



# Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК 517.958:531.12; 534.11

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБЪЕКТОВ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

*В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов*

Сызранский филиал Самарского государственного технического университета, Россия, 446001, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, 45.

### Аннотация

Произведены нелинейные постановки задач, описывающих продольно-поперечные колебания объектов с движущимися границами. Полученные математические модели состоят из системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с наибольшей производной по времени второго порядка и по пространственной переменной — четвертого порядка. Нелинейные условия на движущейся границе имеют максимальную производную по времени второго порядка и по пространственной переменной третьего порядка. Учтены геометрическая нелинейность, вязкоупругость, изгибная жёсткость колеблющегося объекта, а также упругость подложки, на которой расположен объект. Получены граничные условия в случае наличия энергетического обмена между частями объекта слева и справа от движущейся границы. Движущаяся граница имеет присоединённую массу. Учтён упругий характер присоединения границы. С помощью полученной математической модели описываются продольно-поперечные колебания большой интенсивности объектов с движущимися границами. При получении математических моделей использован вариационный принцип Гамильтона.

**Ключевые слова:** продольно-поперечные колебания, движущиеся границы, краевые задачи, математические модели, граничные условия, нелинейная система в частных производных, вариационные принципы.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1330>

© 2015 Самарский государственный технический университет.

### Образец для цитирования

Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Математические модели нелинейных продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 2. С. 382–397. doi: [10.14498/vsgtu1330](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1330).

### Сведения об авторах

*Валерий Николаевич Анисимов* (к.ф.-м.н., доц.; [anisimov170159@mail.ru](mailto:anisimov170159@mail.ru); автор, ведущий переписку), заведующий кафедрой, каф. общетеоретических дисциплин.

*Владислав Львович Литвинов* ([vladlitvinov@rambler.ru](mailto:vladlitvinov@rambler.ru)), старший преподаватель, каф. общетеоретических дисциплин.

Колеблющиеся механические объекты с движущимися границами широко распространены в технике. Это канаты грузоподъёмных установок [1, 2], гибкие звенья передач [3], лентопротяжные механизмы [4], балки [5, 6], рельсовые пути [7, 8], бурильные колонны [9], струны музыкальных инструментов [10], нити [11], тесёмочные передачи и т. д. До настоящего времени задачи о колебаниях таких систем решались в основном при линейной постановке и жёстком закреплении границ, когда отсутствует энергетический обмен через границу [1, 3, 5, 12–17]. В редких случаях учитывалось действие демпфирующих сил. Как показано в работе [12], при описании колебаний волновым уравнением в случаях, когда скорость движения границы стремится к скорости распространения волн и при стремлении длины объекта к нулю энергия колебаний стремится к бесконечности, чего в реальных объектах быть не может. Возникла необходимость в построении более сложных математических моделей продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами, учитывающих большое число факторов, влияющих на колебательный процесс. В данной статье построен ряд нелинейных математических моделей такого рода задач. В отличие от существующих моделей получены граничные условия в случае наличия энергетического обмена между частями объекта слева и справа от движущейся границы, учтено взаимодействие между продольными и поперечными колебаниями. При получении математических моделей использован вариационный принцип Гамильтона. Полученные математические модели позволяют описывать колебания большой интенсивности систем с движущимися границами.

**1. Описание объекта.** В настоящей работе рассматриваются объекты, обобщённая схема которых схематически изображена на рис. 1. Объекты могут быть струной, стержнем, балкой, канатом и т. д.

Для объекта введены следующие обозначения:  $\rho$  — объёмная плотность массы;  $S$  — площадь поперечного сечения;  $I$  — осевой момент инерции поперечного сечения объекта;  $E$  — модуль упругости материала объекта;  $\mu$  — коэффициент, характеризующий свойство вязкоупругости объекта на основе структурной модели Фойгта;  $\varepsilon_0$  — начальная продольная деформация объекта, создающая натяжение  $T = ES\varepsilon_0$ ;  $x$  — расстояние от левой границы до точки объекта, находящегося в недеформированном состоянии;  $L(t)$  — длина недеформированного в продольном направлении объекта слева от движущейся

