



Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 533.6.013.42

АЭРОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, СОДЕРЖАЩИХ ТЕКУЩУЮ ЖИДКОСТЬ

*С. А. Бочкарёв, С. В. Лекомцев*Институт механики сплошных сред УрО РАН,
Россия, 614013, Пермь, ул. Акад. Королёва, 1.

Аннотация

Работа посвящена анализу панельного флаттера круговых цилиндрических оболочек, содержащих идеальную сжимаемую жидкость и обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Аэродинамическое давление вычисляется согласно квазистатической аэродинамической теории. Поведение жидкости описывается в рамках потенциальной теории. Соответствующее волновое уравнение совместно с условием непроницаемости и граничными условиями преобразуются к системе уравнений с использованием метода Бубнова—Галёркина. В качестве математической формулировки задачи динамики упругой конструкции используется классическая теория оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа—Лява, и принцип возможных перемещений. В результате решение задачи, осуществляемое с помощью полуаналитического варианта метода конечных элементов, сводится к вычислению комплексных собственных значений связанной системы уравнений. Для этого используется итерационный алгоритм на основе метода Мюллера. Достоверность полученного численного решения задач аэроупругой и гидроупругой устойчивости оценена путём сравнения с известными теоретическими данными. Для оболочек с разными вариантами граничных условий и линейных размеров представлены результаты численных экспериментов по оценке влияния скорости внутреннего потока жидкости на величину статического давления в невозмущенном потоке газа, выступающего в качестве варьируемого параметра. Установлено, что с возрастанием скорости течения жидкости происходит видоизменение флаттерной потери устойчивости. Продемонстрировано, что с увеличением линейных размеров

© 2015 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования

Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В. Аэроупругая устойчивость круговых цилиндрических оболочек, содержащих текучую жидкость // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 750–767. doi: [10.14498/vsgtu1453](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1453).

Сведения об авторах

Сергей Аркадьевич Бочкарёв (к.ф.-м.н.; bochkarev@icmm.ru; автор, ведущий переписку), старший научный сотрудник, отдел комплексных проблем механики деформируемых твёрдых тел.

Сергей Владимирович Лекомцев (к.ф.-м.н.; lekomtsev@icmm.ru), научный сотрудник, отдел комплексных проблем механики деформируемых твёрдых тел.

оболочки стабилизирующее воздействие внутреннего потока жидкости, приводящее к повышению границ аэроупругой устойчивости, сменяется на дестабилизирующее. Конкретные значения геометрических размеров, определяющих изменение в характере динамического поведения, зависят от заданной комбинации граничных условий.

Ключевые слова: аэроупругость, сверхзвуковой поток газа, потенциальное течение сжимаемой жидкости, цилиндрическая оболочка, метод конечных элементов, устойчивость, флаттер.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1453>

Введение. Несмотря на то, что исследования панельного флаттера пластин, цилиндрических и конических оболочек вращения имеют уже более чем полувековую историю [1, 2], общим аспектом для выполненных в этом направлении работ является то, что упругое тело обтекается сверхзвуковым потоком газа только со стороны одной поверхности — наружной или внутренней. Точно так же на протяжении нескольких последних десятилетий интенсивно изучается взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью. История вопроса с обширной библиографией отражена в монографии [3]. Обзор более современных работ, как правило, численных, приведён в [4]. В контексте настоящей статьи представляет интерес анализ гидроупругой устойчивости коаксиальных оболочек, взаимодействующих с внутренним и кольцевым потоками жидкости. Показано [5–8], что совместное течение обоих потоков для оболочек с разными граничными условиями может носить аддитивный характер, оказывая более сильное дестабилизирующее воздействие на исследуемую систему, а также приводить к повышению границ устойчивости в зависимости от скоростей каждого из потоков.

Относительно недавно появились немногочисленные статьи, в которых при исследовании аэроупругой устойчивости учитывается воздействие жидкости внутри конструкции. Первыми в этой области являются работы [9, 10]. Здесь представлен анализ влияния плескания топлива внутри крыла на критические скорости потери устойчивости. Для расчётов использовалась аэродинамическая модель, основанная на методах вычислительной гидродинамики (CFD). Топливо моделировалось двумя способами: в виде сосредоточенной массы и в рамках потенциальной теории с учётом гидроупругого взаимодействия. В последнем случае авторы утверждают, что принимают во внимание эффект плескания, хотя на свободной поверхности жидкости соответствующее граничное условие не задаётся. Многочисленными вычислениями показано, что упрощение расчётной модели за счёт исключения из неё влияния топлива приводит к ошибочным результатам. В работе [11] разработан гибридный конечно-элементный метод, предназначенный для исследования сверхзвукового флаттера частично заполненных неподвижной жидкостью конических оболочек. Здесь воздействие внутренней среды моделировалось в виде присоединённой массы, а свободная поверхность жидкости была перпендикулярна направлению потока газа. Необходимые коэффициенты в матрице масс были получены аналитически из уравнений потенциальной теории. Установлено, что низкий уровень заполнения оболочки жидкостью приводит к более сильному стабилизирующему эффекту для коротких конструкций. Этими же авторами предложена модель учёта влияния плескания жидкости на аэроупругие характеристики цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью (свободная поверхность жидкости также перпендикулярна

направлению потока газа) [12]. Аналитическое выражение для потенциала возмущения скорости записано относительно функций Бесселя и функций формы элемента, найденных из точных решений теории оболочек (гибридный подход). Учёт плескания жидкости осуществлен через выражение для потенциальной энергии перемещающегося на свободной поверхности элемента жидкости и соответствующего граничного условия. Показано, что это приводит к снижению критических скоростей флаттера, особенно в случае коротких оболочек с высоким уровнем заполнения. Аэроупругая устойчивость панели с присоединенным слоем жидкости рассмотрена в работе [13]. Здесь к уравнениям потенциальной теории, описывающим несжимаемую жидкость с учётом эффекта плескания, применяется метод граничных элементов, а при численном моделировании упругого тела используется метод конечных элементов. Выполненными расчётами подтверждено, что присутствие слоя жидкости расширяет границу аэроупругой устойчивости. Однако конкретные значения критических скоростей газа существенно зависят от массы внешней жидкости и моделей, используемых для описания эффектов на свободной поверхности (неподвижная граница или поверхность с учётом плескания).

Из представленного обзора следует, что внимание исследователей было в основном сосредоточено на изучении влияния неподвижной жидкости со свободной поверхностью на аэроупругие характеристики тонкостенных конструкций. Анализ панельного флаттера цилиндрических оболочек, имеющих различные комбинации граничных условий и полностью заполненных неподвижной или текущей идеальной жидкостью, в литературе не представлен. Выполнение такого исследования является целью настоящей работы.

1. Постановка задачи. Рассматривается упругая цилиндрическая оболочка (рис. 1) длиной L , радиусом R и толщиной h . Снаружи оболочка обтекается сверхзвуковым потоком газа, имеющим скорость U_∞ , а внутри неё течёт поток идеальной сжимаемой жидкости со скоростью U . Целью работы является исследование влияния скорости внутреннего потока жидкости на границы аэроупругой устойчивости при различных вариантах граничных условий, задаваемых на краях оболочки, и линейных размерах.

