Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 1. С. 65–73
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1469

УДК 517.956.3

О ЗАДАЧАХ СО СМЕЩЕНИЯМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Е. А. Уткина

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Россия, 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18.

Аннотация

В представленной статье рассмотрены три задачи для гиперболического уравнения в характеристической области на плоскости. В обсуждаемых задачах хотя бы одно из условий Гурса заменено на нелокальное условие на соответствующей характеристике. Нелокальные условия представляют собой линейную комбинацию нормальных производных в точках на противоположных характеристиках. В случае замены одного условия решение осуществляется сведением к задаче Гурса, для которой оно существует и единственно. При этом для нахождения неизвестного условия Гурса автор получает интегральное уравнение, которое переписывает в операторной форме и находит случаи его однозначной разрешимости. Для доказательства однозначной разрешимости упомянутого уравнения автор показывает непрерывность линейного оператора и то, что некоторая его степень является сжимающим отображением. Известно, что в этом случае искомое условие Гурса можно записать в виде ряда Неймана. Подробно рассматривается только одна из поставленных задач, но для обеих сформулированы теоремы об однозначной разрешимости. Если же заменены два условия, единственность решения в предположении, что оно существует, доказывается методом априорных оценок. Для этого используются скалярное произведение и норма в пространстве L_2. В результате были получены условия на коэффициенты гиперболического уравнения, которые обеспечивают единственность решения задачи. После этого приведен пример, подтверждающий, что полученные условия являются существенными. А именно, построено уравнение, коэффициенты которого не удовлетворяют условиям последней теоремы, заданы условия на характеристиках и построено ненулевое решение.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальные условия, задача со смещениями.

Образец для цитирования
Уткина Е. А. О задачах со смещениями в граничных условиях для гиперболического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 65–73. doi: 10.14498/vsgtu1469.

Сведения об авторе
Елена Анатольевна Уткина (д.ф.-м.н., доц.; eutkina1@yandex.ru), доцент, каф. общей математики.

Многие авторы работают над изучением задач со смещениями в граничных условиях, называемых еще нелокальными, для различных уравнений в частных производных (см., например, [1–8] и др.).

В статье [9] для уравнения

$$L(u) = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f(x, y) \tag{1}$$

в характеристическом прямоугольнике $D = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1\}$ рассмотрена задача об отыскании решения по условиям, связывающим значения искомой функции в четырех переменных точках, лежащих на границе D. Указаны условия, обеспечивающие возможность редукции задачи к системе нагруженных уравнений Фредгольма, которая затем и исследуется. В представленной статье в тех же точках берутся значения нормальных производных искомой функции. Предлагается способ получения условий, обеспечивающих однозначную разрешимость поставленных задач.

Задача 1. *Найти функцию $u(x, y) \in C^{1,1}(D) \cap C^{0,0}(\overline{D})$, являющуюся в области D решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям*

$$u(0, y) = \varphi(y), \tag{2}$$

$$u_y(x, 0) = \alpha(x) + \beta(x)u_y(x, y_1), \tag{3}$$

где α, β, φ — известные достаточно гладкие функции. Считаем, что коэффициенты уравнения (1) принадлежат классам $a \in C^{1,0}(\overline{D})$, $b \in C^{0,1}(\overline{D})$, c, $f \in C^{0,0}(\overline{D})$.

Эта задача при $\beta(x) \equiv 0$ изучалась ранее в [10]. А само условие рассматривалось для другого уравнения и применительно задаче к другого типа в [11].

Для редукции к задаче Гурса требуется определить неизвестное условие

$$u(x, 0) = \psi(x). \tag{4}$$

Переобозначим в (1) x через t и проинтегрируем полученное уравнение по t в пределах от x_* до x $(x_*, x) \in D$, устремив x_* к 0, y к 0, и получим первое интегральное уравнение:

$$u_y(x, 0) - u_y(0, 0) + au(x, 0) - au(0, 0) + \int_0^x \big(-a_t(t, 0) + c(t, 0)\big)u(t, 0)dt + \\ + \int_0^x b(t, 0)u_y(t, 0)dt = \int_0^x f(t, 0)dt.$$