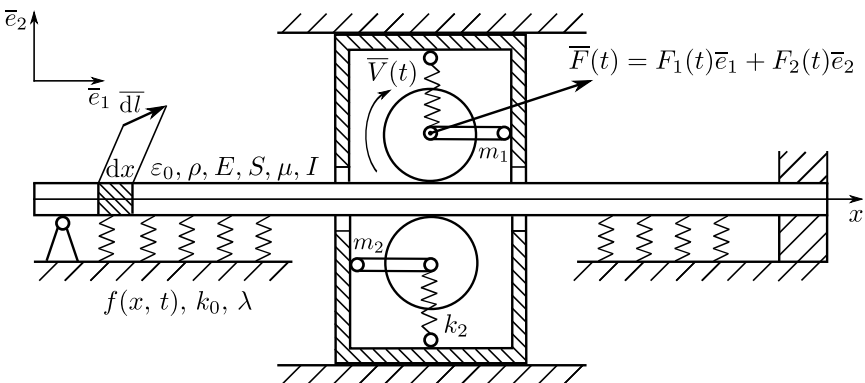


Рис. 1. Обобщённая схема объекта [Figure 1. Generalized sketch of object]

щейся границы;  $t \in [0, t_1]$  — время;  $L_0$  — общая длина недеформированного объекта.

Для характеристики окружения объекта введены следующие параметры:  $k_0$  — жёсткость подложки, на которой лежит объект (сила, действующая на единицу длины при единичном поперечном смещении);  $V(t)$  — окружная скорость роликов;  $\lambda$  — коэффициент, характеризующий действие сил сопротивления внешней среды (силы сопротивления пропорциональны скорости поперечного движения и длине). На объект в направлении вектора  $\bar{e}_2$  действует распределённая нагрузка  $f(x, t)$ . На движущуюся границу действует сила  $\bar{F}(t) = F_1(t)\bar{e}_1 + F_2(t)\bar{e}_2$ .

Движущаяся граница состоит из жёстко соединённых роликов массой  $m_2$ . Масса системы роликов и каркаса равна  $m_1$ . Пружина жёсткости  $k_2$  реагирует на поперечное смещение системы роликов. В продольном направлении имеет место жёсткое соединение между системой роликов и каркасом. Между роликами и объектом проскальзывание отсутствует, поэтому при предположении малости продольных деформаций имеет место равенство  $L'(t) = V(t)$ .

Для характеристики продольно-поперечных колебаний объекта введём функции:  $u_1^*(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$  — смещения точек объекта с координатой  $x$  в момент времени  $t$  в направлении базисных векторов  $\bar{e}_1$ ,  $\bar{e}_2$  соответственно.

Для сокращения записей введём новую функцию

$$u_1(x, t) = u_1^*(x, t) + x + \varepsilon_0 x. \quad (1)$$

Функция  $u_1(x, t)$  представляет собой расстояние от левой границы до точки с координатой  $x$  деформированного объекта.

**2. Геометрические и дифференциальные характеристики объекта.** Рассмотрим геометрию объекта, то есть найдем изменение длины элемента  $dx$  и его кривизну.

Элементарный вектор  $d\bar{l}$ , в который перейдет элемент  $dx$  (рис. 1), в момент времени  $t$  равен

$$d\bar{l} = (u_{1,x}^* + 1 + \varepsilon_0)dx \bar{e}_1 + u_{2,x}(x, t)dx \bar{e}_2.$$

Здесь и далее под  $u_1^*$  и  $u_2$  понимаются функции  $u_1^*(x, t)$  и  $u_2(x, t)$ . После запятой указана переменная, по которой берётся частная производная. Длина вектора находится по формуле

$$|d\bar{l}| = \sqrt{(1 + \varepsilon_0 + u_{1,x}^*)^2 + u_{2,x}^2} dx.$$

Найдём относительную деформацию элемента:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{|d\bar{l}| - dx}{dx} = \sqrt{(1 + \varepsilon_0 + u_{1,x}^*)^2 + u_{2,x}^2} - 1. \quad (2)$$

С учётом (1) формула (2) будет иметь вид

$$\varepsilon(x, t) = \sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1. \quad (3)$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам предусматривается свёртывание.

В предположении малости изгибных деформаций кривизна элемента  $\bar{d}l$  (см. рис. 1) находится по формуле

$$K(x, t) = u_{2,xx}. \quad (4)$$

**3. Описание областей колебаний и соотношений на границе.** Для учёта энергетического обмена, происходящего на границе, разобьём область колебаний в координатах  $x \sim t$  на две открытые области  $W_1, W_2$  (рис. 2), которые соответствуют частям объекта слева и справа от движущейся границы. Через  $W$  обозначена объединённая область, состоящая из  $W_1$  и  $W_2$ . Через  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  обозначены замкнутые контуры, окружающие области (положительное направление обхода против часовой стрелки). Обозначим через  $u_i(L(t) - 0, t)$ ,  $u_i(L(t) + 0, t)$  значения функций слева и справа от движущейся границы.

