, \quad (10)$$

где  $\mathfrak{S}^{(m)}$  — дифференциальный оператор порядка  $m$  по времени  $t$  и порядка  $2m$  по пространственной переменной  $z$ , который при  $m \geq 3$  может зависеть и от величины  $W$ , характеризующей диссипацию механической энергии в жидкости.

Подставив (10) в (7), получим выражение для температуры жидкости

$$\begin{aligned} T(t, z, r) &= \mathfrak{R}^{(M)}(r; T_0(t, z); W), \\ 0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq z \leq L, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathfrak{R}^{(M)}$  — линейный дифференциальный оператор порядка  $M$  по времени  $t$  и порядка  $2M$  по пространственной переменной  $z$  от начальной функции  $T_0$ , коэффициенты которого зависят от переменной  $r$  и величины  $W$ .

Для определения функции  $T_0$  необходимо использовать основное граничное условие на стенке трубы (при  $r = r_0$ ), например, граничное условие I рода:

$$T(t, z, r_0) = T_w(t, z), \quad 0 \leq z \leq L, \quad t \geq 0, \quad (12)$$

где  $T_w$  — заданная температура стенки трубы.

Подставив (11) в (12), получим разрешающее дифференциальное уравнение параболического типа порядка  $2M$ :

$$\mathfrak{R}^{(M)}(r_0; T_0(t, z); W) = T_w(t, z), \quad 0 \leq z \leq L, \quad t \geq 0, \quad (13)$$

где правая часть — известная функция.

Для однозначного интегрирования уравнения (13) для начальной функции  $T_0$  необходимо задать соответствующее количество начальных (при  $t = 0$ ) и граничных условий на входе ( $z = 0$ ) и выходе ( $z = L$ ) жидкости из трубы.

Таким образом строится приближённое решение уравнения (3) (или (1)) в рамках метода начальных функций.

Повысить точность приближённого решения (7) без увеличения порядка разрешающего уравнения можно за счёт совмещения метода начальных функций с методом дополнительных граничных условий [8]. С этой целью откажемся от выражений (11) при  $m \geq 3$  и воспользуемся дополнительным граничным условием, которое получается из (3) с учётом (2), (4) при  $r = r_0$ :

$$\left. \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right|_{r=r_0} = D(T_w) - W, \quad 0 \leq z \leq L, \quad t \geq 0, \quad (14)$$

где в правой части использовано основное граничное условие (12).

Подставив в (12), (14) разложение (7) и ограничившись рассмотрением случая  $M = 4$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^4 T_{2m}(t, z) &= T_w(t, z), \\ \sum_{m=0}^4 m^2 T_{2m}(t, z) &= \frac{r_0^2}{4} [D(T_w) - W]. \end{aligned} \quad (15)$$

Из системы (15), являющейся системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), с учётом (8) определим функции

$$\begin{aligned} T_6(t, z) &= \frac{1}{7} \left\{ -\frac{r_0^2}{4} [D(T_w) - W] + 16(T_w - T_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{4} r_0^2 \bar{D}(T_0) - \frac{3}{16} r_0^4 \bar{D}^2(T_0) \right\}, \\ T_8(t, z) &= \frac{1}{7} \left\{ \frac{r_0^2}{4} [D(T_w) - W] - 9(T_w - T_0) + \right. \\ &\quad \left. + 2r_0^2 \bar{D}(T_0) + \frac{5}{64} r_0^4 \bar{D}^2(T_0) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, функции  $T_6$ ,  $T_8$ , как и  $T_2$ ,  $T_4$  (см. (8)), также удалось выразить через начальную функцию  $T_0$ .

Для определения функции  $T_0$  используем интегральное уравнение теплового баланса жидкости в трубе [8], т. е. уравнение (3) проинтегрируем по  $r$  от 0 до  $r_0$  с весом  $r$ :

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{a} \int_0^{r_0} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^{(n+1)/n} \right] \frac{\partial T}{\partial z} r \, dr + \\ + \int_0^{r_0} D(T) r \, dr - W \int_0^{r_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{(n+1)/n} r \, dr = \\ = \int_0^{r_0} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) r \, dr = \int_0^{r_0} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr = r_0 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0}, \end{aligned} \quad (17)$$

где учтён предельный переход (6) при  $m = 1$ .

Подставим в левую и правую части цепочки равенств (17) выражение (7) при  $M = 4$ , тогда с учётом (8), (9), (16) получим

$$\begin{aligned} & \frac{r_0^6}{2688} D^3(T_0) + \frac{v_0 r_0^6}{2a} \left( a_3 + \frac{1}{672} \right) \frac{\partial}{\partial z} D^2(T_0) + \\ & \quad + \frac{v_0^2 r_0^6}{a^2} \left( a_3 + \frac{1}{2688} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} D(T_0) + \frac{37}{1120} r_0^4 D^2(T_0) + \\ & \quad + \frac{v_0 r_0^4}{2a} \left( a_2 + \frac{47}{560} \right) \frac{\partial}{\partial z} D(T_0) + \frac{v_0^3 r_0^6 a_3}{2a^3} \frac{\partial^3 T_0}{\partial z^3} + \frac{27}{35} r_0^2 D(T_0) + \\ & \quad + \frac{v_0^2 r_0^4}{2a^2} \left( a_2 + \frac{1}{56} \right) \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + \frac{v_0 r_0^2}{a} \left( \frac{a_1}{2} + \frac{3}{7} \right) \frac{\partial T_0}{\partial z} - \\ & \quad - \frac{r_0^4}{1120} D^2(T_w) - \frac{v_0 r_0^4 a_5}{2a} \frac{\partial}{\partial z} D(T_w) + \\ & \quad + \frac{3}{35} r_0^2 D(T_w) + \frac{v_0 r_0^2 a_4}{2a} \frac{\partial T_w}{\partial z} - \frac{24}{7} (T_w - T_0) = \\ & \quad = r_0^2 \left( \frac{n}{3n+1} - \frac{1}{14} \right) W, \quad (18) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{24(n+1)(127n^2 + 22n + 1)}{35(3n+1)(9n+1)(11n+1)}, \\ a_2 &= \frac{3(n+1)(1415n^2 + 216n + 9)}{560(5n+1)(9n+1)(11n+1)}, \\ a_3 &= \frac{(n+1)(189n^2 + 26n + 1)}{1344(7n+1)(9n+1)(11n+1)}, \\ a_4 &= \frac{(n+1)(139n + 11)}{35(9n+1)(11n+1)}, \\ a_5 &= \frac{(n+1)(19n + 1)}{560(9n+1)(11n+1)}, \quad 0 < n < 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Последнее слагаемое в левой части уравнения (18) содержит разность  $(T_w - T_0)$ , характеризующую величину температурного напора от стенки к жидкости.

Согласно (4), разрешающее уравнение (18) с учётом (19) содержит высшие производные от  $T_0$  по времени  $t$  третьего порядка  $(\partial^3 T_0 / \partial t^3)$  и шестого порядка по  $z$   $(\partial^6 T_0 / \partial z^6)$ , поэтому для однозначного интегрирования уравнения (18) необходимо задать три начальных условия (для  $T_0$ ,  $\partial T_0 / \partial t$ ,  $\partial^2 T_0 / \partial t^2$  при  $t = 0$ ) и по три граничных условия на входе и выходе жидкости из трубы (для  $T_0$ ,  $\partial T_0 / \partial z$ ,  $\partial^2 T_0 / \partial z^2$  или их линейных комбинаций при  $z = 0$  и  $z = L$ ).

Получим сначала все необходимые начальные условия для функции  $T_0$ . Пусть в момент времени  $t = 0$  в трубе задано начальное распределение температуры

$$T(0, z, r) = T^0(z, r), \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq z \leq L, \quad (20)$$

где  $T^0$  — заданная функция.

Так как в настоящем исследовании рассматривается лишь конечное разложение температуры  $T$  (см. формулу (7)), в общем случае равенство (20)

выполнить точно не удастся, поэтому начальное условие (20) можно удовлетворить лишь приближённо, используя либо метод коллокаций [12], либо метод наименьших квадратов [13], либо метод взвешенных невязок [14]. При использовании последнего метода вместо равенства (20) применим, например, следующие интегральные соотношения:

$$\int_0^{r_0} T(0, z, r) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m} r dr = \int_0^{r_0} T^0(z, r) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m} r dr \equiv \theta_m^0(z), \quad m = 0, 1, 2, \quad (21)$$

где  $\theta_0^0, \theta_1^0, \theta_2^0$  — известные функции переменной  $z \in [0, L]$ .