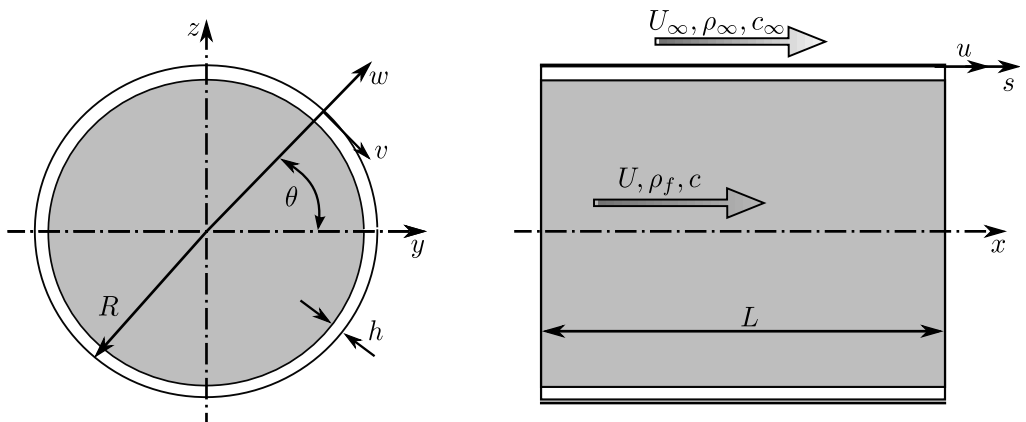


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка с жидкостью, обтекаемая потоком сверхзвукового газа [Figure 1. Cylindrical shell containing fluid and subjected to the external supersonic gas flow]

Компоненты вектора деформации $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \kappa_1, \kappa_2, 2\kappa_{12}\}^\top$ в криволинейной системе координат (s, θ, z) определяются с помощью классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа—Лява, и записываются следующим образом [14]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s}, \\ \kappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, & \kappa_2 &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), & \kappa_{12} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right). \end{aligned}$$

Здесь u , v и w — меридиональная, окружная и нормальная составляющие вектора перемещений оболочки.

Физические соотношения, устанавливающие связь между вектором усилий и моментов \mathbf{T} и вектором деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, представляются в матричном виде

$$\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^\top = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1)$$

Ненулевые компоненты матрицы жесткостей \mathbf{D} определяются для изотропного материала через модуль упругости E , коэффициент Пуассона ν и модуль сдвига известным образом [14].

Математическая формулировка задачи основана на принципе возможных перемещений, который в матричной форме имеет вид

$$\int_{S_s} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^\top \mathbf{T} dS + \int_{S_s} \delta \mathbf{d}^\top \rho_0 \ddot{\mathbf{d}} dS - \int_{S_s} \delta \mathbf{d}^\top \mathbf{P} dS = 0, \quad (2)$$

где

$$\rho_0 = \int_h \rho_s dz;$$

\mathbf{d} и $\mathbf{P} = (0 \ 0 \ p_a + p_f)$ — векторы обобщённых перемещений и поверхностных нагрузок; p_a и p_f — аэродинамическое и гидродинамическое давления, действующие на наружную и внутреннюю поверхности оболочки; ρ_s — удельная плотность материала оболочки; S_s — поверхность, ограничивающая объём оболочки.

Аэродинамическое давление, действующее со стороны потока газа на упругую поверхность, вычисляется согласно квазистатической аэродинамической теории с помощью приближенной формулы [15, 16]

$$p_a = -q \left(\frac{\partial w}{\partial s} + q_1 \frac{\partial w}{\partial t} - q_2 w \right), \quad (3)$$

где

$$q = \rho_\infty U_\infty^2 / \beta = \kappa \rho_\infty M_\infty^2 / \beta, \quad q_1 = q(M_\infty^2 - 2) / (U_\infty \beta^2), \quad q_2 = qR\beta/2.$$

Здесь $M_\infty = U_\infty / c_\infty$ — число Маха в газе; ρ_∞ , p_∞ и c_∞ — плотность, статическое давление и скорость звука в невозмущённом потоке газа; q — модифицированное динамическое давление; κ — показатель адиабаты; $\beta = (M_\infty^2 - 1)^{1/2}$.

Гидродинамическое давление, действующее со стороны жидкости, занимающей область V_f , на смоченную поверхность оболочки $S_\sigma = S_f \cap S_s$, вычисляется с использованием линеаризованного уравнения Бернулли [17]

$$p_f = -\rho_f \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Здесь ρ_f — плотность жидкости; S_f — поверхность, ограничивающая объём жидкости; ϕ — потенциал возмущения скорости, который в цилиндрической системе координат (r, θ, x) описывается волновым уравнением

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 \phi, \quad (5)$$

где c — скорость звука в жидкости.

На поверхности раздела «оболочка–жидкость» S_σ задается условие непроницаемости

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial s}, \quad (6)$$

где n — нормаль к поверхности.

Потенциал возмущения скорости на входе в оболочку и выходе из нее подчиняется следующим граничным условиям:

$$\phi|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}|_{x=L} = 0. \quad (7)$$

Данная комбинация граничных условий позволяет получать результаты, качественно согласующиеся с данными, наблюдаемыми в натуральных экспериментах.

Для численной реализации задачи на основе полуаналитического варианта метода конечных элементов (МКЭ) уравнения для потенциала возмущения скорости (5) с граничными условиями (6), (7) преобразуются с помощью метода Бубнова–Галёркина [18].

2. Численная реализация. Численная реализация задачи выполнена с использованием полуаналитического варианта МКЭ [19], основанного на представлении решения в виде ряда Фурье по окружной координате θ :

$$(u, w, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} (u_j, w_j, \phi_j) \cos j\theta, \quad v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \sin j\theta, \quad (8)$$

где j — номер гармоники.

Выражая в (8) искомые переменные через их узловые значения, получим известные матричные соотношения:

$$\mathbf{U} = \{u, v, w\}^\top = \mathbf{N} \mathbf{d}^e, \quad \phi = \mathbf{F} \mathbf{f}^e, \quad \varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{d}^e. \quad (9)$$

Здесь \mathbf{N} и \mathbf{F} — матрицы функций формы оболочечного конечного элемента и потенциала возмущения скорости; \mathbf{d}_e и \mathbf{f}_e — векторы узловых значений; \mathbf{B} — матрица связи деформации ε с узловыми значениями.

Дискретизация оболочки осуществляется с использованием высокоточного конечного элемента в виде усечённого конуса с аппроксимацией меридиональной и окружной компонент вектора перемещений кубическим полиномом, а нормальной компоненты — полиномом седьмой степени [20]. Для жидкости применяется треугольный конечный элемент с линейной аппроксимацией потенциала возмущения скорости.

Применяя стандартные процедуры МКЭ, с учётом (1), (3), (4), (8), (9) получим из преобразованного волнового уравнения для потенциала возмущения

скорости и принципа возможных перемещений (2) связанную систему двух уравнений. В объединённом виде её можно записать следующим образом:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{A}) \{ \mathbf{d} \ \boldsymbol{\phi} \}^\top + \mathbf{M} \{ \ddot{\mathbf{d}} \ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \}^\top + \mathbf{C} \{ \dot{\mathbf{d}} \ \dot{\boldsymbol{\phi}} \}^\top = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix}, & \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_f \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{C}_{sf} \\ \mathbf{C}_{fs} & \mathbf{C}_f \end{bmatrix}, & \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{A}_{sf} \\ \mathbf{A}_{fs} & \mathbf{A}_f \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_s &= \sum_{m_s} \int_{S_s} \mathbf{B}^\top \mathbf{D} \mathbf{B} dS, & \mathbf{M}_s &= \sum_{m_s} \int_{S_s} \mathbf{N}^\top \rho_0 \mathbf{N} dS, \\ \mathbf{M}_f &= \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{\mathbf{F}^\top \mathbf{F}}{c^2} dV, & \mathbf{K}_f &= \sum_{m_f} \int_{V_f} \left(\mathbf{F}_{,r}^\top \mathbf{F}_{,r} + \frac{\mathbf{F}_{,\theta}^\top \mathbf{F}_{,\theta}}{r^2} + \mathbf{F}_{,x}^\top \mathbf{F}_{,x} \right) dV, \\ \mathbf{C}_{fs} &= - \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} \mathbf{F}^\top \bar{\mathbf{N}} dS, & \mathbf{C}_{sf} &= \rho_f \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{N}}^\top \mathbf{F} dS, \\ \mathbf{A}_{sf} &= \rho_f \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} U \bar{\mathbf{N}}^\top \mathbf{F}_{,x} dS, & \mathbf{A}_f &= - \sum_{m_f} \int_{V_f} M^2 \mathbf{F}_{,s}^\top \mathbf{F}_{,s} dV, \\ \mathbf{C}_f &= \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{2U}{c^2} \mathbf{F}_{,x}^\top \mathbf{F} dV, & \mathbf{C}_s &= q_1 \sum_{m_s} \int_{S_s} \bar{\mathbf{N}}^\top \bar{\mathbf{N}} dS, \\ \mathbf{A}_{fs} &= - \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} U \mathbf{F}^\top \bar{\mathbf{N}}_{,s} dS, & \mathbf{A}_s &= \sum_{m_s} \int_{S_s} (q_1 \bar{\mathbf{N}}^\top \bar{\mathbf{N}}_{,s} + q_2 \bar{\mathbf{N}}^\top \bar{\mathbf{N}}) dS. \end{aligned}$$

Здесь m_f и m_s — число конечных элементов, на которые разбиваются области жидкости и оболочки; $\bar{\mathbf{N}}$ — матрица функций формы для нормальной составляющей вектора перемещений оболочки.