Затем, также устремив x_* к 0, а y — к y_1, получим второе интегральное уравнение:

$$u_y(x, y_1) - u_y(0, y_1) + au(x, y_1) - au(0, y_1) + \int_0^x \big(-a_t(t, y_1) + c(t, y_1)\big)u(t, y_1)dt + \\ + \int_0^x b(t, y_1)u_y(t, y_1)dt = \int_0^x f(t, y_1)dt.$$

Умножим второе из полученных уравнений на $\beta(x)$ и вычтем из первого:

$$\alpha(x)-\varphi'(0)+\beta(x)\varphi'(y_1)+a(x,0)u(x,0)-\beta(x)a(x,y_1)u(x,y_1)-a(0,0)\varphi(0)+ \\ +a(0,y_1)\varphi(y_1)\beta(x)+\int_0^x\big((-a_t+c)u(t,0)+b(t,0)u_y(t,0)\big)dt- \\ -\beta(x)\int_0^x\big((-a_t+c)(t,y_1)u(t,y_1)+b(t,y_1)u_y(t,y_1)\big)dt= \\ =\int_0^x f(t,0)dt-\beta(x)\int_0^x f(t,y_1)dt. \quad (5)$$

Далее запишем решение задачи для (1) с условиями (2), (4) (это и есть задача Гурса). Соотношения (2), (4) представляют собой граничные значения Гурса, решение которой хорошо известно [10,12] и др. Мы будем использовать формулу (1.20) из [10]:

$$u(x,y)=R\left(x,0,x,y\right)\psi(x)+R\left(0,y,x,y\right)\varphi(y)-R\left(0,0,x,y\right)\psi\left(0\right)+ \\ +\int_0^x\Big(b\left(\alpha,0\right)R\left(\alpha,0,x,y\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}R\left(\alpha,0,x,y\right)\Big)\psi(\alpha)d\alpha+ \\ +\int_0^y\Big(a\left(0,\beta\right)R\left(0,\beta,x,y\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}R\left(0,\beta,x,y\right)\Big)\varphi(\beta)d\beta+ \\ +\int_0^x\int_0^y R\left(\alpha,\beta,x,y\right)f\left(\alpha,\beta\right)d\beta d\alpha, \quad (6)$$

где R — функция Римана.

Далее мы считаем (6) общим представлением искомого решения через φ, ψ. Подставим в (6) аргументы точки (x,y_1) и учтем, что значение (2) известно. Мы придем к интегральному уравнению, из которого определим $u(x,y_1)$ через известные функции и пока неизвестную $\psi(x)$. Затем продифференцируем (6) по y и, подставив аргументы точки (x,y_1), найдем $u_y(x,y_1)$. После этого подставим $u(x,y_1)$ и $u_y(x,y_1)$ в (5), получим

$$A(x)\psi(x)+\int_0^x B(x,t)\psi(t)dt+ \\ +\int_0^x b(t,0)\beta(t)\int_0^t\Big(b(k,0)R_y(k,0,t,y_1)-\frac{\partial^2}{\partial k\partial y}R(k,0,t,y_1)\Big)\psi(k)dkdt- \\ -\beta(x)\Big\{\int_0^x(-a_t+c)(t,y_1)\int_0^t\Big(b(k,0)R(k,0,t,y)-\frac{\partial}{\partial k}R(k,0,t,y)\Big)\psi(k)dkdt+ \\ +\int_0^x b(t,y_1)\int_0^t\Big(b(k,0)R_y(k,0,t,y_1)-\frac{\partial}{\partial k\partial y}R(k,0,t,y_1)\Big)\psi(k)dkdt\Big\}- \\ -\beta(x)a(x,y_1)\exp\Big(\int_0^{y_1}a(x,\tau)d\tau\Big)\times \\ \times\int_0^{y_1}\Big(a\left(0,\tau\right)R\left(0,\tau,x,y_1\right)-\frac{\partial}{\partial\tau}R\left(0,\tau,x,y_1\right)\Big)\varphi\left(\tau\right)d\tau+ \\ +\int_0^x\Big(b(t,0)\beta(t)\int_0^{y_1}\Big(a(0,\beta)R_y(0,\tau,t,y_1)-\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial y}R(0,\tau,t,y_1)\Big)\varphi(\tau)d\tau\Big)dt- \\ -\beta(x)\int_0^x\Big((-a_t+c)(t,y_1)\int_0^y\Big(a\left(0,\tau\right)R\left(0,\tau,t,y\right)-\frac{\partial}{\partial\tau}R\left(0,\tau,t,y\right)\Big)\varphi\left(\tau\right)d\tau\Big)dt-$$

$$-\beta(x)\int_0^x b(t,y_1)\biggl(\int_0^{y_1}\Bigl(a(0,\tau)R_y(0,\tau,t,y_1)-\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial y}R(0,\tau,t,y_1)\Bigr)\varphi(\tau)d\tau\biggr)dt = \\ =\omega(x),$$