Подставим в (21) разложение (7) при  $M = 4$  и учтём (8), (9), (16), тогда после приведения подобных слагаемых получим:

$$\begin{aligned} \frac{24}{35}T_0 + \frac{27}{560}r_0^2\bar{D}(T_0) + \frac{r_0^4}{1344}\bar{D}^2(T_0) &= \\ &= \frac{2}{r_0^2}\theta_0^0(z) + \frac{r_0^2}{560}[D(T_w) - W] - \frac{11}{35}T_w, \\ \frac{9}{35}T_0 + \frac{r_0^2}{42}\bar{D}(T_0) + \frac{11}{26880}r_0^4\bar{D}^2(T_0) &= \\ &= \frac{2}{r_0^2}\theta_1^0(z) + \frac{r_0^2}{840}[D(T_w) - W] - \frac{17}{70}T_w, \\ \frac{20}{147}T_0 + \frac{11}{784}r_0^2\bar{D}(T_0) + \frac{r_0^4}{3920}\bar{D}^2(T_0) &= \\ &= \frac{2}{r_0^2}\theta_2^0(z) + \frac{r_0^2}{1176}[D(T_w) - W] - \frac{29}{147}T_w, \end{aligned} \quad (22)$$

где в правые части перенесены значения всех известных в момент времени  $t = 0$  функций и величин.

Из системы (22), как из СЛАУ, в каждой точке  $z \in [0, L]$  в начальный момент времени можем определить значения функций  $T_0, \bar{D}(T_0), \bar{D}^2(T_0)$ . Тогда с учётом (9) получаем следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} T_0(0, z) &= \bar{T}_0(z), \\ \frac{\partial T_0}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \left( a\bar{D}(\bar{T}_0) + a\frac{\partial^2\bar{T}_0}{\partial z^2} - v_0\frac{\partial\bar{T}_0}{\partial z} \right) \Big|_{t=0}, \\ \frac{\partial^2 T_0}{\partial t^2} \Big|_{t=0} &= \left( a^2\bar{D}^2(\bar{T}_0) - a^2\frac{\partial^4\bar{T}_0}{\partial z^4} - v_0^2\frac{\partial^2\bar{T}_0}{\partial z^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2a\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial\bar{T}_0}{\partial t}\right) - 2v_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\bar{T}_0}{\partial t}\right) + 2v_0a\frac{\partial^3\bar{T}_0}{\partial z^3} \right) \Big|_{t=0}, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\bar{T}_0, \bar{D}(\bar{T}_0), \bar{D}^2(\bar{T}_0)$  — значения функций, известных из решения системы (22) в каждой точке  $z \in [0, L]$ .

Последовательно определяя из (23)  $T_0, \partial T_0/\partial t, \partial^2 T_0/\partial t^2$ , получим все необходимые начальные условия для интегрирования уравнения (18) с учётом (19). (При таком последовательном вычислении правые части в (23) — известные функции переменной  $z$ .)

Определим теперь граничные условия для уравнения (18). Пусть на входе ( $z = z_* = 0$ ) и на выходе ( $z = z_{**} = L$ ) жидкости из трубы заданы, например, распределения температуры по поперечному сечению

$$T(t, z_*, r) = T_*(t, r), \quad T(t, z_{**}, r) = T_{**}(t, r), \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad t \geq 0, \quad (24)$$

где  $T_*$ ,  $T_{**}$  — известные функции.

По-прежнему в силу использования конечного разложения температуры (7) в общем случае граничные условия (24) выполнить не удастся, поэтому, как и в случае начальных условий, равенства (24) можно удовлетворить лишь приближённо, используя, например, метод коллокаций, метод наименьших квадратов или метод взвешенных невязок [12–14]. В случае применения последнего метода вместо (24) используем интегральные равенства, аналогичные (21):

$$\begin{aligned} \int_0^{r_0} T(t, z_*, r) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m} r dr &= \\ &= \int_0^{r_0} T_*(t, r) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m} r dr \equiv \theta_m^*(t), \quad m = 0, 1, 2 \quad (* \rightarrow **), \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\theta_m^*$  и  $\theta_m^{**}$  ( $m = 0, 1, 2$ ) — известные функции переменной  $t$ .

Подставим в (25) разложение (7) при  $M = 4$ , тогда с учётом (8), (9), (16) получим систему, аналогичную (22), в которой следует сделать замены

$$\theta_m^0(z) \rightarrow \theta_m^*(t) \quad (z = z_*), \quad \theta_m^0(z) \rightarrow \theta_m^{**}(t) \quad (z = z_{**}), \quad m = 0, 1, 2. \quad (26)$$

Так как функции  $\theta_m^*(t)$  и  $\theta_m^{**}(t)$  ( $m = 0, 1, 2$ ) известны (в силу правых равенств в (25)), а зависимость температуры стенки  $T_w$  от  $t$  и  $z$  предполагается заданной (см. (12)), правые части в (22) с учётом замены (26) также известны. Следовательно, из (22) с учётом (26), как из СЛАУ, можем определить значения функций  $T_0$ ,  $\bar{D}(T_0)$ ,  $\bar{D}^2(T_0)$  (в сечениях  $z = z_*$ ,  $z = z_{**}$ ), зависящих только от времени  $t$ . При этом с учётом (9) в точке  $z = z_*$  (или  $z = z_{**}$ ) получаем требуемые граничные условия:

$$\begin{aligned} T_0(t, z_*) &= \bar{T}_0(t), \\ a \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} - v_0 \frac{\partial T_0}{\partial z} &= \left( \frac{\partial \bar{T}_0}{\partial t} - a \bar{D}(\bar{T}_0) \right) \Big|_{z=z_*}, \\ a^2 \frac{\partial^4 T_0}{\partial z^4} - 2v_0 a \frac{\partial^3 T_0}{\partial z^3} + v_0^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} &= \\ &= \left( a^2 \bar{D}^2(\bar{T}_0) + \frac{\partial^2 \bar{T}_0}{\partial t^2} - 2a \frac{\partial}{\partial t} \bar{D}(\bar{T}_0) \right) \Big|_{z=z_*} \quad (z_* \rightarrow z_{**}), \end{aligned} \quad (27)$$

где функции  $\bar{T}_0(t)$ ,  $\bar{D}(\bar{T}_0)$ ,  $\bar{D}^2(\bar{T}_0)$  известны из решения системы (22) с учётом замены (26) в точке  $z = z_*$  (или  $z = z_{**}$ ) в каждый момент времени  $t \geq 0$ .

Последовательно определяя в (27) правые части, получим в точках  $z = z_*$  и  $z = z_{**}$  по три граничных условия, необходимых для однозначного интегрирования разрешающего уравнения (18), если в сечениях  $z = z_*$  и  $z = z_{**}$  заданы граничные условия I рода для температуры жидкости (24).



Таким образом, исходя из начальных (20) и граничных (24) условий, заданных для температуры жидкости  $T$ , удалось определить начальные (23) и граничные (27) условия для начальной функции  $T_0$ , необходимые для однозначного интегрирования разрешающего уравнения (18).

После решения начально-краевой задачи (18), (23), (27) определим начальную функцию  $T_0(t, z)$  ( $t \geq 0, 0 \leq z \leq L$ ), затем по формулам (8), (16) с учётом (9), (4) можем вычислить и функции  $T_{2m}(t, z)$  ( $m = \overline{1, 4}$ ), подставив которые в разложение (7), получим приближённое распределение температуры жидкости в трубе  $T(t, z, r)$ , найденное совместным применением метода начальных функций и метода дополнительных граничных условий в нестационарном случае с учётом диффузионной составляющей теплопереноса в осевом направлении  $z$ .

Уточнить полученное приближённое решение можно лишь за счёт использования равенства (10) при  $m \geq 3$ , но в конечном итоге это приведёт к увеличению порядка разрешающего уравнения по сравнению с (18).