Представляя возмущённое движение оболочки и жидкости

$$(\mathbf{d}, \boldsymbol{\phi}) = (\mathbf{q}, \mathbf{f}) \exp(i^* \lambda t),$$

окончательно получим

$$(\mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M} + i^* \lambda \mathbf{C} + \mathbf{A}) \{ \mathbf{q} \ \mathbf{f} \}^\top = 0.$$

Здесь \mathbf{q} и \mathbf{f} — некоторые функции координат, $i^* = \sqrt{-1}$ и $\lambda = \lambda_1 + i^* \lambda_2$ — характеристический показатель. Решение задачи на собственные значения осуществляется с применением итерационного алгоритма на основе метода Мюллера [21, 22].

В численных примерах рассматривается выполненная из алюминия ($E = 70$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\rho_s = 2707$ кг/м³) цилиндрическая оболочка толщиной $h = 1 \cdot 10^{-3}$ м со следующими вариантами кинематических граничных условий:

S — свободное опирание ($v = w = 0$),

C — жёсткое закрепление ($u = v = w = \partial w / \partial s = 0$) и

F — свободный край.

Потоки жидкости и газа имеют следующие характеристики: $\rho_f = 1000$ кг/м³, $c = 1500$ м/с, $\kappa = 1.4$, $M_\infty = 3$; температура торможения в невозмущённом потоке $T_\infty = 48.89^\circ\text{C}$. Численными экспериментами установлено, что приемлемая точность вычислений достигается в том случае, когда связанная система имеет около 880 степеней свободы. Для отображения полученных результатов используются безразмерные частота Λ , скорость жидкости Υ и параметр динамического давления γ [2, 3]:

$$\Lambda = (\lambda R / \xi) \cdot 10^{-3}, \quad \Upsilon = (U / \xi) \cdot 10^{-3}, \quad \gamma = (q L^3 / D) \cdot 10^{-4}, \\ \xi = \sqrt{E / [\rho (1 - \nu^2)]}, \quad D = E h^3 / [12 (1 - \nu^2)].$$

3. Верификация численного алгоритма. С целью тестирования задачи об аэроупругой устойчивости осуществлено сравнение с известными численно-аналитическими и численными решениями для пустой изотропной оболочки, свободно опертой на обоих торцах и имеющей следующие характеристики: $h = 1.016 \cdot 10^{-4}$ м, $R = 0.2032$ м, $\rho_s = 8904$ кг/м³. Остальные параметры определяют различные варианты расчёта:

Вариант I: $L = 0.4064$ м, $E = 89.647$ ГПа, $\nu = 0.33$;

Вариант II: $L = 0.3912$ м, $E = 110.31$ ГПа, $\nu = 0.35$.

Сравнение критических номеров гармоник j_{cr} и соответствующих им минимальных значений статического давления в невозмущённом потоке p_∞ приведено в табл. 1. Из представленных данных следует, что получаемые в рамках разработанного алгоритма результаты хорошо согласуются с известными решениями.

Таблица 1

Сравнение границ флаттера для свободно опертых оболочек
[Comparison of flutter boundaries for simply supported shells]

A source list	Variant I		Variant II	
	p_∞ , Pa	j_{cr}	p_∞ , Pa	j_{cr}
An analytical solution [23, 24]	3 792	25	2 896	24
A FEM solution [25]	3 875	25	3 875	26
A hybrid FEM solution [26]	2 633	25	3 599	26
A current solution	2 744	24	3 713	25

Гидроупругая устойчивость свободно опертой на обоих краях оболочки ($E = 206$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\rho_s = 7850$ кг/м³, $L/R = 2$, $h/R = 0.01$), внутри которой течёт несжимаемая жидкость ($\rho_f / \rho_s = 0.128$), рассматривается в качестве тестовой задачи в различных аналитических и численных работах [27–31]. При достижении безразмерной скорости значения Y_D ($Y = U/\zeta$, $\zeta = (\pi^2/L)\sqrt{D/(\rho h)}$) действительная часть первой моды становится равной нулю, что соответствует статической потере устойчивости (дивергенции). Дальнейшее увеличение скорости жидкости до величины Y_R приводит к тому, что частота первой моды становится отличной от нуля и при скорости Y_F сливается с действительной частью второй моды. В этом случае возникает динамическая неустойчивость в виде связанного флаттера по двум формам колебаний. В табл. 2 приведено сравнение безразмерных скоростей, полученных в настоящей работе, с известными данными. Имеющиеся незначительные расхождения в результатах объясняются как различными методами решения,

Таблица 2

Сравнение критических скоростей дивергенции Y_D , флаттера Y_F и повторной стабилизации Y_R для цилиндрической оболочки, свободно опертой с двух торцов при $j = 5, L/R = 2$

[Comparison of the critical velocities for the onset of divergence Y_D , flutter Y_F and restabilization Y_R for cylindrical shell simply supported at two ends when $j = 5, L/R = 2$]

Critical velocities (Y_D, Y_R, Y_F)							
	A current solution	Data from [18]	Data from [27]	Data from [28]	Data from [29]	Data from [30]	Data from [31]
Y_D	3.43	3.36	3.54	3.1	3.6	3.33	3.49
Y_R	4.49	4.44	4.54	—	—	4.34	4.56
Y_F	4.53	4.47	4.97	3.95	4.83	4.65	4.62

так и граничными условиями, принимаемыми для потока жидкости. Отметим также, что в работе [18], где реализован аналогичный метод решения, для оболочки был использован более простой вариант конечного элемента.

4. Анализ несвязанных аэроупругого и гидроупругого взаимодействий. До оценки взаимного влияния гидроупругой нагрузки на аэроупругую и наоборот целесообразно представить примеры исследований неустойчивости оболочек, подвергающихся воздействию этих нагрузок по отдельности. На рис. 2, а представлены графики изменений безразмерного параметра динамического давления γ от номера гармоники j для пустых цилиндрических оболочек ($L/R = 2, R/h = 500$) с разными граничными условиями. На рис. 2, б для покоящейся в вакууме оболочки с аналогичными вариантами закрепления показаны зависимости безразмерной скорости внутреннего течения жидкости U от номера гармоники j .

Основываясь на анализе данных, представленных на рис. 2, отметим, что внешнее обтекание газа и внутренне течение жидкости, оказывая дестабилизирующее воздействие, по-разному влияют на характер динамического поведения оболочек с различными вариантами граничных условий. Прежде всего, это проявляется в виде неустойчивости, которая осуществляется при достижении газом или жидкостью критических скоростей. В частности, в случае сверхзвукового обтекания потоком воздуха потеря устойчивости как пустой оболочки, так и оболочки, содержащей неподвижную жидкость или газ, осуществляется в виде флаттера по двум формам колебаний для любой комбинации граничных условий. Демонстрирующий этот вид потери устойчивости пример приведён на рис. 3, а. Здесь изображены эволюции действительных и мнимых частей трёх первых безразмерных собственных значений Λ от безразмерного параметра динамического давления γ , а через m обозначено число полуволн в меридиональном направлении. Критерием потери устойчивости выступает появление отрицательной мнимой части для первой моды ($m = 1$) колебаний при скорости $\gamma = \gamma_{cf}$.

