Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 1. С. 74–84
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1455

УДК 517.968.7

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ И ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

Ф. Г. Хуштова

Институт прикладной математики и автоматизации,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

В работе исследуется задача Коши для дифференциального уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана—Лиувилля. Представление решения получено в терминах интегрального преобразования с функцией Райта в ядре. Показано, что когда рассматриваемое уравнение обращается в уравнение диффузии дробного порядка, полученное решение переходит в решение задачи Коши для соответствующего уравнения. Единственность решения доказывается в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия Тихонова.

Ключевые слова: дробное исчисление, оператор интегро-дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля, дифференциальные уравнения с частными дробными производными, уравнения параболического типа, оператор Бесселя, модифицированная функция Бесселя, функция Райта, интегральное преобразование с функцией Райта в ядре, H-функция Фокса, задача Коши, условие Тихонова.

Введение. Пусть D^{γ}_{ay} — оператор интегро-дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля дробного порядка γ с началом в точке a и с концом в точке y, который определяется следующим образом [1, 2]:

$$D^{\gamma}_{ay}g(y) = \frac{\operatorname{sign}(y-a)}{\Gamma(-\gamma)}\int_a^y \frac{g(t)}{|y-t|^{\gamma+1}}dt, \quad \gamma < 0;$$
$$D^{\gamma}_{ay}g(y) = g(y), \quad \gamma = 0;$$
$$D^{\gamma}_{ay}g(y) = \operatorname{sign}^n(y-a)\frac{d^n}{dy^n}D^{\gamma-n}_{ay}g(y), \quad n-1<\gamma\leqslant n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Здесь $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

В области $\Omega = \{(x,y) : -\infty < x < \infty,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$\mathbf{L}u(x,y) \equiv B_x u(x,y) - D^{\alpha}_{0y}u(x,y) = 0, \tag{1}$$

Образец для цитирования
Хуштова Ф. Г. Задача Коши для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 74–84. doi: 10.14498/vsgtu1455.

Сведения об авторе
Фатима Гидовна Хуштова (khushtova@yandex.ru), научный сотрудник, отдел САПР смешанных систем и управления.

где
$$B_x = |x|^{-b}\frac{\partial}{\partial x}\Big(|x|^b\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b}{x}\frac{\partial}{\partial x}$$
— оператор Бесселя, $|b| < 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Уравнение (1) при $\alpha = 1$ совпадает с уравнением
$$u_y = u_{xx} + \frac{b}{x}u_x, \tag{2}$$
исследованным в работе [3]. Для уравнения (2) при $b > -1$ в работе [4] была исследована задача Коши.

В работе [5] методом интегральных преобразований исследована задача Коши для уравнения
$$D^\alpha_{0t}u(x,t) = \lambda^2\Delta_x u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t > 0, \tag{3}$$
где $\Delta_x = \sum_{j=1}^m \partial^2/\partial x_j^2$, $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$. При $0 < \alpha \leqslant 1$ и $1 < \alpha < 2$ решения выписаны в терминах H-функции Фокса. Решение задачи Коши для уравнения (3) при $\lambda = 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$ в терминах функции Райта выписано в работе [6]. Задача Коши для уравнения (3) в случае, когда вместо оператора Римана—Лиувилля стоит оператор Капуто, была исследована в работе [7]. Уравнение диффузии с оператором Капуто и эллиптическим оператором с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных, было исследовано в работах [8, 9]. В работе [10] построено фундаментальное решение и исследована задача Коши для многомерного диффузионно-волнового уравнения с оператором Джрбашяна—Нерсесяна.

В работе [11] исследована задача Коши для уравнения
$$\big(D^\alpha_{0y} + bD^\beta_{0y}\big)u(x,y) - u_{xx}(x,y) + cu(x,y) = f(x,y),$$
где $1 < \alpha = 2\beta < 2$, b и c — заданные действительные числа.