**2. Стационарный случай.** Предполагается, что в трубе установился стационарный режим теплопереноса. Кроме того, как это обычно делается [8, 10], будем пренебрегать диффузионной составляющей теплопереноса в жидкости вдоль трубы по сравнению с её конвективной составляющей. В этом случае по сравнению с ранее изложенным (см. п. 1) за счёт еще одного дополнительного граничного условия на стенке трубы ( $r = r_0$ ) удаётся уточнить решение рассматриваемой задачи без повышения порядка разрешающего дифференциального уравнения.

Согласно сделанным предположениям, в уравнении (1) не учитываем слабые, содержащие производные  $\partial T/\partial t$  и  $\partial^2 T/\partial z^2$ , т. е. вместо (3) используем уравнение

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{v(r)}{a} \frac{\partial T}{\partial z} - W \left( \frac{r}{r_0} \right)^{(n+1)/n}, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad z \geq 0, \quad (28)$$

где  $T = T(z, r)$ ; обозначения  $W, a, v(r)$  даны в (2), (4).

Приближённое решение уравнения (28) по-прежнему разыскивается в виде (5)–(7). При этом на основании (8), (9) с учётом сделанных выше предположений получаем<sup>1</sup>

$$T_2(z) = \frac{r_0^2 v_0}{4a} \frac{dT_0}{dz}, \quad T_4(z) = \frac{r_0^4 v_0^2}{64a^2} \frac{d^2 T_0}{dz^2}, \quad T_0 = T_0(z). \quad (29)$$

Справедливыми остаются рассуждения (10)–(13), где все функции не зависят от переменной  $t$ . Для дальнейшего уточнения решения рассматриваемой задачи теплопереноса вновь помимо основного граничного условия (12) используем дополнительные граничные условия на стенке трубы.

С этой целью рассмотрим уравнение (28) при  $r = r_0$ , тогда вместо (14) с учётом (2) получим

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_0} = -W = \text{const}, \quad z \geq 0. \quad (30)$$

<sup>1</sup>Соотношения (29), как и (8), имеют место при выполнении неравенств  $0 < n < 1$ ; случай  $n = 1$  по-прежнему не рассматривается.

Для получения второго дополнительного граничного условия продифференцируем (28) по  $r$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 T}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial r} = \\ = \frac{v(r)}{a} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{n+1}{an} \frac{v_0}{r_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{1/n} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{n+1}{n} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{1/n} \frac{W}{r_0}. \end{aligned} \quad (31)$$

Рассмотрим уравнение (31) при  $r = r_0$ . С учётом (2) получим следующее дополнительное граничное условие:

$$\left( \frac{\partial^3 T}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_0} = -\frac{n+1}{an} \frac{v_0}{r_0} \frac{dT_w}{dz} - \frac{n+1}{n} \frac{W}{r_0}, \quad z \geq 0, \quad (32)$$

где в правой части использовано основное граничное условие (12).

Подставим в равенства (12), (30), (32) разложение (7), в котором в отличие от нестационарного случая (см. п. 1) примем  $M = 5$ . Тогда после элементарных преобразований с учётом (29) получим

$$\begin{aligned} T_{2m}(z) = a_{2m}T_0 + b_{2m} \frac{r_0^2 v_0}{a} \frac{dT_0}{dz} + c_{2m} \frac{r_0^4 v_0^2}{a^2} \frac{d^2 T_0}{dz^2} + d_{2m} r_0^2 W + \\ + e_{2m} \frac{n+1}{n} r_0^2 \left( \frac{v_0}{a} \frac{dT_w}{dz} + W \right) + f_{2m} T_w, \quad m = 3, 4, 5, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} a_6 = -f_6 = -\frac{200}{47}, \quad a_8 = -f_8 = \frac{225}{47}, \quad a_{10} = -f_{10} = -\frac{72}{47}, \\ b_6 = -\frac{87}{94}, \quad b_8 = \frac{46}{47}, \quad b_{10} = -\frac{57}{188}, \\ c_6 = -\frac{57}{1504}, \quad c_8 = \frac{93}{3008}, \quad c_{10} = -\frac{13}{1504}, \\ d_6 = \frac{13}{94}, \quad d_8 = -\frac{41}{188}, \quad d_{10} = \frac{15}{188}, \\ e_6 = -\frac{9}{752}, \quad e_8 = \frac{1}{47}, \quad e_{10} = -\frac{7}{752}. \end{aligned} \quad (34)$$

Для определения функции  $T_0(z)$  по-прежнему используем интегральное уравнение теплового баланса жидкости в трубе, т. е. уравнение (17), в котором, согласно сделанным предположениям, следует принять  $D(T) \equiv 0$ , тогда с учётом (33), (34), (29) вместо (18) получим

$$\begin{aligned} A_1 \frac{r_0^6 v_0^3}{a^3} \frac{d^3 T_0}{dz^3} + A_2 \frac{r_0^4 v_0^2}{a^2} \frac{d^2 T_0}{dz^2} + A_3 \frac{r_0^2 v_0}{a} \frac{dT_0}{dz} + 240T_0 + \\ + A_4 \frac{r_0^4 v_0^2}{a^2} \frac{d^2 T_w}{dz^2} + A_5 \frac{r_0^2 v_0}{a} \frac{dT_w}{dz} - 240T_w + A_6 r_0^2 W = 0, \quad z \geq 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{n+1}{64} \left( \frac{47}{3(7n+1)} - \frac{57}{2(9n+1)} + \frac{93}{5(11n+1)} - \frac{13}{3(13n+1)} \right), \\
 A_2 &= \frac{1}{8} \left[ 3 + (n+1) \left( \frac{47}{5n+1} - \frac{87}{9n+1} + \frac{368}{5(11n+1)} - \frac{57}{3(13n+1)} \right) \right], \\
 A_3 &= \left[ 24 + (n+1) \left( \frac{47}{3n+1} - \frac{50}{9n+1} + \frac{45}{11n+1} - \frac{12}{13n+1} \right) \right], \\
 A_4 &= \frac{(n+1)^2}{32n} \left( -\frac{9}{2(9n+1)} + \frac{32}{5(11n+1)} - \frac{7}{3(13n+1)} \right), \\
 A_5 &= (n+1) \left( -\frac{1}{2n} + \frac{50}{9n+1} - \frac{45}{11n+1} + \frac{12}{13n+1} \right), \\
 A_6 &= 11 - \frac{n+1}{2n} + \frac{94n}{3n+1}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Разрешающее уравнение (35) с учётом (36) определяет начальную функцию  $T_0(z)$  при заданной температуре стенки  $T_w(z)$ . Так как в рассматриваемом случае диффузионная составляющая теплопроводности жидкости в осевом направлении  $z$  не учитывалась, для однозначного интегрирования уравнения (35) необходимо задать соответствующие краевые условия только на входе трубы ( $z = z_* = 0$ ). В силу того что уравнение (35) содержит третью производную от  $T_0(z)$ , в точке  $z = z_*$  нужно получить значения для  $T_0$ ,  $dT_0/dz$ ,  $d^2T_0/dz^2$ , которые определим из традиционного краевого условия, задающего распределение температуры  $T$  во входном сечении трубы [8, 10] (см. первое равенство (24) при условии  $\partial T_*/\partial t \equiv 0$ ). Вновь используя метод взвешенных невязок для приближённого выполнения первого равенства (24), получим, что справедливыми остаются равенства (25), где  $\theta_m^*$  ( $m = 0, 1, 2$ ) — постоянные величины.