При внутреннем течении жидкости вид потери устойчивости определяется комбинацией заданных граничных условий для оболочки. В случае свободного опирания или жёсткого закрепления на обоих краях неустойчивость проявляется в виде дивергенции, тогда как при консольном закреплении — в виде флаттера по одной форме колебаний. Для последнего варианта пример эволюции собственных значений показан на рис. 3, б. Здесь критической

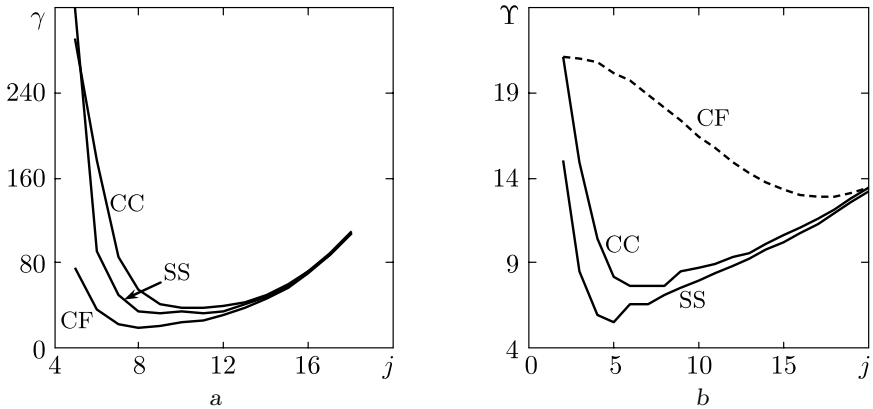


Рис. 2. Изменение безразмерного параметра динамического давления γ (а) и безразмерной скорости внутреннего течения жидкости Υ (б) от номера гармоники j для оболочек с разными граничными условиями при $L/R = 2$, $R/h = 500$

[Figure 2. The dimensionless parameter of dynamic pressure (a) and dimensionless velocity of the internal fluid flow Υ (b) as the functions of the number of harmonic j for shell with different boundary conditions when $L/R = 2$, $R/h = 500$]

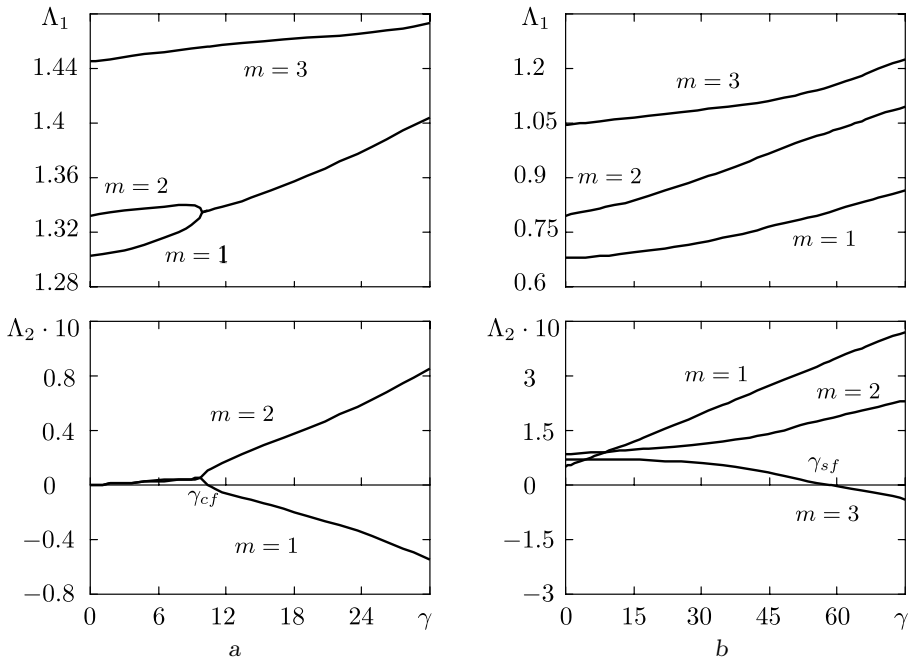


Рис. 3. Изменение действительных Λ_1 и мнимых Λ_2 частей трёх первых безразмерных собственных значений от безразмерного параметра динамического давления γ для консольно закреплённой оболочки: а — $\Upsilon = 0$, $j = 10$; б — $\Upsilon = 2$, $j = 8$

[Figure 3. The real Λ_1 and imaginary Λ_2 parts of the first three dimensionless eigenvalues as the functions of dimensionless parameter of the dynamic pressure γ for cantilevered shell; Fig. a is a case when $\Upsilon = 0$, $j = 10$; Fig. b is a case when $\Upsilon = 2$, $j = 8$]

является скорость $\gamma = \gamma_{sf}$, при которой появляется отрицательная мнимая часть у третьего собственного значения ($m = 3$), что характеризует появление флаттера по одной форме колебаний.

Другим фактом, следующим из анализа данных, представленных на рис. 2, является то, что оболочки с одинаковыми граничными условиями могут по-разному воспринимать различную нагрузку. Характерным примером здесь может служить консольное закрепление, которое демонстрирует наибольшую восприимчивость к внешнему обтеканию и наибольшую сопротивляемость к внутреннему течению жидкости. Очевидной причиной такого поведения является зависимость направления нормальных перемещений свободного края конструкции от вида прикладываемой нагрузки.

5. Панельный флаттер оболочки с внутренним потоком текущей жидкости. При исследовании совместного взаимодействия аэродинамической и гидродинамической нагрузки скорость течения жидкости U принимается фиксированной и осуществляется поиск статического давления в невозмущённом потоке p_∞ , при котором происходит потеря устойчивости. На рис. 4–6 приведены зависимости безразмерного параметра динамического давления γ от номера гармоники j , полученные при разных скоростях потока жидкости Υ для оболочек с различными вариантами граничных условий. Из представленных результатов расчётов следуют представленные ниже выводы.

С повышением скорости течения жидкости монотонная зависимость параметра динамического давления γ сменяется немонотонной. Такое поведение обусловлено тем, что степень влияния текущей жидкости для разных гармоник проявляется не одинаково. При этом критический номер гармоники, т.е. номер гармоники с наименьшим значением параметра γ , смещается в область более низких значений.

При совместном взаимодействии потоков жидкости и газа происходит смена типа неустойчивости. Если для неподвижной жидкости потеря устойчивости осуществляется в виде флаттера по двум формам колебаний (рис. 3, *a*), то с возрастанием скорости внутреннего потока жидкости тип неустойчивости сменяется на флаттер по одной форме колебаний (рис. 3, *b*). Причём он также является одинаковым для любой комбинации граничных условий. На примере консольного закрепления (рис. 3) можно заключить, что увеличение скорости жидкости, с одной стороны, приводит к существенному снижению действительных частей собственных значений и их менее плотному распределению по спектру, а с другой — к увеличению их мнимых частей и повышению тем самым демпфирующих свойств системы.

Для конфигураций оболочек с указанными линейными размерами даже незначительное внутреннее течение жидкости приводит к повышению границ аэроупругой устойчивости. Исключением является комбинация линейных размеров $L/R = 5$ и $R/h = 500$ для оболочки со свободным опиранием (рис. 5, *b*). В этом случае повышение скорости течения жидкости для некоторых гармоник приводит, наоборот, к снижению параметра динамического давления γ вплоть до того, что при скорости $\Upsilon = 2$ даже небольшое его значение способствует потере устойчивости. Следовательно, дестабилизирующее или стабилизирующее воздействие внутреннего потока жидкости зависит от геометрических размеров оболочки и вида граничных условий.