где

$$A(x)=a(x,0)-\beta(x)a(x,y_1)\exp\biggl(\int_0^{y_1}a(x,\tau)d\tau\biggr),$$

$$B(x,t)=-\beta(x)a(x,y_1)\Bigl(b\,(t,0)\,R\,(t,0,x,y_1)-\frac{\partial}{\partial t}R\,(t,0,x,y_1)+ \\ +(-a_t+c)(t,0)\Bigr)+b(t,0)\beta(t)R_y(t,0,t,y_1)- \\ -\beta(x)(-a_t+c)(t,y_1)R\,(t,0,t,y)-\beta(x)b(t,y_1)R_y(t,0,t,y_1),$$

$$\omega(x)=\int_0^x f(t,0)dt-\beta(x)\int_0^x f(t,y_1)dt-\alpha(x)+\varphi'(0)-\beta(x)\varphi'(y_1)+ \\ +\beta(x)a(x,y_1)\bigl(R\,(0,y_1,x,y_1)\,\varphi\,(y_1)-R\,(0,0,x,y_1)\,\varphi\,(0)\bigr)+ \\ +a(0,0)\varphi(0)-a(0,y_1)\varphi(y_1)\beta(x)- \\ -\beta(x)\int_0^x(-a_t+c)(t,y_1)R\,(0,y_1,t,y_1)\,\varphi\,(y_1)\,dt+ \\ +\beta(x)a(x,y_1)\int_0^x\int_0^{y_1}R\,(\alpha,\tau,x,y_1)\,f\,(\alpha,\tau)\,d\tau d\alpha- \\ -\beta(x)\int_0^x(-a_t+c)(t,y_1)R\,(0,0,t,y)\,\varphi\,(0)\,dt+ \\ +\beta(x)\int_0^x\biggl((-a_t+c)(t,y_1)\int_0^t\int_0^y R\,(\alpha,\tau,t,y)\,f\,(\alpha,\beta)\,d\tau d\alpha\biggr)dt- \\ -\int_0^x\biggl[b(t,0)\alpha(t)+b(t,0)\beta(t)\biggl\{R_y(0,y_1,t,y_1)\varphi(y_1)+ \\ +R(0,y_1,x,y_1)\varphi'(y_1)-R_y(0,0,t,y_1)\varphi(0)+ \\ +\bigl(a(0,y_1)R(0,y_1,x,y_1)-R_y(0,y_1,t,y_1)\bigr)\varphi(y_1)+ \\ +\int_0^t R(\alpha,y_1,t,y_1)f(\alpha,y_1)d\alpha+\int_0^t\int_0^{y_1}R_y(\alpha,\tau,t,y_1)d\alpha d\tau\biggr\}\biggr]dt+ \\ +\beta(x)\int_0^x b(t,y_1)\biggl\{R_y(0,y_1,t,y_1)\varphi(y_1)+ \\ +R(0,y_1,t,y_1)\varphi'(y_1)-R_y(0,0,t,y_1)\varphi(0)+ \\ +\Bigl(a(0,y_1)R(0,y_1,t,y_1)-\frac{\partial}{\partial y}R(0,y_1,t,y_1)\Bigr)\varphi(y_1)+ \\ +\int_0^t R(\alpha,y_1,t,y_1)f(\alpha,y_1)d\alpha+\int_0^t\int_0^{y_1}R_y(\alpha,\tau,t,y_1)f(\alpha,\tau)d\tau d\alpha\biggr\}dt.$$

Итак, мы получили интегральное уравнение для нахождения ψ. Запишем его в операторной форме, разделив обе части (1) на $A(x)$ и считая, что