Подставим в (25) разложение (7) при  $M = 5$  и учтём равенства (33), (34), (29), тогда после приведения подобных слагаемых будем иметь

$$\begin{aligned}
 B_{m1}T_0 + B_{m2} \frac{r_0^2 v_0}{a} \frac{dT_0}{dz} + B_{m3} \frac{r_0^4 v_0^2}{a^2} \frac{d^2T_0}{dz^2} - B_{m4} \frac{n+1}{n} \frac{r_0^2 v_0}{a} \frac{dT_w}{dz} + B_{m5}T_w + \\
 + \left( B_{m6} \frac{n+1}{n} + B_{m7} \right) r_0^2 W = \frac{2}{r_0^2} \theta_m^*, \quad m = 0, 1, 2, \quad z = 0, \tag{37}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 B_{01} &= \frac{30}{47}, & B_{02} &= \frac{219}{5640}, & B_{03} &= \frac{43}{90240}, \\
 B_{04} &= B_{06} = -\frac{13}{45120}, & B_{05} &= \frac{17}{47}, & B_{07} &= \frac{1}{235}, \\
 B_{11} &= \frac{75}{329}, & B_{12} &= \frac{89}{4935}, & B_{13} &= \frac{103}{421120}, \\
 B_{14} &= B_{16} = \frac{1}{5640}, & B_{15} &= \frac{179}{658}, & B_{17} &= \frac{107}{39480}, \\
 B_{21} &= \frac{115}{987}, & B_{22} &= \frac{107}{10528}, & B_{23} &= \frac{61}{421120}, \\
 B_{24} &= B_{26} = -\frac{5}{42112}, & B_{25} &= \frac{214}{987}, & B_{27} &= \frac{59}{31584}.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Если, как и предполагалось, температура стенки  $T_w$  задана, то в (37) все слагаемые, содержащие сомножители  $W$ ,  $T_w$ ,  $dT_w/dz$  (при  $z = z_* = 0$ ), известны и их следует перенести в правую часть, где  $\theta_m^*$ , согласно правым равенствам в (25), также известные величины. Таким образом, преобразованная система (37) с учётом (38) представляет собой замкнутую СЛАУ, состоящую из трёх уравнений и содержащую в качестве неизвестных величин  $T_0$ ,  $dT_0/dz$ ,  $d^2T_0/dz^2$  при  $z = z_* = 0$ . Решив эту систему, определим все необходимые краевые условия для однозначного интегрирования уравнения (35).

Если температура жидкости на входе в трубу постоянна по сечению  $z = z_* = 0$ , т. е. (см. первые равенства (24))

$$T(z_*, r) = T_*(r) = \bar{T}_* = \text{const}, \quad (39)$$

то выражения для величин в правых частях (37) согласно (25) имеют вид

$$\theta_m^* = \frac{r_0^2}{2(m+1)} \bar{T}_* = \text{const}, \quad m = 0, 1, 2. \quad (40)$$

В случае, когда для аппроксимации краевого условия на входе трубы (см. (39) или первое равенство (24)) используется метод наименьших квадратов, следует рассмотреть минимизацию функции

$$J(\bar{T}_0, \bar{T}'_0, \bar{T}''_0) = \int_0^{r_0} [T(z, r; \bar{T}_0, \bar{T}'_0, \bar{T}''_0) - T_*(r)]^2 dr, \quad z = z_* = 0 \quad (41)$$

трёх переменных

$$\bar{T}_0 \equiv T_0(z), \quad \bar{T}'_0 \equiv \frac{dT_0}{dz}, \quad \bar{T}''_0 \equiv \frac{d^2T_0}{dz^2}, \quad z = z_* = 0. \quad (42)$$

Необходимое условие минимума функции (41) приводит к трём равенствам

$$\begin{aligned} \int_0^{r_0} [T(z, r; \bar{T}_0, \bar{T}'_0, \bar{T}''_0) - T_*(r)] \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_0} dr &= 0, \\ \int_0^{r_0} [T(z, r; \bar{T}_0, \bar{T}'_0, \bar{T}''_0) - T_*(r)] \frac{\partial T}{\partial \bar{T}'_0} dr &= 0, \\ \int_0^{r_0} [T(z, r; \bar{T}_0, \bar{T}'_0, \bar{T}''_0) - T_*(r)] \frac{\partial T}{\partial \bar{T}''_0} dr &= 0, \quad z = z_* = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Подставляя в (43) разложение (7) и учитывая зависимости функций  $T_{2m}$  ( $1 \leq m \leq M$ ) от величин (42) (см. (29), (33)), после элементарных преобразований будем иметь систему

$$\sum_{m=0}^M D_{lm} T_{2m}(z) = T_l^*, \quad l = 0, 1, 2, \quad z = z_* = 0, \quad M = 5, \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} T_l^* &= \frac{1}{r_0} \int_0^{r_0} \sum_{m=0}^M C_{lm} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m} T_*(r) dr, \\ D_{lm} &= \sum_{j=0}^M \frac{C_{lj}}{2(m+j)+1}, \quad l = 0, 1, 2, \quad M = 5; \end{aligned} \quad (45)$$

ненулевые значения коэффициентов  $C_{lj}$  следующие:

$$\begin{aligned} C_{00} = C_{11} = C_{22} = 47, & \quad C_{03} = -200, & \quad C_{04} = 225, \\ C_{05} = -72, & \quad C_{13} = -174, & \quad C_{14} = 184, \\ C_{15} = -57, & \quad C_{23} = -114, & \quad C_{24} = 93, \\ C_{25} = -26. \end{aligned} \quad (46)$$

Подставим в (44) выражения (29), (33) и соберём подобные слагаемые, после чего с учётом (42), (45), (46) окончательно получим

$$\begin{aligned} F_{l1}\bar{T}_0 + F_{l2}\frac{r_0^2 v_0}{a}\bar{T}'_0 + F_{l3}\frac{r_0^4 v_0^2}{a^2}\bar{T}''_0 = \\ = T_l^* - \sum_{m=3}^M D_{lm} \left[ d_{2m} r_0^2 W + e_{2m} \frac{n+1}{n} r_0^2 \left( \frac{v_0}{a} \frac{dT_w}{dz} + W \right) + f_{2m} T_w \right], \end{aligned} \quad (47)$$

$l = 0, 1, 2, \quad z = z_* = 0, \quad M = 5,$

где

$$\begin{aligned} F_{l1} &= \frac{1}{47} \left( 47 D_{l0} + \sum_{m=3}^5 C_{0m} D_{lm} \right), \\ F_{l2} &= \frac{1}{188} \left( 47 D_{l1} + \sum_{m=3}^5 C_{1m} D_{lm} \right), \\ F_{l3} &= \frac{1}{3008} \left( 47 D_{l2} + \sum_{m=3}^5 C_{2m} D_{lm} \right), \quad l = 0, 1, 2; \end{aligned} \quad (48)$$

коэффициенты  $d_{2m}$ ,  $e_{2m}$ ,  $f_{2m}$  определены в (34). В правые части равенств (47) перенесены все известные в сечении  $z = z_* = 0$  величины.

Система трёх уравнений (47) с учётом (34), (45), (46), (48) образует замкнутую СЛАУ относительно неизвестных  $\bar{T}_0$ ,  $\bar{T}'_0$ ,  $\bar{T}''_0$ . После решения этой системы с учётом обозначений (42) получим в рамках метода наименьших квадратов (41) все необходимые краевые условия для однозначного интегрирования разрешающего уравнения (35).

**3. Модельная задача.** В качестве модельной задачи рассмотрим случай стационарного теплопереноса при постоянной температуре стенки

$$T_w(z) = T_w = \text{const}, \quad z \geq 0. \quad (49)$$

Для удобства дальнейшего анализа результатов расчетов введём в рассмотрение безразмерные переменные и величины

$$\begin{aligned} \theta_0(Z) &= \frac{T_0(z) - T_w}{\bar{T}_* - T_w}, \quad \bar{W} = \frac{r_0^2 W}{\bar{T}_* - T_w} = \frac{3n+1}{2n} \frac{\beta}{0.097}, \\ Z &= \frac{a}{\bar{v} r_0^2} z = \frac{z}{r_0 \text{Pe}}, \quad \text{Pe} = \frac{\bar{v} r_0}{a}, \quad \bar{v} = \frac{n+1}{3n+1} v_0, \end{aligned} \quad (50)$$

где  $\bar{v}$  — средняя скорость жидкости по сечению [10];  $\text{Pe}$  — число Пекле;  $\bar{T}_*$  — характерное значение температуры жидкости на входе в трубу;  $\beta$  — безразмерный параметр, характеризующий влияние диссипации механической энергии на теплообмен и введённый в [10]; числовой множитель  $1/0.097$  введён

для того, чтобы значения параметра  $\beta$  в настоящем исследовании и в [10] полностью совпадали.

Разрешающее уравнение (35) с учётом (49), (50) примет вид

$$E_3 \frac{d^3 \theta_0}{dZ^3} + E_2 \frac{d^2 \theta_0}{dZ^2} + E_1 \frac{d\theta_0}{dZ} + 240\theta_0 = -A_6 \bar{W} = \text{const}, \quad Z \geq 0, \quad (51)$$

где

$$E_1 = NA_3, \quad E_2 = N^2 A_2, \quad E_3 = N^3 A_1, \quad N = \frac{3n+1}{n+1}; \quad (52)$$

постоянные  $A_i$  определены в (36).