Более детально этот вывод демонстрируется результатами, приведенными на рис. 7. Здесь показаны границы устойчивости, полученные для оболочек

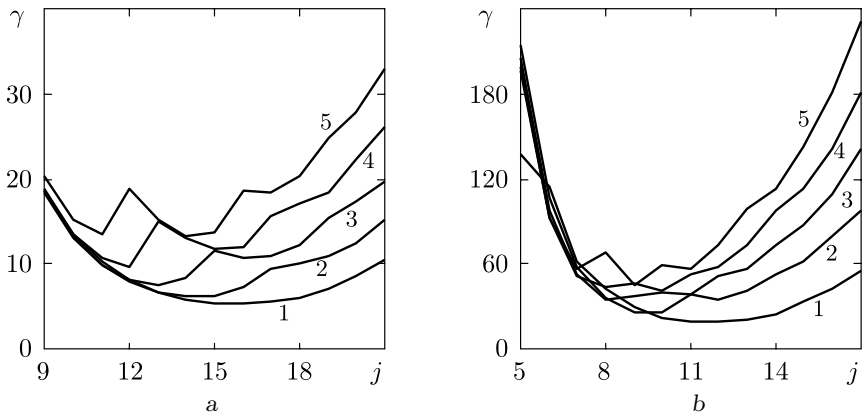


Рис. 4. Изменение безразмерного параметра динамического давления γ от номера гармоники j , полученного при разных скоростях потока жидкости, текущей внутри жёстко закреплённой оболочки ($R/h = 500$; кривая 1 – $\Upsilon = 0$, кривая 2 – $\Upsilon = 0.5$, кривая 3 – $\Upsilon = 1$, кривая 4 – $\Upsilon = 1.5$, кривая 5 – $\Upsilon = 2$); а – $L/R = 2$, б – $L/R = 5$

[Figure 4. The dimensionless parameter of the dynamic pressure γ versus the number of harmonic j , obtained at different velocities of the fluid flow inside the rigidly clamped shell ($R/h = 500$; the curve marked with 1 corresponds to $\Upsilon = 0$, the curve marked with 2 corresponds to $\Upsilon = 0.5$, the curve marked with 3 corresponds to $\Upsilon = 1$, the curve marked with 4 corresponds to $\Upsilon = 1.5$, the curve marked with 5 corresponds to $\Upsilon = 2$);
 Fig. a is a case when $L/R = 2$; Fig. b is a case when $L/R = 5$]

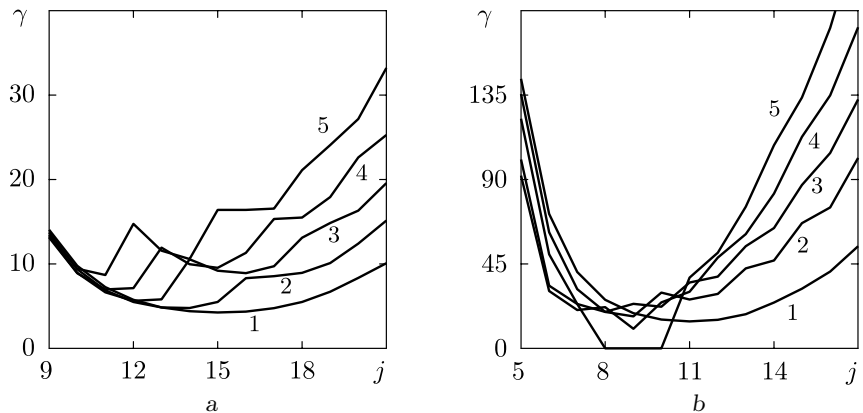


Рис. 5. Изменение безразмерного параметра динамического давления γ от номера гармоники j , полученного при разных скоростях потока жидкости, текущей внутри свободно опертой оболочки ($R/h = 500$; кривая 1 – $\Upsilon = 0$, кривая 2 – $\Upsilon = 0.5$, кривая 3 – $\Upsilon = 1$, кривая 4 – $\Upsilon = 1.5$, кривая 5 – $\Upsilon = 2$); а – $L/R = 2$, б – $L/R = 5$

[Figure 5. The dimensionless parameter of the dynamic pressure γ versus the number of harmonic j , obtained at different velocities of the fluid flow inside the simply supported shell ($R/h = 500$; the curve marked with 1 corresponds to $\Upsilon = 0$, the curve marked with 2 corresponds to $\Upsilon = 0.5$, the curve marked with 3 corresponds to $\Upsilon = 1$, the curve marked with 4 corresponds to $\Upsilon = 1.5$, the curve marked with 5 corresponds to $\Upsilon = 2$);
 Fig. a is a case when $L/R = 2$; Fig. b is a case when $L/R = 5$]

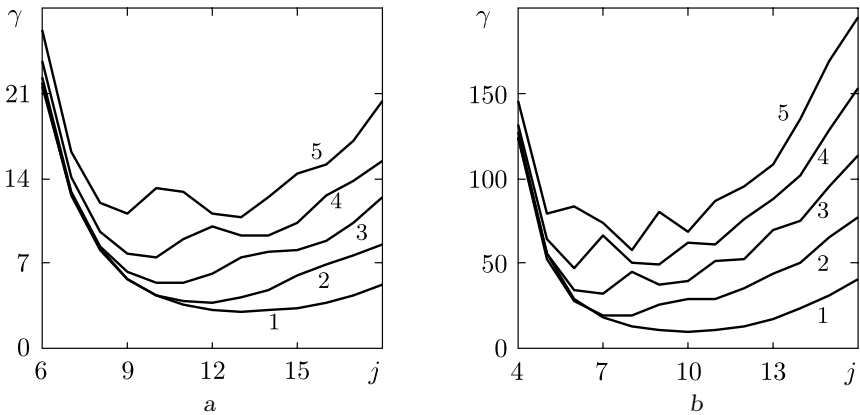


Рис. 6. Изменение безразмерного параметра динамического давления γ от номера гармоники j , полученного при разных скоростях потока жидкости, текущего внутри консольно закреплённой оболочки ($R/h = 500$; кривая 1 — $\Upsilon = 0$, кривая 2 — $\Upsilon = 0.5$, кривая 3 — $\Upsilon = 1$, кривая 4 — $\Upsilon = 1.5$, кривая 5 — $\Upsilon = 2$); а — $L/R = 2$, б — $L/R = 5$

[Figure 6. The dimensionless parameter of the dynamic pressure γ versus the number of harmonic j , obtained at different velocities of the fluid flow inside the cantilevered shell ($R/h = 500$; the curve marked with 1 corresponds to $\Upsilon = 0$, the curve marked with 2 corresponds to $\Upsilon = 0.5$, the curve marked with 3 corresponds to $\Upsilon = 1$, the curve marked with 4 corresponds to $\Upsilon = 1.5$, the curve marked with 5 corresponds to $\Upsilon = 2$); Fig. a is a case when $L/R = 2$; Fig. b is a case when $L/R = 5$]

с разными комбинациями граничных условий для двух вариантов линейных размеров. Немонотонный характер приведённых кривых отражает тот факт, что с повышением скорости течения жидкости происходит изменение критического номера гармоники. Из представленных зависимостей видно, что течение жидкости внутри оболочки приводит к повышению значений параметра динамического давления γ , оказывая тем самым стабилизирующее влияние. Исключение составляют свободно опертые оболочки при $L/R = 5$, где такая стабилизация проявляется только на ограниченном диапазоне скоростей. Характер приведённых графиков позволяет сделать предположение об аналогичном поведении и для других вариантов граничных условий в случае дальнейшего повышения скорости течения жидкости и изменения геометрических размеров.

На рис. 8 для свободно опертых и консольно закреплённых оболочек, имеющих различные комбинации линейных размеров, показано изменение безразмерного параметра динамического давления γ от безразмерной скорости жидкости Υ . Из представленных данных следует, что для тонких и длинных свободно опертых оболочек (см. рис. 8, а, кривая 4) совместное воздействие аэродинамической и гидродинамической нагрузок носит аддитивный характер и приводит к резкому снижению границ устойчивости. Отметим также, что оболочки с таким типом закрепления оказывают наименьшую сопротивляемость воздействию внутреннего течения жидкости (см. рис. 2, б). При анализе данных, приведенных на рис. 8, необходимо принять во внимание то, что значение используемого безразмерного параметра динамического давления γ прямо пропорционально изменению длины оболочки. Реальные значения статического давления в невозмущённом потоке p_∞ , при которых происходит потеря устойчивости, изменяются противоположным образом.