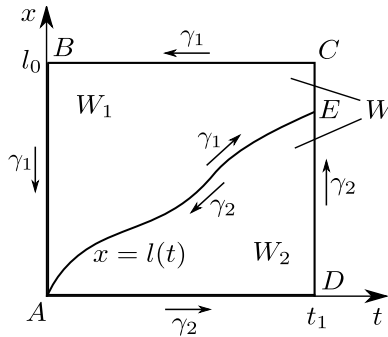


Рис. 2. Области колебаний [Figure 2. Oscillations domains]

Из условия неразрывности деформаций объекта следует

$$u_i(L(t) - 0, t) = u_i(L(t) + 0, t), \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Характер взаимодействия роликов и объекта (см. рис. 1) исключает угловое смещение в точке их контакта, поэтому при наличии изгибной жёсткости имеет место равенство

$$u_{2,x}(L(t) - 0, t) = u_{2,x}(L(t) + 0, t) = 0. \quad (6)$$

Продифференцируем соотношение (5) по  $t$ :

$$u_{i,x}(L(t) - 0, t)L'(t) + u_{i,t}(L(t) - 0, t) = u_{i,x}(L(t) + 0, t)L'(t) + u_{i,t}(L(t) + 0, t).$$

С учётом (6) полученное выражение преобразуется к виду

$$u_{2,t}(L(t) - 0, t) = u_{2,t}(L(t) + 0, t) = 0. \quad (7)$$

**4. Нахождение составляющих вариации интеграла действия.** Для получения модели, описывающей продольно-поперечные колебания объекта, предлагается использовать вариационный принцип Гамильтона [19]: если заданы начальное и конечное состояния системы, то из всех возможных законов движения реализуется такой, для которого действие

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

принимает стационарное значение ( $T$  — кинетическая энергия системы,  $U$  — потенциальная энергия). Для применения принципа понадобятся вариации интеграла действия от кинетической и потенциальной энергии системы.

**4.1. Вариация от кинетической энергии объекта.** Интеграл действия от кинетической энергии объекта определяется формулой

$$I_{T1} = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} dt \int_0^{L_0} \rho S u_{j,t} u_{j,t} dx.$$

Представим двукратный интеграл в виде двойного:

$$I_{T1} = \frac{1}{2} \rho S \iint_W u_{j,t} u_{j,t} dW$$

и найдём вариацию:

$$\delta I_{T1} = \rho S \left( \iint_{W_1} u_{j,t} \delta u_{j,t} dW + \iint_{W_2} u_{j,t} \delta u_{j,t} dW \right). \quad (8)$$

Здесь интеграл по области  $W$  представлен как сумма интегралов по областям  $W_1$  и  $W_2$ .

Представим подынтегральное выражение в виде

$$u_{k,t} \delta u_k = \frac{\partial}{\partial t} (u_{k,t} \delta u_k) - u_{k,tt} \delta u_k.$$

С помощью формулы Грина преобразуем выражение (8):

$$\delta I_{T1} = \rho S \left( \oint_{\gamma_1} u_{k,t} \delta u_k dx + \oint_{\gamma_2} u_{k,t} \delta u_k dx - \iint_W u_{k,tt} \delta u_k dW \right). \quad (9)$$

Здесь  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — замкнутые контуры, окружающие области  $W_1$  и  $W_2$ .

**4.2. Вариация интеграла действия от кинетической энергии системы роликов и каркаса.** Выразим скорости движения границы в продольном и поперечном направлениях:

$$V_i(t) = \frac{d}{dt} u_i(L(t), t), \quad i = 1, 2.$$

Здесь и далее  $(d/dt)$  — полная производная. Кинетическая энергия движущейся границы определяется выражением

$$\frac{1}{2} (m_1 V_1^2(t) + m_2 V_2^2(t)).$$

Интеграл действия от кинетической энергии системы роликов и каркаса

$$I_{T2} = \frac{1}{2} m_i \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} u_i(L(t), t) \frac{d}{dt} u_i(L(t), t) dt.$$