Предположим, что на входе в трубу ( $z = z_* = 0$ ) температура жидкости постоянна по сечению (см. (39)), т. е. рассматривается аналог задачи Гретца—Нуссельта. Тогда на основании метода взвешенных невязок для однозначного интегрирования уравнения (51) из системы (37) с учётом (40), (49), (50), (52) получим следующие краевые условия при  $Z = 0$ :

$$\begin{aligned} B_{m3} N^2 \frac{d^2 \theta_0}{dZ^2} + B_{m2} N \frac{d\theta_0}{dZ} + B_{m1} \theta_0 = \\ = \frac{1}{m+1} - \left( B_{m6} \frac{n+1}{n} + B_{m7} \right) \bar{W}, \quad m = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (53)$$

где значения коэффициентов  $B_{mi}$  определены в (38).

Если же необходимые краевые условия для уравнения (51) определяются методом наименьших квадратов, то из системы (47) с учётом (39), (45), (49), (50), (52) получим

$$\begin{aligned} F_{l3} N^2 \frac{d^2 \theta_0}{dZ^2} + F_{l3} N \frac{d\theta_0}{dZ} + F_{l1} \theta_0 = \\ = D_{l0} - \left[ \left( 104 - 9 \frac{n+1}{n} \right) D_{l3} - \left( 164 - 16 \frac{n+1}{n} \right) D_{l4} + \right. \\ \left. + \left( 60 - 7 \frac{n+1}{n} \right) D_{l5} \right] \frac{\bar{W}}{752}, \quad l = 0, 1, 2, \quad Z = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

где значения коэффициентов  $F_{li}$ ,  $D_{lj}$  определены в (45), (48).

На основании (7), (29), (33), (49), (50), (52) безразмерная температура жидкости в трубе имеет выражение

$$\theta(Z, R) = \theta_0(Z) + \sum_{m=1}^M \theta_{2m}(Z) R^{2m}, \quad 0 \leq R \leq 1, \quad Z \geq 0, \quad M = 5, \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} \theta = \frac{T - T_w}{T_* - T_w}, \quad R = \frac{r}{r_0}, \quad \theta_2(Z) = \frac{N}{4} \frac{d\theta_0}{dZ}, \quad \theta_4(Z) = \frac{N^2}{64} \frac{d^2 \theta_0}{dZ^2}, \\ \theta_{2m}(Z) = a_{2m} \theta_0 + b_{2m} N \frac{d\theta_0}{dZ} + c_{2m} N^2 \frac{d^2 \theta_0}{dZ^2} + \left( d_{2m} + \frac{n+1}{n} e_{2m} \right) \bar{W}, \end{aligned} \quad (56)$$

$m = 3, 4, 5;$

коэффициенты  $a_{2m}, b_{2m}, c_{2m}, d_{2m}, e_{2m}$  определены в (34).

Согласно (50), (52) уравнение (51) является обыкновенным неоднородным дифференциальным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами и постоянной правой частью, поэтому его решение имеет вид

$$\theta_0(Z) = -\frac{A_6 \bar{W}}{240} + \sum_{m=1}^3 G_m \exp(\alpha_m Z), \quad Z \geq 0, \quad (57)$$

где  $\alpha_m$  — характеристические числа уравнения (51);  $G_m$  — постоянные интегрирования, определяемые из краевых условий, например, (53) или (54).

В качестве конкретного примера рассмотрим течение расплавленного полиэтилена высокого давления П153-01К ( $n = 0.463$  [10]). При этом значении  $n$  корни характеристического уравнения, соответствующего (51), с учётом (52) имеют следующие значения (см. (57)):

$$\alpha_1 = -3.9547, \quad \alpha_2 = -23.2203, \quad \alpha_3 = -42.7902. \quad (58)$$

На рис. 1 пунктирные линии характеризуют заданное распределение температуры жидкости на входе в трубу ( $Z = 0$ ), а сплошные кривые — аппроксимации этих температур, полученные разными методами.

Горизонтальная пунктирная прямая 1 на рис. 1, а соответствует безразмерной температуре жидкости, заданной постоянной по входному сечению трубы (см. (39) с учётом (56)). Кривая 2 получена при  $Z = 0, \beta = 0$  (отсутствие диссипации) по формулам (53), (55)–(57) с учётом (58), т. е. при использовании метода взвешенных невязок для аппроксимации краевого условия (39). Кривая 3 определена при  $Z = 0, \beta = 0$  на основании соотношений (54)–(58), т. е. при использовании метода наименьших квадратов для аппроксимации краевого условия для температуры жидкости на входе в трубу. Сопоставление кривых 2 и 3 с линией 1 показывает, что применение метода взвешенных невязок (в его варианте (53) или (37), (38)) оказалось в данной задаче неудачным (кривая 2). Метод же наименьших квадратов (кривая 3) позволяет удовлетворительно аппроксимировать температуру жидкости, заданную на входе в трубу.

В работе [10] для приближённого решения рассматриваемой задачи использовался другой аналитический (а именно, вариационный) метод с применением преобразования Лапласа по продольной координате  $z$ . Решение, приведённое в [10], имеет следующую структуру:

$$\theta(Z, R) = \sum_{m=1}^3 \sum_{i=1}^3 (\gamma_{mi} + \beta \delta_{mi}) \exp(\chi_i Z) (1 - R^{2m}), \quad (59)$$

$$0 \leq R \leq 1, \quad Z \geq 0,$$

где [10]

$$\chi_1 = -4.0008, \quad \chi_2 = -14.8547, \quad \chi_3 = -145.3775; \quad (60)$$

числовые значения коэффициентов  $\gamma_{mi}, \delta_{mi}$  приведены в формуле (2.34) в [10].

Сравнение значений (58), (60) показывает, что первые характеристические числа, полученные разными методами, в этой задаче практически совпадают, а вторые и третьи характеристические числа (отвечающие за распределение температурного поля на входном термическом участке [8]) различаются

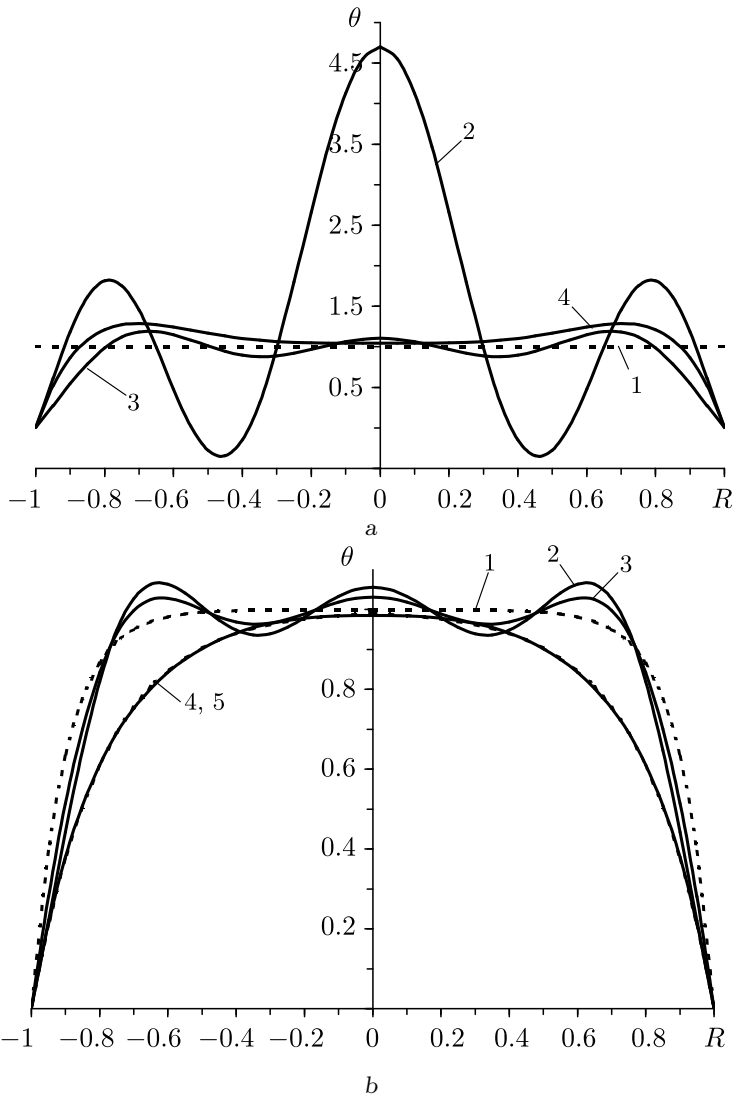


Рис. 1. Аппроксимация температуры жидкости на входе в трубу: а) случай без учета температуры стенки; б) случай с учетом температуры стенки