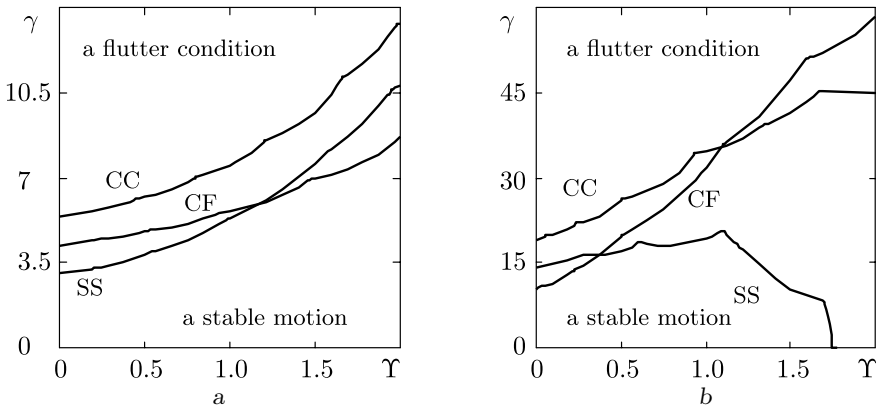


Рис. 7. Изменение безразмерного параметра динамического давления γ от безразмерной скорости жидкости Υ для оболочек с разными граничными условиями при $R/h = 500$:
 a — $L/R = 2$; b — $L/R = 5$

[Figure 7. The dimensionless parameter of the dynamic pressure γ versus the dimensionless velocity of the liquid flow Υ for shells with different boundary conditions at $R/h = 500$;
 Fig. a is a case when $L/R = 2$; Fig. b is a case when $L/R = 5$]

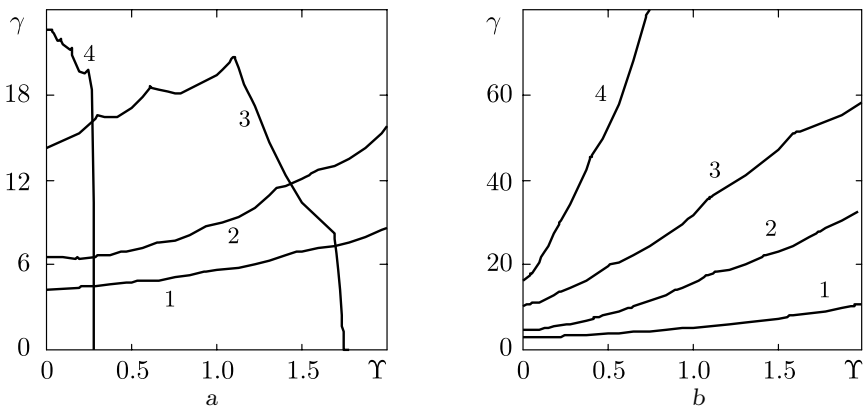


Рис. 8. Изменение безразмерного параметра динамического давления γ от безразмерной скорости жидкости Υ для оболочек с разными линейными размерами (линия 1 — $L/R = 2$, $R/h = 500$; кривая 2 — $L/R = 2$, $R/h = 1000$; кривая 3 — $L/R = 5$, $R/h = 500$; кривая 4 — $L/R = 5$, $R/h = 1000$); a — случай SS; b — случай CF

[Figure 8. The dimensionless parameter of the dynamic pressure γ versus the dimensionless velocity of the liquid flow Υ for shells of different linear dimensions (the curve marked with 1 corresponds to $L/R = 2$, $R/h = 500$; the curve marked with 2 corresponds to $L/R = 2$, $R/h = 1000$; the curve marked with 3 corresponds to $L/R = 5$, $R/h = 500$; the curve marked with 4 corresponds to $L/R = 5$, $R/h = 1000$);
 Fig. a is a case for SS mode; Fig. b is a case for CF model]

Заключение. Представлены результаты численного исследования динамического поведения круговой цилиндрической оболочки вращения, подвергающейся одновременному воздействию внешнего сверхзвукового потока газа и внутреннего дозвукового потока идеальной сжимаемой жидкости. Для оболочек с разными вариантами граничных условий и линейными размерами проанализировано влияние скорости внутреннего потока жидкости на границы аэроупругой устойчивости. Продемонстрировано, что с увеличением скорости жидкости вне зависимости от заданной комбинации граничных условий осуществляется изменение вида потери устойчивости: флаттер по двум формам колебаний сменяется флаттером по одной форме колебаний. Показано, что на толстостенные и короткие оболочки, имеющие любую комбинацию граничных условий, внутренний поток жидкости оказывает стабилизирующее влияние и повышает границы аэроупругой устойчивости. С увеличением линейных размеров и достижением ими некоторых пороговых значений, конкретная величина которых зависит от заданной комбинации граничных условий, стабилизирующее воздействие внутреннего потока жидкости сменяется на дестабилизирующее. Установлено также, что внешнее сверхзвуковое течение не оказывает никакого влияния на критические скорости внутреннего потока жидкости.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-05254-а).

ORCIDс

Сергей Аркадьевич Бочкарёв: <http://orcid.org/0000-0002-9722-1269>

Лекомцев Сергей Владимирович: <http://orcid.org/0000-0002-8331-2979>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Новичков Ю. Н. Флаттер пластин и оболочек / Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела, Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. С. 67–122.
- Bismarck-Nasr M. N. Finite element analysis of aeroelasticity of plates and shells // *Appl. Mech. Rev.*, 1992. vol. 45, no. 12. pp. 461–482. doi: [10.1115/1.3119783](https://doi.org/10.1115/1.3119783).
- Païdoussis M. P. *Fluid-structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*. vol. 2. London: Academic Press, 2003. 1040 pp.
- Bochkarev S. A., Matveenkov V. P. Specific features of dynamic behavior of stationary and rotating singlecoaxial cylindrical shells interacting with the axial and rotational fluid flows // *J. Vib. Acoust.*, 2015. vol. 137, no. 2, 021001. doi: [10.1115/1.4028829](https://doi.org/10.1115/1.4028829).
- Païdoussis M. P., Chan S. P., Misra A. K. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid // *J. Sound Vib.*, 1984. vol. 97, no. 2. pp. 201–235. doi: [10.1016/0022-460X\(84\)90319-5](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90319-5).
- Païdoussis M. P., Nguyen V. B., Misra A. K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // *J. Fluids Struct.*, 1991. vol. 5, no. 2. pp. 127–164. doi: [10.1016/0889-9746\(91\)90454-W](https://doi.org/10.1016/0889-9746(91)90454-W).
- Бочкарёв С. А., Матвеев В. П. Динамическое поведение упругих коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих движущуюся в них жидкость // *ПММ*, 2010. Т. 74, № 4. С. 655–666.
- Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В. Исследование влияния граничных условий на устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с текущей жидкостью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.*, 2012. № 3(28). С. 88–101. doi: [10.14498/vsgtu1051](https://doi.org/10.14498/vsgtu1051).
- Chiu E. K.-Y., Farhat C. Effects of fuel slosh on flutter prediction, 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC/ Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2009, AIAA Paper 2009–2682–377. doi: [10.2514/6.2009-2682](https://doi.org/10.2514/6.2009-2682).