Интерес к изучению уравнения (1) вызван его приложениями при моделировании процессов переноса в средах, имеющих фрактальную размерность [12–17].

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega^+ = \Omega \cap \{x > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{x < 0\}$, $\bar\Omega$ — замыкание области Ω.

Определение. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $\Omega^+ \cup \Omega^-$ и такую, что $y^{1-\alpha}u \in C(\bar\Omega)$, $|x|^b u_x \in C(\Omega)$, u_{xx}, $D^\alpha_{0y}u \in C(\Omega^+ \cup \Omega^-)$.

Задача 1. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условию*
$$\lim_{y\to 0} D^{\alpha-1}_{0y}u(x,y) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{4}$$
где $\varphi(x)$ — заданная функция.

2. Вспомогательные сведения. В работе [2, с. 72] определено интегральное преобразование для функции $v(y)$, заданной на положительной полуоси
$$A^{\alpha,\mu}v(y) \equiv (A^{\alpha,\mu}v)(y) = \int_0^\infty v(t)y^{\mu-1}\phi\left(-\alpha,\mu;-ty^{-\alpha}\right)dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где $\phi(\rho,\delta;z)$ — функция Райта [18]. В случае, когда $\mu=0$, введено обозначение $A^{\alpha,0}v(y)=A^{\alpha}v(y)$. Если преобразование $A^{\alpha,\mu}$ применяется к функции, зависящей от нескольких переменных, то в случае необходимости с помощью нижнего индекса обозначается переменная, по которой проводится преобразование. Например, $A_y^{\alpha,\mu}v(x,y)$.

Для степенной функции справедлива формула [2, с. 74]

$$A^{\alpha,\mu}y^{\delta-1}=y^{\alpha\delta+\mu-1}\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha\delta+\mu)},\quad \delta>0,\quad \mu\neq 0;\quad \delta\neq 0,\quad \mu=0. \tag{5}$$

Докажем справедливость формулы

$$A^{\alpha,\mu}y^{\delta-1}\exp\Bigl(-\frac{c^2}{4y}\Bigr)=y^{\alpha\delta+\mu-1}H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{c^2}{4y^{\alpha}}\middle|\begin{array}{l}(\alpha\delta+\mu,\alpha)\\(0,1),(\Delta,1)\end{array}\right], \tag{6}$$

где $H_{p,q}^{m,n}(z)$ — H-функция Фокса [19, 20], $\delta\neq 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

Вычислим интеграл

$$A^{\alpha,\mu}y^{\delta-1}\exp\Bigl(-\frac{c^2}{4y}\Bigr)=y^{\mu-1}\int_0^{\infty}t^{\delta-1}\exp\Bigl(-\frac{c^2}{4t}\Bigr)\phi\left(-\alpha,\mu;-ty^{-\alpha}\right)dt.$$

Сделав замену $\tau=ty^{-\alpha}$, перепишем его в виде

$$A^{\alpha,\mu}y^{\delta-1}\exp\Bigl(-\frac{c^2}{4y}\Bigr)=y^{\alpha\delta+\mu-1}\int_0^{\infty}\tau^{\delta-1}\exp\Bigl(-\frac{c^2}{4y^{\alpha}\tau}\Bigr)\phi\left(-\alpha,\mu;-\tau\right)d\tau. \tag{7}$$

Интеграл

$$J=\int_0^{\infty}\tau^{\delta-1}\exp\Bigl(-\frac{c^2}{4y^{\alpha}\tau}\Bigr)\phi\left(-\alpha,\mu;-\tau\right)d\tau \tag{8}$$

вычислим, воспользовавшись методом, изложенным О. И. Маричевым в [21]. Положив

$$\mathscr{K}_1(\tau)=e^{-\tau},\quad \mathscr{K}_2(\tau)=\tau^{\delta}\,\phi\left(-\alpha,\mu;-\tau\right),\quad x=\frac{c^2}{4y^{\alpha}},$$