[Figure 1. An approximation of the fluid temperature at the inlet of the pipe in case without the wall temperature (a), and in case with the wall temperature (b); dashed lines describe the predetermined fluid temperature at the inlet of the pipe; solid lines describe the fluid temperature approximations (they were obtained by various methods); line 1 in Fig. 1, a describe the dimensionless fluid temperature at the inlet of the pipe (look at Eq. (39) with considering (56)); line 2 in Fig. 1, a is obtained by Eqs. (53), (55)–(57) with considering Eqs. (58) when  $Z = 0, \beta = 0$  (the parameter  $\beta$  characterizes the mechanical energy dissipation, look at Eq. (50)); line 3 in Fig. 1, a is obtained by Eqs. (54)–(58) when  $Z = 0, \beta = 0$ ; line 4 in Fig. 1, a is obtained by Eqs. (59), (60) when  $Z = 0, \beta = 0$ ; line 1 in Fig. 1, b corresponds to the boundary condition (61) when  $\eta = 10$ ; line 2 in Fig. 1, b approximates the line 1 (Fig. b) when  $\beta = 0$  (look at Eq. (50)); line 3 in Fig. 1, b approximates the line 1 (Fig. b) when  $\beta = 1$ ; dashed line 4 in Fig. 1, b describes the relationship (59) obtained when  $\beta = 1$  with considering (65); solid line 4 in Fig. 1, b approximate the line 4 (Fig. b) by the least squares method (look at Eq. (54) with considering Eqs. (62), (63), (65))]



существенно. Кроме того, сопоставление приближённых решений (55), (59) с учётом (56), (57) указывает на то, что оба решения представляют собой линейную комбинацию трёх экспоненциальных функций, зависящих от продольной координаты  $Z$ , но решение (55) по сравнению с (59) имеет на два порядка более высокую аппроксимацию по переменной  $R$ , т. е. более точно описывает распределение температуры в поперечных сечениях трубы.

Кривая 4 на рис. 1, а определена по формулам (59), (60) при  $Z = 0$ ,  $\beta = 0$ . Сравнение кривых 3 и 4 с линией 1 показывает, что кривая 3 лучше аппроксимирует пунктирную прямую 1, чем линия 4. Дополнительные расчёты показали, что при наличии диссипации (например, при  $\beta = 1$ ) расчётные кривые визуально практически не отличаются от кривых 3 и 4.

Строго говоря, краевое условие (39) не согласовано с граничным условием на стенке ( $T_*(r_0) = \bar{T}_* \neq T_w$ ), это приводит к необходимости построения обобщённого (разрывного) решения задачи теплопереноса в жидкости, протекающей по трубе [15]. Приближённые же методы, разработанные в настоящем исследовании или в [8, 10], позволяют построить решения, близкие лишь к классическим решениям соответствующих краевых задач, в которых все краевые условия согласованы. Исходя из этого зададим на входе в трубу краевое условие для температуры жидкости, согласованное с граничным условием на стенке трубы. С этой целью вместо (39) используем, например, следующее краевое условие:

$$T(z_*, r) = T_*(r) = \bar{T}_* - (\bar{T}_* - T_w) \exp(-\eta(r_0 - r)), \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad \eta = \text{const} > 0. \quad (61)$$

Из равенства (61) следует, что  $T(z_*, r_0) = T_*(r_0) = T_w$ , т. е. условие согласования выполняется. Однако при подстановке (61) в (6) равенства в последнем строго выполняться не будут, но при достаточно больших значениях параметра  $\eta$  можно считать, что условия (6) выполняются приближённо с приемлемой точностью, по крайней мере при  $m = 1$ .

Так, на рис. 1, *b* пунктирная кривая 1 соответствует краевому условию (61) при  $\eta = 10$ , а кривые 2 и 3 аппроксимируют линию 1 при  $\beta = 0$  и  $\beta = 1$  соответственно. Кривые 2 и 3 определены методом наименьших квадратов, т. е. на основе системы (54), из правых частей которой согласно (61) нужно вычесть величины  $P_l$  ( $l = 0, 1, 2$ ), определяемые так:

$$\begin{aligned} P_0 &= 47R_0 - 200R_6 + 225R_8 - 72R_{10}, \\ P_1 &= 47R_2 - 174R_6 + 184R_8 - 57R_{10}, \\ P_2 &= 47R_4 - 114R_6 + 93R_8 - 26R_{10}, \end{aligned} \quad (62)$$

где [16]

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{1}{e^\eta} \int_0^1 R^i e^{\eta R} dR = \\ &= \frac{1}{e^\eta} \left\{ e^{\eta R} \left[ \frac{R^i}{\eta} + \sum_{k=1}^i (-1)^k \frac{i(i-1) \dots (i-k+1)}{\eta^{k+1}} R^{i-k} \right] \right\} \Big|_0^1. \end{aligned} \quad (63)$$

Из сравнения кривых 2 и 3 с линией 1 на рис. 1, *b* видно, что в случае задания согласованного краевого условия на входе в трубу метод дополнительных граничных условий позволяет хорошо аппроксимировать входную

температуру жидкости, причём при наличии диссипации механической энергии (см. кривую 3) аппроксимация улучшается.

Если потребовать, чтобы краевое условие на входе в трубу было согласовано не только с основным граничным условием на стенке ( $T_*(r_0) = T_w$ ), но и с дополнительным граничным условием (30), то после подстановки (61) в (30) с учётом (50) получим

$$(r_0\eta)^2 + r_0\eta = \bar{W}. \quad (64)$$

Так как согласно (61) интерес представляет только значение  $\eta > 0$ , из (64) имеем

$$\eta = \frac{-1 + \sqrt{D}}{2r_0}, \quad D = 1 + 4\bar{W}, \quad (65)$$

откуда следует, что при  $\bar{W} > 0$  ( $\beta > 0$ ) выполняется строгое неравенство  $\eta > 0$ .

На рис. 1, *b* пунктирная кривая 4 характеризует зависимость (61), полученную при  $\beta = 1$  с учётом (65), а сплошная линия 5 соответствует аппроксимации кривой 4 по методу наименьших квадратов (см. (54) с учётом (62), (63), (65)).

Как видно из рис. 1, *b*, кривые 4 и 5 визуально практически не различаются, что свидетельствует об очень хорошей степени аппроксимации краевого условия для температуры на входе в трубу.

На рис. 2, 3 изображены профили температур в разных сечениях трубы, определённые без учёта ( $\beta = 0$ , рис. 2) и с учётом ( $\beta = 1$ , рис. 3) механической диссипации энергии. На рис. 2, *a* и 3, *a* приведены результаты расчётов, выполненных на основе метода дополнительных граничных условий, а на рис. 2, *b* и 3, *b* для сравнения приведены результаты расчёта по формулам из [10] (см. (59), (60)).

Пунктирная горизонтальная прямая на рис. 2, 3 характеризует заданную постоянную безразмерную температуру на входе в трубу (см. (39), (56)), остальные же линии определены на основе указанных методов. Кривые 1 определены при  $Z = 0$ , линии 2 — при  $Z = 0.01$ , кривые 3 — при  $Z = 0.05$ , линии 4 — при  $Z = 0.1$ , кривые 5 — при  $Z = 0.5$ , линии 6 — при  $Z = 1$ , т. е. кривые 1 аппроксимируют горизонтальные пунктирные прямые. Согласно этому, линия 1 на рис. 2, *a* совпадает с кривой 3 на рис. 1, *a*, а линия 1 на рис. 2, *b* совпадает с кривой 4 на рис. 1, *a*.

Из сравнения кривых с одинаковыми номерами на рис. 2, *a* и 2, *b* следует, что при отсутствии диссипации ( $\beta = 0$ ) расчёт по формулам из [10] (рис. 2, *b*) приводит к более быстрому выравниванию температуры жидкости и стенки вдоль трубы, чем в расчётах по методу дополнительных граничных условий (рис. 2, *a*).