10. Farhat C., Chiu E. K.-Y., Amsallem D., Schottó J.-S., Ohayon R. Modeling of fuel sloshing and its physical effects on flutter // *AIAA J.*, 2013. vol. 51, no. 9. pp. 2252–2265. doi: [10.2514/1.J052299](https://doi.org/10.2514/1.J052299).
11. Sabri F., Lakis A. A. Hybrid finite element method applied to supersonic flutter of an empty or partially liquid-filled truncated conical shell // *J. Sound Vib.*, 2010. vol. 329, no. 3. pp. 302–316. doi: [10.1016/j.jsv.2009.09.023](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.09.023).
12. Sabri F., Lakis A. A. Effects of sloshing on flutter prediction of liquid-filled circular cylindrical shell // *J. Aircr.*, 2011. vol. 48, no. 6. pp. 1829–1839. doi: [10.2514/1.C031071](https://doi.org/10.2514/1.C031071).
13. Noorian M., Haddadpour H., Firouz-Abadi R. Investigation of panel flutter under the effect of liquid sloshing // *J. Aerosp. Eng.*, 2015. vol. 28, no. 2, 04014059. doi: [10.1061/\(ASCE\)AS.1943-5525.0000384](https://doi.org/10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000384).
14. Бидерман В. Л. *Механика тонкостенных конструкций*. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
15. Voss H. M. The effect of an external supersonic flow on the vibration characteristics of thin cylindrical shells // *J. Aerosp. Sci.*, 1961. vol. 28, no. 12. pp. 945–956. doi: [10.2514/8.9264](https://doi.org/10.2514/8.9264).
16. Бочкарёв С. А., Матвеев В. П. Решение задачи о панельном флаттере оболочечных конструкций методом конечных элементов // *Матем. моделирование*, 2002. Т. 14, № 12. С. 55–71.
17. Вольмир А. С. *Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости*. М.: Наука, 1979. 320 с.
18. Бочкарёв С. А., Матвеев В. П. Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // *Изв. РАН. МТТ*, 2008. № 3. С. 189–199.
19. Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. М.: Мир, 1975. 544 с.
20. Shivakumar K. N., Krishna Murty A. V. A high precision ring element for vibrations of laminated shells // *J. Sound Vib.*, 1978. vol. 58, no. 3. pp. 311–318. doi: [10.1016/S0022-460X\(78\)80040-6](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(78)80040-6).
21. Матвеев В. П. Об одном алгоритме решения задачи о собственных колебаниях упругих тел методом конечных элементов / *Краевые задачи теории упругости и вязкоупругости*. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. С. 20–24.
22. Матвеев В. П., Севодин М. А., Севодина Н. В. Приложения метода Мюллера и принципа аргумента к задачам на собственные значения в механике деформируемого твердого тела // *Вычисл. мех. сплош. сред.*, 2014. № 3. С. 331–336. doi: [10.7242/1999-6691/2014.7.3.32](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.3.32).
23. Olson M. D., Fung Y. C. Comparing theory and experiment for the supersonic flutter of circular cylindrical shells // *AIAA J.*, 1967. vol. 5, no. 10. pp. 1849–1856. doi: [10.2514/3.4315](https://doi.org/10.2514/3.4315).
24. Carter L. L., Stearman R. O. Some aspects of cylindrical shell panel flutter // *AIAA J.*, 1968. vol. 6, no. 1. pp. 37–43. doi: [10.2514/3.4438](https://doi.org/10.2514/3.4438).
25. Ganapathi M., Varadan T. K., Jijen J. Field-consistent element applied to flutter analysis of circular cylindrical shells // *J. Sound Vib.*, 1994. vol. 171, no. 4. pp. 509–527. doi: [10.1006/jsvi.1994.1137](https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1137).
26. Sabri F., Lakis A. A. Finite element method applied to supersonic flutter of circular cylindrical shells // *AIAA J.*, 2010. vol. 48, no. 1. pp. 73–81. doi: [10.2514/1.39580](https://doi.org/10.2514/1.39580).
27. Weaver D. S., Unny T. E. On the dynamic stability of fluid-conveying pipes // *J. Appl. Mech.*, 1973. vol. 40, no. 1. pp. 48–52. doi: [10.1115/1.3422971](https://doi.org/10.1115/1.3422971).
28. Selmane A., Lakis A. A. Vibration analysis of anisotropic open cylindrical shells subjected to a flowing fluid // *J. Fluids Struct.*, 1997. vol. 11, no. 1. pp. 111–134. doi: [10.1006/jfls.1996.0069](https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0069).
29. Kochupillai J., Ganesan N., Padmanabhan C. A semi-analytical coupled finite element formulation for shells conveying fluids // *Comp. Struct.*, 2002. vol. 80, no. 3–4. pp. 271–286. doi: [10.1016/S0045-7949\(02\)00008-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(02)00008-1).

30. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part II: Shells containing or immersed in axial flow // *J. Fluids Struct.*, 2002. vol. 16, no. 1. pp. 31–51. doi: [10.1006/jfls.2001.0402](https://doi.org/10.1006/jfls.2001.0402).
31. Uğurlu B., Ergin A. A hydroelastic investigation of circular cylindrical shells-containing flowing fluid with different end conditions // *J. Sound Vib.*, 2008. vol. 318, no. 4–5. pp. 1291–1312. doi: [10.1016/j.jsv.2008.05.006](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.05.006).

Поступила в редакцию 28/X/2015;
в окончательном варианте — 16/XI/2015;
принята в печать — 19/XI/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 750–767

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1453>

MSC: 74F10

AN AEROELASTIC STABILITY OF THE CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS CONTAINING A FLOWING FLUID

S. A. Bochkarev, S. V. Lekomtsev

Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of RAS,
1, Akad. Korolyova st., Perm, 614013, Russian Federation.

Abstract

The paper is concerned with the analysis of the panel flutter of circular cylindrical shells containing an ideal compressible liquid and subjected to the external supersonic gas flow. The aerodynamic pressure is calculated based on the quasi-static aerodynamic theory. The behavior of the liquid is described in the framework of the potential theory. Using the Bubnov–Galerkin method, the corresponding wave equation together with the impermeability condition and specified boundary conditions are transformed into the system of equations. The classical shell theory based on the Kirchhoff–Love hypotheses and the principle of virtual displacements are used as the mathematical framework for the elastic structure dynamic problem. A solution to the problem is searched for by a semi-analytical version of the finite element method and involves the calculation of the complex eigenvalues of the coupled system of equations using the Muller-based iterative algorithm. The reliability of the obtained numerical solution of the aeroelastic and hydroelastic stability problem has been estimated by comparing it with the available theoretical data. For shells with different dimensions and variants of boundary conditions the numerical experiments have been performed to

© 2015 Samara State Technical University.

Please cite this article in press as:

Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. An aeroelastic stability of the circular cylindrical shells containing a flowing fluid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 750–767. doi: [10.14498/vsgtu1453](https://doi.org/10.14498/vsgtu1453). (In Russian)

Authors Details:

Sergey A. Bochkarev (Cand. Phys. & Math. Sci.; bochkarev@icmm.ru; Corresponding Author), Senior Researcher, Dept. of Complex Problems of Mechanics of Deformable Bodies.

Sergey V. Lekomtsev (Cand. Phys. & Math. Sci.; lekomtsev@icmm.ru), Researcher, Dept. of Complex Problems of Mechanics of Deformable Bodies.

estimate the influence of velocity of the internal liquid flow on the value of static pressure in the unperturbed gas flow, which is taken as a variable parameter. It has been found that a growth of liquid velocity causes a change in the flutter type of stability loss. It has been shown that with increase of linear dimensions of the shell the stabilizing effect of the internal liquid flow extending the boundaries of aeroelastic stability changes to the destabilizing effect. Specific values of geometrical dimensions determining the variation in the character of dynamic behavior of the system depend on the prescribed combination of boundary conditions.

Keywords: aeroelasticity, supersonic gas flow, potential flow of compressible fluid, cylindrical shell, finite-element method, stability, flutter.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1453>

Acknowledgments. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15–01–05254-a).