преобразуем интеграл (8) к виду

$$J=\int_0^{\infty}\mathscr{K}_1\left(\frac{x}{\tau}\right)\mathscr{K}_2(\tau)\frac{d\tau}{\tau},\quad x>0.$$

Из строки 3.1 (1) § 10 [21] базовой таблицы найдем преобразование Меллина первой функции

$$\mathscr{K}_1^*(s)=\Gamma(s),\quad \operatorname{Re}s>0.$$

Преобразование Меллина функции Райта можно найти из формулы (5), приведенной выше в настоящей работе. Положив в ней $\delta=s$ и сделав замену $t=y^{\alpha}\tau$ в определении преобразования $A^{\alpha,\mu}$, получим

$$\int_0^{\infty}\tau^{s-1}\phi\left(-\alpha,\mu;-\tau\right)d\tau=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\mu+\alpha s)},\quad \operatorname{Re}s>0.$$

Тогда образ второй функции $\mathscr{K}_2(\tau)$ можно найти, если к подынтегральной функции в последнем равенстве добавить множитель τ^δ, а в правой части заменить s на $s+\delta$:

$$\mathscr{K}_2^*(s) = \frac{\Gamma(\delta+s)}{\Gamma(\mu+\alpha\delta+\alpha s)}, \quad \operatorname{Re} s > -\delta.$$

Перемножив образы $\mathscr{K}_i^*(s)$, $i=1,2$, придем к значению

$$\mathscr{K}^*(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(\delta+s)}{\Gamma(\mu+\alpha\delta+\alpha s)}, \quad \operatorname{Re} s > -\min\{\delta, 0\}.$$

Вычисляя прообраз функции $\mathscr{K}^*(s)$, получим значение интеграла

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{i\infty}} \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(\delta+s)}{\Gamma(\mu+\alpha\delta+\alpha s)}\left(\frac{c^2}{4y^\alpha}\right)^{-s} ds = H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{c^2}{4y^\alpha}\,\middle|\, \begin{matrix}(\mu+\alpha\delta,\alpha)\\(0,1),(\delta,1)\end{matrix}\right],$$

где $L_{i\infty} = (\omega - i\infty, \omega + i\infty)$, $\omega > -\min\{\delta, 0\}$, $\delta \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Подставляя найденное значение интеграла в (7), приходим к (6).

Приведем здесь еще асимптотическую формулу при $z\to\infty$ для H-функции из формулы (6) [20, с. 17]:

$$H_{1,2}^{2,0}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(\mu+\alpha\delta,\alpha)\\(0,1),(\delta,1)\end{matrix}\right] = O\left(z^{\frac{\delta(1-\alpha)-\mu}{2-\alpha}}\,\exp\left[-(2-\alpha)\,\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\,z^{\frac{1}{2-\alpha}}\right]\right). \qquad (9)$$

3. Основные результаты. Обозначим через

$$\Gamma(x,\xi,y) = A_y^\alpha g(x,\xi,y),$$

$$g(x,\xi,y) = \frac{|x|^\beta\,|\xi|^\beta}{4y}\exp\Big(-\frac{x^2+\xi^2}{4y}\Big)\left[I_\beta\Big(\frac{|x\xi|}{2y}\Big) + I_{-\beta}\Big(\frac{|x\xi|}{2y}\Big)\right], \quad \beta = \frac{1-b}{2},$$

где $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν [22, 23].

Приведем здесь следующие свойства функции $\Gamma(x,\xi,y)$, доказанные в работе [24].