Ещё большее различие в расчётах наблюдается при учёте диссипации ( $\beta = 1$ ). Действительно, в этом случае расчёт по методу дополнительных граничных условий приводит к тому, что температурное поле вдоль трубы достаточно быстро стабилизируется и уже при  $Z \geq 0.5$  почти не изменяется (см. кривые 5, 6 на рис. 3, *a*, которые визуально неразличимы), причём на оси трубы ( $R = 0$ ) температура практически не отличается от температуры на входе ( $\theta(Z, 0) \approx 1$ ). Согласно же расчёту по формулам, приведённым в [10]

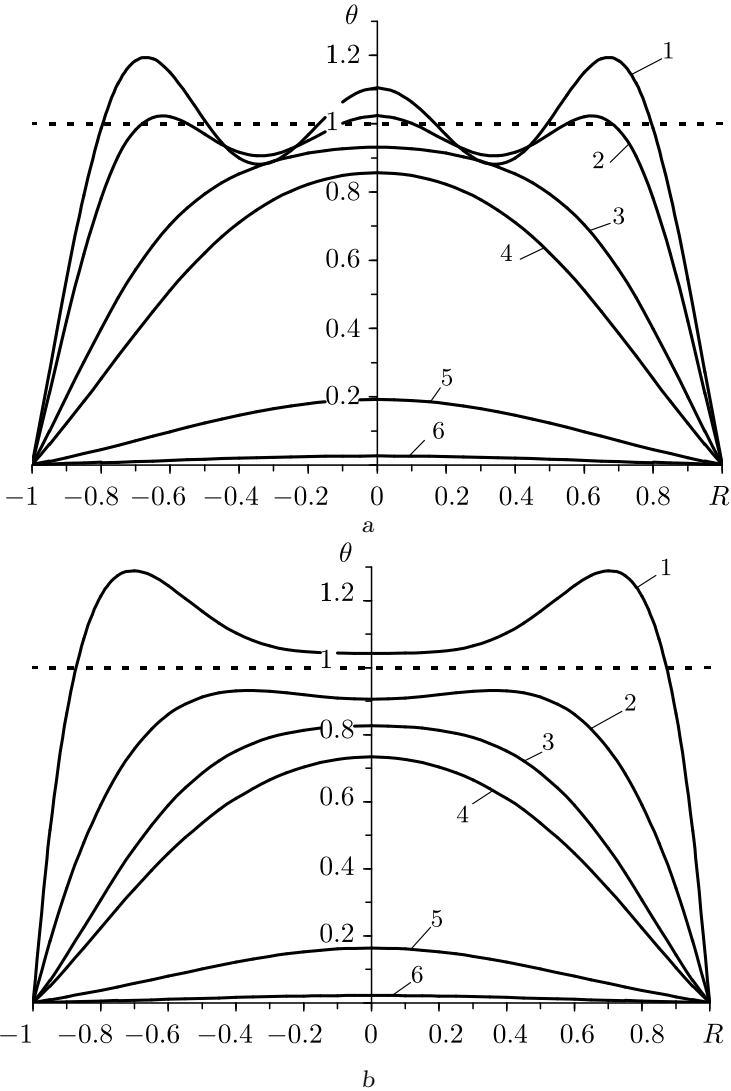


Рис. 2. Профили температуры жидкости в разных сечениях трубы, рассчитанные без учёта диссипации механической энергии ( $\beta = 0$ ) по методу дополнительных граничных условий (а); по методу, предложенному в [10] (б)

[Figure 2. Temperature profiles for fluid at the different sections of the pipe calculated without taking into account mechanical energy dissipation (when  $\beta = 0$ ) by the additional boundary conditions method (look at Eqs. (54)–(58)) (a), and by the method proposed in [10] (look at Eqs. (59), (60)) (b); lines with the label 1 determined at  $Z = 0$ ; lines with the label 2 determined at  $Z = 0.01$ ; lines with the label 3 determined at  $Z = 0.05$ ; lines with the label 4 determined at  $Z = 0.1$ ; lines with the label 5 determined at  $Z = 0.5$ ; lines with the label 6 determined at the inlet of the pipe (look at Eqs. (39), (56)); line 1 in Fig. 2, a coincides with the line 3 in Fig. 1, a, and line 1 in Fig. 2, b coincides with the line 4 in Fig. 1, a]

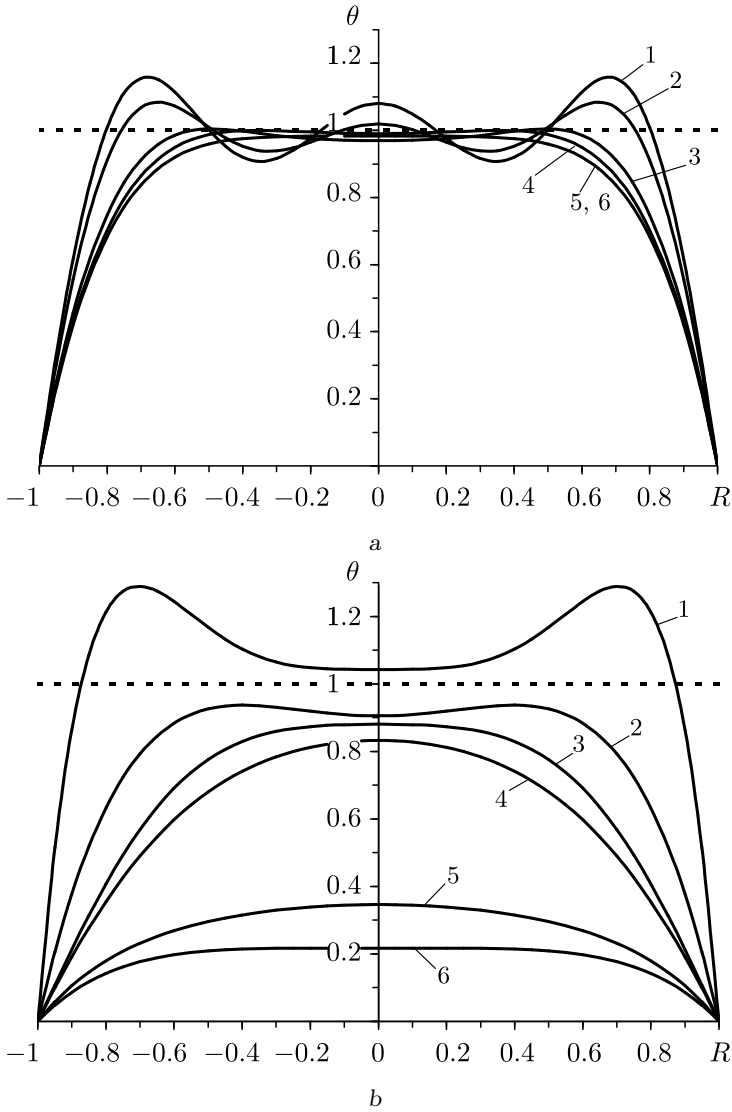


Рис. 3. Профили температуры жидкости в разных сечениях трубы, рассчитанные с учётом диссипации механической энергии ( $\beta = 1$ ) по методу дополнительных граничных условий (а); по методу, предложенному в [10] (б)

[Figure 3. Temperature profiles for fluid at the different sections of the pipe calculated with taking into account mechanical energy dissipation (when  $\beta = 1$ ) by the additional boundary conditions method (look at Eqs. (54)–(58)) (a), and by the method proposed in [10] (look at Eqs. (59), (60)) (b); lines with the label 1 determined at  $Z = 0$ ; lines with the label 2 determined at  $Z = 0.01$ ; lines with the label 3 determined at  $Z = 0.05$ ; lines with the label 4 determined at  $Z = 0.1$ ; lines with the label 5 determined at  $Z = 0.5$ ; lines with the label 5 determined at  $Z = 1$ ]

(рис. 3, б), даже при наличии существенной диссипации механической энергии температура жидкости вдоль трубы существенно изменяется, постепенно выравниваясь с температурой стенки.

Это существенное различие в профилях температуры, приведённых на рис. 3, а и 3, б, объясняется, очевидно, тем, что кривые, изображённые на

рис. 3, а, получены по формулам, которые имеют на два порядка более высокую аппроксимацию температуры по  $R$ , чем формулы, по которым рассчитаны кривые на рис. 3, б (см. соответственно (55)–(58) и (59), (60)).

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-90400-Укр\_а).