$A(x) \neq 0$:

$$\psi = F\psi + F_1\varphi + \frac{\omega(x)}{A(x)}. \tag{7}$$

Пусть $|A(x)| \geqslant m > 0$, а модули

$$|B(x,t)|\,, \quad \left|b(t,0)\beta(t)\Big(b(k,0)R_y(k,0,t,y_1) - \frac{\partial^2}{\partial k \partial y}R(k,0,t,y_1)\Big)\right|,$$

$$\left|\beta(x)(-a_t + c)(t,y_1)\Big(b(k,0)R(k,0,t,y) - \frac{\partial}{\partial k}R(k,0,t,y)\Big)\right|,$$

$$\left|\beta(x)b(t,y_1)\Big(b(k,0)R_y(k,0,t,y_1) - \frac{\partial}{\partial k \partial y}R(k,0,t,y_1)\Big)\right|$$

не превосходят M. В силу непрерывности всех функций и производных, стоящих под знаком модуля, такое число существует. Проверим непрерывность линейного оператора F и то, что некоторая его степень является сжимающим отображением.

Пусть ψ_1, $\psi_2 \in C\,[0, x_1]$. Тогда

$$\|F\psi_1 - F\psi_2\| < \frac{M}{m}x\Big(1 + \frac{x}{2}\Big)\,\|\psi_1 - \psi_2\|\,. \tag{8}$$

В силу того, что $x \leqslant x_1$, отсюда следует непрерывность оператора F. Из (8) выводятся оценки

$$\left\|F^k\psi_1 - F^k\psi_2\right\| \leqslant \frac{M^k}{m^k}\frac{x^k}{k!}\Big(1 + \frac{x}{k+1}\Big)^k \|\psi_1 - \psi_2\|\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ясно, что при некотором k

$$\frac{M^k}{m^k}\frac{x^k}{k!}\Big(1 + \frac{x}{k+1}\Big)^k < \frac{M^k}{m^k}\frac{x_1^k}{k!}e^{x_1} < 1,$$

то есть F^k является сжимающим оператором. Поэтому [12] уравнение (7) имеет единственное решение. Оно записывается в виде ряда Неймана. Вернемся к задаче 1, чтобы выяснить возможность ее редукции к задаче Гурса для (1). Определив с помощью (2) и (3) граничное значение (4), можно записать решение задачи 1 с помощью формулы (6). Следовательно, условие разрешимости указанной задачи определяется из утверждения

Теорема 1. *Задача 1 однозначно разрешима, если*

$$a(x,0) - \beta(x)a(x,y_1)\exp\Big(\int_0^{y_1} a(x,\tau)d\tau\Big) \neq 0.$$

Задача 2. *Найти функцию $u(x,y) \in C^{1,1}(D) \cap C^{0,0}\left(\overline{D}\right)$, являющуюся в области D решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям (4) и*

$$u_x(0,y) = \gamma(y) + \delta(y)u_x(x_1,y)\,, \tag{9}$$

где γ, δ — известные достаточно гладкие функции. Считаем, что коэффициенты уравнения (1) принадлежат классам $a \in C^{1,0}(\overline{D})$, $b \in C^{0,1}(\overline{D})$, $c,\ f \in C^{0,0}(\overline{D})$.

Здесь применяется тот же метод, что и в случае задачи 1. Опуская рассуждения, сформулируем результат в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Задача 2 однозначно разрешима, если*

$$b(0,y) - \delta(y)b(x_1,y)\exp\left(\int_0^{x_1} b(\alpha,y)d\alpha\right) \neq 0.$$

Задача 3. *Найти функцию $u(x,y) \in C^{1,1}(D) \cap C^{0,0}\left(\overline{D}\right)$, являющуюся в области D решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям (3), (9).*

Для последней задачи пока доказана единственность решения. Для этого показано, что при однородных условиях (3), (9) однородное уравнение (1) имеет только нулевое решение. Доказательство осуществляем методом априорной оценки с помощью энергетического неравенства [13].