Свойство 1°. *Для функции $\Gamma(x,\xi,y)$ при $|x\xi| \leqslant 2y$ имеют место следующие оценки:*

$$|\Gamma(x,\xi,y)| \leqslant \mathrm{const}\cdot y^{\alpha\beta-1},$$

$$\left|\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\Gamma(x,\xi,y)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot|x|^{2\beta-n-1}|\xi|^{2\beta}y^{-\alpha\beta-1}, \quad \beta\neq 1/2,$$

$$\left|\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\Gamma(x,\xi,y)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot y^{-\alpha(2n+1)/2+\alpha-1}, \quad \beta = 1/2,$$

$$\left|\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}\,\Gamma(x,\xi,y)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot|\xi|y^{-\alpha(2n+1)/2-1}, \quad \beta = 1/2,$$

$$\left|D_{0y}^\alpha\Gamma(x,\xi,y)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot y^{\alpha\beta-\alpha-1},$$

а при $|x\xi| > 2y$ — *следующие оценки*:

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}\,\Gamma(x,\xi,y)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot |x|^{\beta+(2n-1)/2}\,|\xi|^{\beta-1/2} A_y^\alpha\, y^{-(2n-1)/2-1} \exp\Bigl(-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\Bigr),$$

$$\bigl|D_{0y}^\alpha\,\Gamma(x,\xi,y)\bigr| \leqslant \mathrm{const}\cdot |x|^{\beta+3/2}|\xi|^{\beta-1/2}\, A_y^\alpha y^{-5/2} \exp\Bigl(-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\Bigr),$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$

Используя формулу (6) при $\mu = 0$, $\delta = -(2n-1)/2$ и $c = x$, затем асимптотическую формулу (9), оценкам при $|x\xi| > 2y$ можно придать вид

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}\Gamma(x,\xi,y)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot P_n(x,\xi,y)\exp\left[-\alpha_0|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}y^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right], \tag{10}$$

$$\bigl|D_{0y}^\alpha\,\Gamma(x,\xi,y)\bigr| \leqslant \mathrm{const}\cdot P_2(x,\xi,y)\exp\left[-\alpha_0|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}y^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right],$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\alpha_0 = (2-\alpha)2^{-\frac{2}{2-\alpha}}\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$,

$$P_n(x,\xi,y) = x^{\beta+\frac{2n-1}{2}}\xi^{\beta-\frac{1}{2}}|x-\xi|^{-\frac{(2n-1)(1-\alpha)}{2-\alpha}}y^{-\frac{\alpha(2n-1)}{2(2-\alpha)}-1}.$$

Свойство 2°. *Функция* $\Gamma(x,\xi,y)$ *при* $x \neq 0$, $y > 0$ *и фиксированном* ξ *является решением уравнения*

$$\mathbf{L}\,\Gamma(x,\xi,y) = 0.$$

Свойство 3°. *Функция*

$$\Gamma(x,\xi,y-\eta) = A_t^\alpha g(x,\xi,t)\bigr|_{t=y-\eta}$$

при фиксированных x *и* y *как функция переменных* ξ *и* η, $\xi \neq 0$, $0 < \eta < y$, *является решением сопряженного уравнения*

$$\mathbf{L}^*\Gamma(x,\xi,y-\eta) \equiv B_\xi\Gamma(x,\xi,y-\eta) - D_{y\eta}^\alpha\Gamma(x,\xi,y-\eta) = 0. \tag{11}$$

Свойство 4°. *Для любой функции* $h(x) \in C[\,x_1; x_2]$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{\eta\to y}\int_{x_1}^{x_2}|\xi|^b\, h(\xi) D_{y\eta}^{\alpha-1}\Gamma(x,\xi,y-\eta)d\xi = h(x), \quad x_1 < x < x_2.$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x) \in C(-\infty,\infty)$ *и выполняется условие*

$$\lim_{|x|\to\infty}\varphi(x)\exp\left(-\rho|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0, \quad \rho < (2-\alpha)2^{-\frac{2}{2-\alpha}}(\alpha/T)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}.$$

Тогда функция

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}|\xi|^{1-2\beta}\Gamma(x,\xi,y)\varphi(\xi)d\xi \tag{12}$$

является решением задачи 1.