ORCIDs

Sergey A. Bochkarev: <http://orcid.org/0000-0002-9722-1269>

Sergey V. Lekomtsev: <http://orcid.org/0000-0002-8331-2979>

REFERENCES

1. Novichkov Yu. N. Flutter of plates and shells, *Advances in Science and Technology. Mechanics of Deformable Solids*, 11. Moscow, VINITI, 1978, pp. 67–122 (In Russian).
2. Bismarck-Nasr M. N. Finite element analysis of aeroelasticity of plates and shells, *Appl. Mech. Rev.*, 1992, vol. 45, no. 12, pp. 461–482. doi: [10.1115/1.3119783](https://doi.org/10.1115/1.3119783).
3. Païdoussis M. P. *Fluid-structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, vol. 2. London, Academic Press, 2003, 1040 pp.
4. Bochkarev S. A., Matveenkov V. P. Specific features of dynamic behavior of stationary and rotating singlecoaxial cylindrical shells interacting with the axial and rotational fluid flows, *J. Vib. Acoust.*, 2015, vol. 137, no. 2, 021001. doi: [10.1115/1.4028829](https://doi.org/10.1115/1.4028829).
5. Païdoussis M. P., Chan S. P., Misra A. K. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid, *J. Sound Vib.*, 1984, vol. 97, no. 2, pp. 201–235. doi: [10.1016/0022-460X\(84\)90319-5](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90319-5).
6. Païdoussis M. P., Nguyen V. B., Misra A. K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid, *J. Fluids Struct.*, 1991, vol. 5, no. 2, pp. 127–164. doi: [10.1016/0889-9746\(91\)90454-W](https://doi.org/10.1016/0889-9746(91)90454-W).
7. Bochkarev S. A., Matveyenko V. P. The dynamic behaviour of elastic coaxial cylindrical shells conveying fluid, *J. App. Math. Mech.*, 2010, vol. 74, no. 4, pp. 467–474. doi: [10.1016/j.jappmathmech.2010.09.013](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.09.013).
8. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. Investigation of boundary conditions influence on stability of coaxial cylindrical shells interacting with flowing fluid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2012, no. 3(28), pp. 88–101 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1051](https://doi.org/10.14498/vsgtu1051).
9. Chiu E. K.-Y., Farhat C. Effects of fuel slosh on flutter prediction, 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC/ Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2009, AIAA Paper 2009–2682–377. doi: [10.2514/6.2009-2682](https://doi.org/10.2514/6.2009-2682).
10. Farhat C., Chiu E. K.-Y., Amsallem D., Schottó J.-S., Ohayon R. Modeling of fuel sloshing and its physical effects on flutter, *AIAA J.*, 2013, vol. 51, no. 9, pp. 2252–2265. doi: [10.2514/1.J052299](https://doi.org/10.2514/1.J052299).
11. Sabri F., Lakis A. A. Hybrid finite element method applied to supersonic flutter of an empty or partially liquid-filled truncated conical shell, *J. Sound Vib.*, 2010, vol. 329, no. 3, pp. 302–316. doi: [10.1016/j.jsv.2009.09.023](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.09.023).
12. Sabri F., Lakis A. A. Effects of sloshing on flutter prediction of liquid-filled circular cylindrical shell, *J. Aircr.*, 2011, vol. 48, no. 6, pp. 1829–1839. doi: [10.2514/1.C031071](https://doi.org/10.2514/1.C031071).

13. Noorian M., Haddadpour H., Firouz-Abadi R. Investigation of panel flutter under the effect of liquid sloshing, *J. Aerosp. Eng.*, 2015, vol. 28, no. 2, 04014059. doi: [10.1061/\(ASCE\)AS.1943-5525.0000384](https://doi.org/10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000384).
14. Biderman V. L. *Mehanika tonkostennykh konstruksij* [Mechanics of thin-walled structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1977, 488 pp. (In Russian)
15. Voss H. M. The effect of an external supersonic flow on the vibration characteristics of thin cylindrical shells, *J. Aerospase Sci.*, 1961, vol. 28, no. 12, pp. 945–956. doi: [10.2514/8.9264](https://doi.org/10.2514/8.9264).
16. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Finite-element solution of panel flutter of shell structures, *Matem. Mod.*, 2002, vol. 14, no. 12, pp. 55–71 (In Russian).
17. Vol'mir A. S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. Zadachi gidrouprugosti* [Shells in Fluid and Gas Flow. Problems of Hydroelasticity]. Moscow, Nauka, 1979, 320 pp. (In Russian)
18. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Numerical study of the influence of boundary conditions on the dynamic behavior of a cylindrical shell conveying a fluid, *Mechanics of Solids*, 2008, vol. 43, no. 3, pp. 477–486. doi: [10.3103/S0025654408030187](https://doi.org/10.3103/S0025654408030187).
19. Zienkiewicz O. C. *The finite element method in engineering science*. London etc., McGraw-Hill, 1971, xiv+521 pp.
20. Shivakumar K. N., Krishna Murty A. V. A high precision ring element for vibrations of laminated shells, *J. Sound Vib.*, 1978, vol. 58, no. 3, pp. 311–318. doi: [10.1016/S0022-460X\(78\)80040-6](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(78)80040-6).
21. Matveenko V. P. On one algorithm for solving the problem of natural vibrations of elastic bodies by finite element method, *Boundary value problems of elasticity and viscoelasticity*. Sverdlovsk, UNC AN SSSR, 1980, pp. 20–24 (In Russian).
22. Matveenko V. P., Sevodin M. A., Sevodina N. V. Applications of Muller's method and the argument principle to eigenvalue problems in solid mechanics, *Computational Continuum Mechanics*, 2014, no. 3, pp. 331–336 (In Russian). doi: [10.7242/1999-6691/2014.7.3.32](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.3.32).
23. Olson M. D., Fung Y. C. Comparing theory and experiment for the supersonic flutter of circular cylindrical shells, *AIAA J.*, 1967, vol. 5, no. 10, pp. 1849–1856. doi: [10.2514/3.4315](https://doi.org/10.2514/3.4315).
24. Carter L. L., Stearman R. O. Some aspects of cylindrical shell panel flutter, *AIAA J.*, 1968, vol. 6, no. 1, pp. 37–43. doi: [10.2514/3.4438](https://doi.org/10.2514/3.4438).
25. Ganapathi M., Varadan T. K., Jijen J. Field-consistent element applied to flutter analysis of circular cylindrical shells, *J. Sound Vib.*, 1994, vol. 171, no. 4, pp. 509–527. doi: [10.1006/jsvi.1994.1137](https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1137).
26. Sabri F., Lakis A. A. Finite element method applied to supersonic flutter of circular cylindrical shells, *AIAA J.*, 2010, vol. 48, no. 1, pp. 73–81. doi: [10.2514/1.39580](https://doi.org/10.2514/1.39580).
27. Weaver D. S., Unny T. E. On the dynamic stability of fluid-conveying pipes, *J. Appl. Mech.*, 1973, vol. 40, no. 1, pp. 48–52. doi: [10.1115/1.3422971](https://doi.org/10.1115/1.3422971).
28. Selmane A., Lakis A. A. Vibration analysis of anisotropic open cylindrical shells subjected to a flowing fluid, *J. Fluids Struct.*, 1997, vol. 11, no. 1, pp. 111–134. doi: [10.1006/jfls.1996.0069](https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0069).
29. Kochupillai J., Ganesan N., Padmanabhan C. A semi-analytical coupled finite element formulation for shells conveying fluids, *Comp. Struct.*, 2002, vol. 80, no. 3–4, pp. 271–286. doi: [10.1016/S0045-7949\(02\)00008-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(02)00008-1).
30. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part II: Shells containing or immersed in axial flow, *J. Fluids Struct.*, 2002, vol. 16, no. 1, pp. 31–51. doi: [10.1006/jfls.2001.0402](https://doi.org/10.1006/jfls.2001.0402).
31. Uğurlu B., Ergin A. A hydroelastic investigation of circular cylindrical shells-containing flowing fluid with different end conditions, *J. Sound Vib.*, 2008, vol. 318, no. 4–5, pp. 1291–1312. doi: [10.1016/j.jsv.2008.05.006](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.05.006).

Received 28/X/2015;
 received in revised form 16/XI/2015;
 accepted 19/XI/2015.