Воспользовавшись понятиями скалярного произведения и нормы в пространстве $L_2\,[0,x_1] \times [0,y_1]$:

$$(u,v) = \int_0^{x_1}\int_0^{y_1} u(x,y)v(x,y)dydx, \quad \|u\|^2 = \int_0^{x_1}\int_0^{y_1} u^2(x,y)dydx,$$

вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned}(L\,(u)\,,u_{xy}) &= (u_{xy} + au_x + bu_y + cu, u_{xy}) = \\ &= \int_0^{x_1}\int_0^{y_1} (u_{xy}^2 + au_xu_{xy} + bu_yu_{xy} + cuu_{xy})(x,y)dydx.\end{aligned}$$

Далее проинтегрируем выражение по частям и выпишем значения получившихся в результате преобразований слагаемых:

$$\begin{aligned}0 &= (L(u),u_{xy}) = (f,u_{xy}) = \\ &= \|u_{xy}\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^{x_1}\big((au_x^2)(x,y_1) - (au_x^2)(x,0)\big)dx - \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}\big((a_yu_x^2)(x,y) + (b_xu_y^2)(x,y)\big)dydx + \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^{y_1}\big((bu_y^2)(x_1,y) - (c_yu^2)(x_1,y)\big)dy + \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^{y_1}\big(-(bu_y^2)(0,y) + (c_yu^2)(0,y)\big)dy + \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(u^2(x_1,y_1) + (cu^2)(0,0) - (cu^2)(x_1,0) - (cu^2)(0,y_1)\big). \qquad (10)\end{aligned}$$

Потребуем выполнения условий

$$\begin{array}{llll} a(x,y_1) \geqslant 0, & a(x,0) < 0, & a_y \leqslant 0, & b_x \leqslant 0, \\ b(x_1,y) \geqslant 0, & c_y(x_1,y) \leqslant 0, & b(0,y) < 0, & c_y(0,y) \geqslant 0, \\ c(0,0) > 0, & c(x_1,0) \leqslant 0, & c(0,y_1) \leqslant 0. & \end{array} \qquad (11)$$

Тогда, если $f \equiv 0$, то все слагаемые в правой части (10) тождественно равны нулю. Следовательно, $u_{xy} \equiv 0$, а значит, и $u \equiv 0$.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют неравенствам* (11), *то если задача* (1), (3), (9) *имеет решение, то оно единственно.*

Отметим, что все условия теоремы являются существенными. Рассмотрим, например, задачу для уравнения

$$u_{xy} - u_x = 0$$

в области $D = (0, 1) \times (0, 1)$ с условиями

$$u_x(0, y) = e^{-1}u_x(1, y), \quad u_y(x, 0) = e^{-1}u_y(x, 1).$$

В нем коэффициент $a \equiv -1$, что противоречит условиям теоремы. Решением, в чем можно убедиться непосредственно, является $u(x, y) = e^{x+y}$, отличная от тождественного нуля в области D.

ORCID
Елена Анатольевна Уткина: http://orcid.org/0000-0002-5575-610X

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии / *Краевые задачи теории аналитических функций* / Учен. зап. Казан. ун-та., Т. 122. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1962. С. 3–16.
2. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // *Дифференц. уравнения*, 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
3. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // *ДАН СССР*, 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
4. Скубачевский А. Л. О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач // *Матем. сб.*, 1982. Т. 117(159), № 4. С. 548–558.
5. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках // *Матем. моделирование*, 1990. Т. 2, № 8. С. 139–156.
6. Пулькина Л. С. Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения / *Дифференциальные уравнения и динамические системы*: Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко / Тр. МИАН, Т. 236. М.: Наука, 2002. С. 298–303.
7. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // *ДАН СССР*, 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552.
8. Керефов А. А. Нелокальные граничные задачи для параболических уравнений // *Дифференц. уравнения*, 1979. Т. 15, № 1. С. 74–78.
9. Уткина Е. А. Об одной задаче со смещениями в граничных условиях // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2011. № 8(89). С. 102–107.
10. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* Казань: Казанское матем. общество, 2001. 226 с.
11. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
12. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: Наука, 1981. 448 с.

13. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973. 408 с.

Поступила в редакцию 25/I/2016;
в окончательном варианте — 08/II/2016;
принята в печать — 26/II/2016.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 65–73

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1469

MSC: 35L20

ON PROBLEMS WITH DISPLACEMENT IN BOUNDARY CONDITIONS FOR HYPERBOLIC EQUATION

E. A. Utkina

Kazan (Volga Region) Federal University,
18, Kremlyovskaya st., Kazan, 420008, Russian Federation.