Теорема 2. *Существует не более одного регулярного решения задачи 1 в классе функций, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{|x|\to\infty} y^{1-\alpha}u(x,y)\exp\left(-k|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)=0 \tag{13}$$

при некотором положительном k, причем сходимость в (13) является равномерной на множестве $\{y\in(0;T)\}$.

4. Доказательство теоремы 1. Доказательство того, что функция (12) удовлетворяет уравнению (1), следует из свойства 2°. Перестановки знаков производных и интегралов при дифференцировании по x и взятии дробной производной по y порядка α допустимы в силу свойства 1°.

Выполнимость начального условия (4) следует из свойства 4°.

Заметим, что при $\beta=1/2$ $(b=0)$ из результатов работы [24] следует, что функция

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(x,\xi,y)\varphi(\xi)d\xi,$$

где

$$\Gamma(x,\xi,y)=\frac{y^{\sigma-1}}{2}\phi\Big(-\sigma,\sigma;-\frac{|x-\xi|}{y^{\sigma}}\Big),\quad \sigma=\frac{\alpha}{2},$$

совпадает с решением задачи Коши для уравнения диффузии дробного порядка, приведенным в [2, с. 127].

5. Доказательство теоремы 2. Пусть $h_r(\xi)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, обладающая следующими свойствами:

$$h_r(\xi)=\begin{cases}1, & |\xi|\leqslant r,\\ 0, & |\xi|\geqslant r+1,\end{cases} \tag{14}$$

$$0\leqslant h_r(\xi)\leqslant 1,\quad |h_r'(\xi)|+|h_r''(\xi)|\leqslant H,$$

где H — постоянная, не зависящая от r.

Рассмотрим функцию

$$v(x,\xi,y-\eta)=h_r(\xi)\,\Gamma(x,\xi,y-\eta).$$

Учитывая, что функция $\Gamma(x,\xi,y-\eta)$ удовлетворяет уравнению (11), получим

$$\mathbf{L}^*v(x,\xi,y-\eta)=2h_r'(\xi)\Gamma_\xi(x,\xi,y-\eta)+ \\ +\frac{b}{\xi}h_r'(\xi)\Gamma(x,\xi,y-\eta)+h_r''(\xi)\Gamma(x,\xi,y-\eta). \tag{15}$$

Докажем сначала, что если $\varphi(x)\equiv 0$, то $u(x,y)\equiv 0$ при $0<y<\delta$ для достаточно малого δ. Из теоремы 1 [24] следует, что регулярное в области

$$\Omega_r=\{(x,y):|x|<r,0<y<\delta\}$$

решение однородной задачи, соответствующей задаче 1, представимо в виде

$$u(x,y) = \int_{-r-1}^{r+1}\int_0^y |\xi|^{1-2\beta} u(\xi,\eta)\mathbf{L}^* v(x,\xi,y-\eta)\,d\eta\,d\xi.$$

Из (14) и (15) следует, что $\mathbf{L}^* v(x,\xi,y-\eta) = 0$, если $|\xi| \leqslant r$, откуда

$$u(x,y) = \left(\int_{-r-1}^{-r} + \int_r^{r+1}\right)\int_0^y |\xi|^{1-2\beta}\, u(\xi,\eta)\, \mathbf{L}^* v(x,\xi,y-\eta)\,d\eta\,d\xi.$$

Далее в силу свойств функции $h_r(\xi)$ и оценок (10) из (15) получим

$$|\,\mathbf{L}^* v(x,\xi,y-\eta)\,| \leqslant \mathrm{const}\cdot P_1(x,\xi,y-\eta)\exp\left[-\alpha_0\,|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}\,(y-\eta)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right].$$

Учитывая эту оценку, а также условие (13), находим

$$|u(x,y)| \leqslant \mathrm{const}\cdot\left(\int_{-r-1}^{-r} + \int_r^{r+1}\right)\int_0^y P(x,\xi,y,\eta)\times$$
$$\times\exp\left[-\alpha_0\,|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}\,(y-\eta)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}} + k\xi^{\frac{2}{2-\alpha}}\right]d\eta\,d\xi,$$