#### ORCID

**Андрей Петрович Янковский:** <http://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Митрофанова О. В. *Гидродинамика и теплообмен закрученных потоков в каналах ядерно-энергетических установок*. М.: Физматлит, 2010. 288 с.
2. *Теплообмен*: Избранные работы члена-корреспондента РАН Б. С. Петухова и его учеников. М.: Шанс, 2012. 209 с.
3. Лаптев А. Г., Николаев Н. А., Башаров М. М. *Методы интенсификации и моделирования тепломассообменных процессов*. М.: Теплотехник, 2011. 288 с.
4. *Композиционные материалы* / ред. В. В. Васильев, Ю. М. Тарнопольский. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
5. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. *Пространственно-армированные композиционные материалы*. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
6. Янковский А. П. Уточненная модель стационарного теплопереноса в композитных телах, армированных трубками с жидким теплоносителем, движущимся в ламинарном режиме. 1. Постановка задачи // *Механика композитных материалов*, 2014. Т. 50, № 1. С. 115–132.
7. Янковский А. П. Моделирование теплопереноса в композитных телах, армированных трубками с движущимся в ламинарном режиме жидким несжимаемым теплоносителем // *Теплофизика и аэромеханика*, 2015. Т. 22, № 1. С. 107–129.
8. Кудинов В. А., Кудинов И. В. *Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности* / ред. Э. М. Карташов. М.: Либроком, 2012. 280 с.
9. Варгафтик Н. Б. *Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей*. М.: Физматгиз, 1963. 708 с.
10. Шишляников В. В. *Течение и теплообмен расплавов полимеров в трубах и каналах*. Волгоград: ВолГТУ, 2011. 164 с.
11. Немировский Ю. В., Янковский А. П. *Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций*. Новосибирск: Арт-Авеню, 2008. 512 с.
12. Агаловян Л. А. *Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек*. М.: Физматлит, 1997. 414 с.
13. Бахвалов Н. С. *Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения)*. М.: Наука, 1973. 631 с.
14. Washizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* / International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics. vol.9. Oxford, New York: Pergamon Press, 1982. xv+630 pp.
15. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1977. 735 с.
16. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды*. М.: Физматгиз, 1981. 798 с.

Поступила в редакцию 06/IV/2015;  
в окончательном варианте — 05/V/2015;  
принята в печать — 08/VIII/2015.

MSC: 80A20, 35Q79, 80M99, 76A05

## METHOD OF ADDITIONAL BOUNDARY CONDITIONS IN THE PROBLEM OF HEAT TRANSFER FOR NON-NEWTONIAN FLUID MOVING IN LAMINAR MODE IN CIRCULAR PIPE

A. P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

### Abstract

Taking into account the dissipation of mechanical energy the problem of heat transfer is formulated for non-Newtonian fluid moving in stable laminar mode in circular pipe. Two variants were considered: 1) non-stationary problem taking into account the diffusion component of heat transfer along the pipe; 2) the stationary problem without taking into account the longitudinal diffusion component of heat transfer in fluids. The synthesis of method of initial functions and method of complementary boundary conditions were used for the approximate solving of problems that was possible to reduce by one the dimensionality of the problem by spatial variables. In the stationary case, due to the additional boundary conditions it was able to obtain a higher degree of approximation of the temperature field than in the non-stationary case. Different methods of approximation of boundary conditions for the temperature of the liquid were studied at the entrance to the pipe with coordination and without coordination for the wall temperature. Calculations of temperature fields were conducted for melting of high-pressure polyethylene in accounting and neglect of dissipation of mechanical energy in the polymer. Comparison with calculations on the basis of other approximate method, previously developed, different from the one proposed in this study, was performed.

**Keywords:** heat transfer in pipe, non-Newtonian fluid, laminar flow regime, method of initial functions, method of additional boundary conditions.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1433>

**Acknowledgments.** This work has been supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-01-90400-Ukr.a).

### ORCID

Andrey P. Yankovskii: <http://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

© 2015 Samara State Technical University.

### Please cite this article in press as:

Yankovskii A. P. Method of additional boundary conditions in the problem of heat transfer for non-Newtonian fluid moving in laminar mode in circular pipe, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 3, pp. 578–600. doi: [10.14498/vsgtu1433](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1433). (In Russian)

### Author Details:

Andrey P. Yankovskii (Dr. Phys. & Math. Sci.; [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru)), Leading Research Scientist, Lab. of Fast Processes Physic.

## REFERENCES

1. Mitrofanova O. V. *Gidrodinamika i teploobmen zakruchennykh potokov v kanalakh iaderno-energeticheskikh ustanovok* [Hydrodynamics and heat transfer of swirling flows in channels of nuclear power plants]. Moscow, Fizmatlit, 2010, 288 pp. (In Russian)
2. *Teploobmen Heat Transfer, Selected Works of Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences B. S. Petukhov and His Disciples*. Moscow, Shans, 2012, 209 pp. (In Russian)
3. Laptev A. G., Nikolaev N. A., Basharov M. M. *Metody intensivatsii i modelirovaniia teplomassoobmennyykh protsessov* [Methods for Intensification and Modeling of Heat- and Mass-Transfer Processes]. Moscow, Teplotekhnika, 2011, 288 pp. (In Russian)
4. *Kompozitsionnye materialy* [Composite Materials], ed. V. V. Vasil'ev, Yu. M. Tarnopol'skii. Moscow, Mashinostroenie, 1990, 512 pp. (In Russian)
5. Tarnopol'skii Yu. M., Zhigun I. G., Polyakov V. A. *Prostranstvenno-armirovannyye kompozitsionnye materialy* [Spatially-Reinforced Composite Materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1987, 224 pp. (In Russian)
6. Yankovskii A. P. A Refined Model of Stationary Heat Transfer in Composite Bodies Reinforced with Pipes Containing a Heat-Transfer Fluid Moving in Laminar Flow Conditions, *Mechanics of Composite Materials*, 2014, vol. 50, no. 1, pp. 83–94. doi: [10.1007/s11029-014-9395-1](https://doi.org/10.1007/s11029-014-9395-1).
7. Yankovskii A. P. Modelling of heat transfer in composite bodies reinforced with tubes with incompressible liquid coolant moving in laminar regime, *Thermophysics and Aeromechanics*, 2015, vol. 22, no. 1, pp. 105–126. doi: [10.1134/S0869864314010102](https://doi.org/10.1134/S0869864314010102).
8. Kudinov V. A., Kudinov I. V. *Metody resheniia parabolicheskikh i giperbolicheskikh uravnenii teploprovodnosti* [Solution Methods for Parabolic and Hyperbolic Equations of Heat Conductivity], ed. E. M. Kartashov. Moscow, Librokombizdat, 2012, 280 pp. (In Russian)
9. Vargaftik N. B. *Handbook of physical properties of liquids and gases: pure substances and mixtures*. Washington, Hemisphere Pub., 1983, xii+758 pp. doi: [10.1007/978-3-642-52504-9](https://doi.org/10.1007/978-3-642-52504-9).
10. Shishlyannikov V. V. *Techenie i teploobmen rasplavov polimerov v trubakh i kanalakh* [Flow and heat of polymers melts in pipes and channels]. Volgograd, Volgograd State Technical Univ., 2011, 164 pp. (In Russian)
11. Nemirovskii Yu. V., Yankovskii A. P. *Teploprovodnost' odnorodnykh i kompozitnykh tonkostennykh konstruksii* [Thermal Conductivity for Homogeneous and Composite Structures]. Novosibirsk, Art-Aveniu, 2008, 512 pp. (In Russian)
12. Aghalovyan L. *Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells*. Singapore, World Scientific Publishing Co., 2013, xv+360 pp. doi: [10.1142/9048](https://doi.org/10.1142/9048).
13. Bakhvalov N. S. *Chislennyye metody (analiz, algebra, obyknovennyye differentsial'nye uravneniia)* [Numerical Methods: Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1973, 631 pp. (In Russian)
14. Washizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, vol. 9. Oxford, New York, Pergamon Press, 1982, xv+630 pp.
15. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1977, 735 pp. (In Russian)
16. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i riady* [Integrals and series]. Moscow, Fizmatgiz, 1981, 798 pp. (In Russian)

Received 06/IV/2015;  
 received in revised form 05/V/2015;  
 accepted 08/VIII/2015.