Abstract

We consider three problems for hyperbolic equation on a plane in the characteristic domain. In these problems at least one of the conditions of the Goursat problem is replaced by nonlocal condition on the relevant characteristic. Non-local conditions are the linear combinations of the normal derivatives at points on opposite characteristics. In case of replacement of one condition we solve the problem by reduction to the Goursat problem for which it exists and is unique. To find the unknown Goursat condition author receives the integral equation, rewrite it in operational form and finds its unique solvability cases. To prove the unique solvability of the equation, the author shows the continuous linear operator and the fact, that some degree of the resulting operator is a contraction mapping. It is known that in this case the required Goursat condition can be written as Neumann series. We considered in detail only one of the tasks, but for both the unique solvability theorems are formulated. If the two conditions are changed, the uniqueness of the solution on the assumption that it exists, is proved by the method of a priori estimates. For this purpose, the inner product and the norm in L_2 are used. As a result, the conditions were obtained for the coefficients of a hyperbolic equation that ensure the uniqueness of the solution. An example is given, confirming that these conditions are essential. Namely, constructed an equation whose coefficients do not satisfy the conditions of the last theorem, given the conditions on the characteristics and nontrivial solution is built.

Keywords: hyperbolic equation, nonlocal conditions, the problem with displacement.

Please cite this article in press as:
Utkina E. A. On problems with displacement in boundary conditions for hyperbolic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 65–73. doi: 10.14498/vsgtu1469. (In Russian)

Author Details:
Elena A. Utkina (Cand. Phys. & Math. Sci.; eutkina1@yandex.ru), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics.

ORCID
Elena A. Utkina: http://orcid.org/0000-0002-5575-610X

REFERENCES

1. Zhegalov V. I. A boundary-value problem for an equation of mixed type with boundary conditions on both characteristics and with discontinuities on the transition curve, *Boundary value problems in the theory of analytic functions*, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, 122. Kazan, Kazan University, 1962, pp. 3–16 (In Russian).
2. Nakhushev A. M. On Some Boundary Value Problems for Hyperbolic Equations and Equations of Mixed Type, *Differ. Uravn.*, 1969, no. 5, pp. 44–59 (In Russian).
3. Bitsadze A. V., Samarskii A. A. On some simple generalizations of linear elliptic boundary problems, *Sov. Math., Dokl.*, 1969, vol. 10, no. 4, pp. 398–400.
4. Skubachevskii A. L. On the spectrum of some nonlocal elliptic boundary value problems, *Math. USSR-Sb.*, 1983, vol. 45, no. 4, pp. 543–553. doi: 10.1070/SM1983v045n04ABEH001025.
5. Il'in V. A., Moiseev E. I. 2-D Nonlocal boundary value problem for Poisson's operator in differential and difference variants, *Matem. Mod.*, 1990, vol. 2, no. 8, pp. 139–156 (In Russian).
6. Pul'kina L. S. A nonlocal problem for a loaded hyperbolic equation, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2002, vol. 236, pp. 285–290.
7. Soldatov A. P., Shkhanukov M. Kh. Boundary value problems with general nonlocal Samarskij condition for pseudoparabolic equations of higher order, *Sov. Math., Dokl.*, 1988, vol. 36, no. 3, pp. 507–511.
8. Kerefov A. A. Nonlocal boundary-value problems for parabolic equations, *Differ. Equ.*, 1979, vol. 15, no. 1, pp. 52–54.
9. Utkina E. A. A problem with displacements in the boundary conditions, *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2011, no. 8(89), pp. 102–107 (In Russian).
10. Zhegalov V. I., Mironov A. N. *Differentsial'nye uravneniia so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential equations with leading partial derivatives]. Kazan, Kazan Mathem. Society, 2001, 226 pp. (In Russian)
11. Kozhanov A. I. Nonlinear loaded equations and inverse problem, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 4, pp. 657–675.
12. Bitsadze A. V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. Moscow, Nauka, 1981, 448 pp. (In Russian)
13. Ladyzhenskaya O. A. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Applied Mathematical Sciences, vol. 49. New York, Springer, 1985, 322+xxx pp. doi: 10.1007/978-1-4757-4317-3.

Received 25/I/2016;
received in revised form 08/II/2016;
accepted 26/II/2016.