где

$$P(x,\xi,y,\eta) = |\xi|^{1-2\beta}\,\eta^{\alpha-1}\,P_1(x,\xi,y-\eta).$$

При $\delta < (\alpha_0/k)^{(2-\alpha)/\alpha}$ и $r\to\infty$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю. Это означает, что функция $u(x,y)\equiv 0$ в области

$$\Omega_1 = \{(x,y) : -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \delta\}.$$

Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ для любого $y>0$. Пусть $t = y-\delta$, $\delta\leqslant y < 2\delta$. Рассмотрим функцию $w(x,t) = u(x,\delta+t)$. Так как $u(x,y)\equiv 0$ при $0<y<\delta$,

$$D_{0y}^{\alpha}u(x,y) = D_{\delta y}^{\alpha}u(x,y) = D_{0t}^{\alpha}w(x,t).$$

Отсюда следует, что функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$B_x\,w(x,t) - D_{0t}^{\alpha}\,w(x,t) = 0,$$

условиям (13) и

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}w(x,t) = 0,\quad -\infty < x < \infty.$$

Тогда, согласно доказанному выше,

$$w(x,t)\equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega_2 = \{(x,t) : -\infty < x < \infty,\ 0 < t < \delta\},$$

то есть

$$u(x,y)\equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega_2 = \{(x,y) : -\infty < x < \infty,\ \delta < y < 2\delta\}.$$

Точно так же доказывается, что $u(x,y)\equiv 0$ в полосах $(n-1)\delta\leqslant y < n\delta$, $n = 3,4,\ldots$ Теорема 2 доказана.

Заключение. В работе исследуется задача Коши в полосе для дифференциального уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана—Лиувилля. Используя фундаментальное решение исследуемого уравнения и его свойства, полученные ранее автором настоящей работы, доказывается теорема существования решения. Показано, что когда рассматриваемое уравнение обращается в уравнение диффузии дробного порядка, полученное решение переходит в решение задачи Коши для соответствующего уравнения. Доказана теорема единственности решения в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия Тихонова.

ORCID
Фатима Гидовна Хуштова: http://orcid.org/0000-0003-4088-3621

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с.
3. Терсенов С. А. *Параболические уравнения с меняющимся направлением времени.* М.: Наука, 1985. 105 с.
4. Arena O. On a Singular Parabolic Equation Related to Axially Symmetric Heat Potentials // *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1975. vol. 105, no. 1. pp. 347–393. doi: 10.1007/BF02414938.
5. Ворошилов А. А., Килбас А. А. Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана–Лиувилля // *Доклады Академии наук*, 2006. Т. 406, № 1. С. 12–16.
6. Геккиева С. Х. Задача Коши для обобщенного уравнения переноса с дробной по времени производной // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2000. Т. 5, № 1. С. 16–19.
7. Ворошилов А. А., Килбас А. А. Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // *Дифференц. уравнения*, 2006. Т. 42, № 5. С. 599–609.
8. Кочубей А. Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // *Дифференц. уравнения*, 1989. Т. 25, № 8. С. 1359–1368.
9. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка // *Дифференц. уравнения*, 1990. Т. 26, № 4. С. 660–670.
10. Псху А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009. Т. 73, № 2. С. 141–182. doi: 10.4213/im2429.
11. Мамчуев М. О. Видоизмененная задача типа Коши для нагруженного параболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2012. Т. 14, № 2. С. 22–28.
12. Metzler R., Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F. Fractional model equation for anomalous diffusion // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 1994. vol. 211, no. 1. pp. 13–24. doi: 10.1016/0378-4371(94)90064-7.
13. Giona M., Roman H. E. Fractional diffusion equation on fractals: one-dimensional case and asymptotic behavior // *Phys. A: Math. Gen.*, 1992. vol. 25, no. 8. pp. 2093–2105. doi: 10.1088/0305-4470/25/8/023.
14. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Physics Reports*, 2000. vol. 339, no. 1. pp. 1–77. doi: 10.1016/s0370-1573(00)00070-3.
15. Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // *Phys. A: Math. Gen.*, 2004. vol. 37, no. 31. pp. R161–R208. doi: 10.1088/0305-4470/37/31/r01.
16. Учайкин В. В. Анизотропия космических лучей в дробно-дифференциальных моделях аномальной диффузии // *ЖЭТФ*, 2013. Т. 143, № 6. С. 1039–1047. doi: 10.7868/S0044451013060037.

17. Uchaikin V. V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers* / Nonlinear Physical Science. vol. I: Background and Theory. Berlin: Springer, 2013. xii+385 pp. doi: 10.1007/978-3-642-33911-0.
18. Gorenflo R., Luchko Y., Mainardi F. Analytical properties and applications of the Wright function // *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 1999. vol. 2, no. 4. pp. 383–414, arXiv: math-ph/0701069.
19. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды*. Т. 3: Специальные функции. Дополнительные главы. М.: Наука, 2003. 688 с.
20. Kilbas A. A., Saigo M. *H-Transform. Theory and Applications* / Analytical Methods and Special Functions. vol. 9. Boca Raton, etc.: Chapman and Hall, 2004. xii+389 pp.
21. Маричев О. И. *Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул)*. Мн.: Наука и техника, 1978. 312 с.
22. Кузнецов Д. С. *Специальные функции*. М.: Высшая школа, 1965. 248 с.
23. Erdĺyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*. vol. II. / Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co., 1953. xvii+396 pp.
24. Хуштова Ф. Г. Фундаментальное решение модельного уравнения аномальной диффузии дробного порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 722–735. doi: 10.14498/vsgtu1445.

Поступила в редакцию 05/XI/2015;
в окончательном варианте — 07/II/2016;
принята в печать — 26/II/2016.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 74–84

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1455

MSC: 35A08, 35A22, 35R11, 35C15

CAUCHY PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH BESSEL OPERATOR AND RIEMANN–LIOUVILLE PARTIAL DERIVATIVE

F. G. Khushtova

Institute of Applied Mathematics and Automation,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

In this paper Cauchy problem for a parabolic equation with Bessel operator and with Riemann–Liouville partial derivative is considered. The representation of the solution is obtained in terms of integral transform with Wright function in the kernel. It is shown that when this equation becomes the fractional diffusion equation, obtained solution becomes the solution of Cauchy

Please cite this article in press as:
Khushtova F. G. Cauchy problem for a parabolic equation with Bessel operator and Riemann–Liouville partial derivative, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 74–84. doi: 10.14498/vsgtu1455. (In Russian)

Author Details:
Fatima G. Khushtova (khushtova@yandex.ru), Research Fellow, Dept. CAD of Mixed Systems and Management.

problem for the corresponding equation. The uniqueness of the solution in the class of functions that satisfy the analogue of Tikhonov condition is proved.

Keywords: fractional calculus, Riemann–Liouville integral-differential operator, differential equations with partial fractional derivatives, parabolic equation, Bessel operator, the modified Bessel function of the first kind, Wright function, the integral transform with Wright function in the kernel, Fox H-function, Cauchy problem, Tikhonov condition.

ORCID
Fatima G. Khushtova: http://orcid.org/0000-0003-4088-3621

REFERENCES

1. Nakhushev A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 pp. (In Russian)
2. Pskhu A. B. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka* [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka, 2005, 199 pp. (In Russian)
3. Tersenov S. A. *Parabolicheskie uravneniia s meniaiushchimsia napravleniem vremeni* [Parabolic equations with varying time direction]. Moscow, Nauka, 1985, 105 pp. (In Russian)
4. Arena O. On a Singular Parabolic Equation Related to Axially Symmetric Heat Potentials, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1975, vol. 105, no. 1, pp. 347–393. doi: 10.1007/BF02414938.
5. Voroshilov A. A., Kilbas A. A. A Cauchy-type problem for the diffusion-wave equation with Riemann-Liouville partial derivative, *Dokl. Math.*, 2006, vol. 73, no. 1, pp. 6–10. doi: 10.1134/S1064562406010029.
6. Gekkieva S. H. The Cauchy problem for the generalized transmission equation with a fractional derivative with respect to the time, *Doklady Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunarodnoi akademii nauk*, 2000, vol. 5, no. 1, pp. 16–19 (In Russian).
7. Voroshilov A. A., Kilbas A. A. The Cauchy problem for the diffusion-wave equation with the Caputo partial derivative, *Differ. Equations*, 2006, vol. 42, no. 5, pp. 638–649. doi: 10.1134/S0012266106050041.
8. Kochubej A. N. A Cauchy problem for evolution equations of fractional order, *Differ. Equations*, 1989, vol. 25, no. 8, pp. 967–974.
9. Kochubei A. N. Fractional-order diffusion, *Differ. Equations*, 1990, vol. 26, no. 4, pp. 485–492.
10. Pskhu A. V. The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order, *Izv. Math.*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 351–392. doi: 10.1070/IM2009v073n02ABEH002450.
11. Mamchuev M. O. Modified Cauchy-type problem for a loaded second-order parabolic equation with constant coefficients, *Doklady Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunarodnoi akademii nauk*, 2012, vol. 14, no. 2, pp. 22–28 (In Russian).
12. Metzler R., Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F. Fractional model equation for anomalous diffusion, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 1994, vol. 211, no. 1, pp. 13–24. doi: 10.1016/0378-4371(94)90064-7.
13. Giona M., Roman H. E. Fractional diffusion equation on fractals: one-dimensional case and asymptotic behavior, *Phys. A: Math. Gen.*, 1992, vol. 25, no. 8, pp. 2093–2105. doi: 10.1088/0305-4470/25/8/023.
14. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Physics Reports*, 2000, vol. 339, no. 1, pp. 1–77. doi: 10.1016/s0370-1573(00)00070-3.
15. Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics, *Phys. A: Math. Gen.*, 2004, vol. 37, no. 31, pp. R161–R208. doi: 10.1088/0305-4470/37/31/r01.

16. Uchaikin V. V. Cosmic ray anisotropy in fractional differential models of anomalous diffusion, *JETP*, 2013, vol. 116, no. 6, pp. 897–903. doi: 10.1134/S1063776113050269.
17. Uchaikin V. V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers*, Nonlinear Physical Science, vol. I, Background and Theory. Berlin, Springer, 2013. xii+385 pp. doi: 10.1007/978-3-642-33911-0.
18. Gorenflo R., Luchko Y., Mainardi F. Analytical properties and applications of the Wright function, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 1999, vol. 2, no. 4, pp. 383–414, arXiv: math-ph/0701069.
19. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series*, vol. 3, More special functions. New York, Gordon and Breach Science Publ., 1990, 800 pp.
20. Kilbas A. A., Saigo M. *H-Transform. Theory and Applications*, Analytical Methods and Special Functions, vol. 9. Boca Raton, etc., Chapman and Hall, 2004, xii+389 pp.
21. Marichev O. I. *Metod vychisleniia integralov ot spetsial'nykh funktsii (teoriia i tablitsy formul)* [A method of calculating integrals of special functions. (Theory and tables of formulas)]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1978, 312 pp. (In Russian)
22. Kuznetsov D. S. *Spetsial'nye funktsii* [Special functions]. Moscow, Vysshaia shkola, 1962, 248 pp. (In Russian)
23. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*, vol. II., Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Co., 1953, xvii+396 pp.
24. Khushtova F. G. Fundamental solution of the model equation of anomalous diffusion of fractional order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 722–735 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1445.

Received 05/XI/2015;
received in revised form 07/II/2016;
accepted 26/II/2016.