Для вариации действия получим

$$\delta I_{T2} = m_i \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} u_i(L(t), t) \frac{d}{dt} \left( \delta u_i \Big|_{x=L(t)} \right) dt. \quad (10)$$

Представим подынтегральное выражение из (10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_i(L(t), t) \frac{d}{dt} \left( \delta u_i \Big|_{x=L(t)} \right) = \\ = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} u_i(L(t), t) \delta u_i \Big|_{x=L(t)} \right) - \frac{d^2}{dt^2} u_i(L(t), t) \delta u_i \Big|_{x=L(t)}. \end{aligned}$$

В результате для вариации (10) получим

$$\begin{aligned} \delta I_{T2} = m_i \left( \frac{d}{dt} u_i(L(t), t) \delta u_i \Big|_{x=L(t)} \right) \Big|_{t=t_1} - m_i \left( \frac{d}{dt} u_i(L(t), t) \delta u_i \Big|_{x=L(t)} \right) \Big|_{t=0} - \\ - \int_0^{t_1} \frac{d^2}{dt^2} u_i(L(t), t) \delta u_i \Big|_{x=L(t)} dt. \quad (11) \end{aligned}$$

**4.3. Вариация интеграла действия от упругой потенциальной энергии и вязкоупругих сил при продольной деформации объекта.** Для учёта зависимости между деформациями и напряжениями используется модель Фойгта

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \mu\dot{\varepsilon}(t), \quad (12)$$

где  $\sigma(t)$  — напряжение;  $E$  — модуль упругости;  $\varepsilon(t)$  — относительная деформация;  $\mu$  — коэффициент вязкоупругости;  $\dot{\varepsilon}(t)$  — производная по времени от  $\varepsilon(t)$ .

Упругая потенциальная энергия находится по формуле

$$U_1 = \frac{1}{2} ES \iint_W \varepsilon^2(x, t) dW,$$

где  $\varepsilon(x, t)$  — определяется выражением (3).

Вариация интеграла действия представляет собой изменение энергии при изменении функций  $u_1, u_2$ . Вариация интеграла действия от упругих и демпфирующих сил задаётся соотношением

$$\delta I_{U1} = S \iint_W (E\varepsilon(x, t) + \mu\varepsilon_t(x, t)) \delta\varepsilon(x, t) dW. \quad (13)$$

После преобразований (13) примет вид

$$\delta I_{U1} = S \iint_W \left( \left( E \left( \sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1 \right) + \mu \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \delta u_{i,x} dW. \quad (14)$$

Представим подынтегральное выражение из (14) в виде

$$\left( E \left( \sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1 \right) + \mu \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \delta u_{i,x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}} - 1) + \mu \frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x}\delta u_i}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}} - 1) + \mu \frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \delta u_i. \quad (15)$$

После подстановки (15) в (14) и использовании формулы Грина для областей  $W_1$  и  $W_2$  выражение (14) примет вид

$$\begin{aligned} \delta I_{U1} = & -S \iint_W \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}} - 1) + \mu \frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \delta u_i dW - \\ & -S \oint_{\gamma_1} \left( \left( E(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}} - 1) + \mu \frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x}\delta u_i}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) dt - \\ & -S \oint_{\gamma_2} \left( \left( E(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}} - 1) + \mu \frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x}\delta u_i}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) dt. \quad (16) \end{aligned}$$

4.4. Вариация интеграла действия от потенциальной энергии и вязкоупругих сил для деформаций изгиба объекта. При описании состояния объекта с помощью модели Фойгта (12) изгибающий момент в сечении записывается следующим образом:

$$M = I(EK(x, t) + \mu K_t(x, t)).$$

Здесь:  $I$  — момент инерции поперечного сечения объекта,  $K(x, t)$  — кривизна объекта, которая определяется выражением (4). Интеграл действия энергии упругой деформации определяется следующим выражением:

$$I_{U2} = \frac{1}{2}EI \iint_W u_{xx}^2 dW.$$

Вариация интеграла действия упругой деформации и вязкоупругих сил имеет вид

$$I_{U2} = I \iint_W (Eu_{2,xx}\delta u_{2,xx} + \mu u_{2,xxt}\delta u_{2,xx}) dW. \quad (17)$$

Выполним следующие преобразования подынтегральных составляющих в (17):

$$u_{2,xx}\delta u_{2,xx} = \frac{\partial}{\partial x} (u_{2,xx}\delta u_{2,x}) - \frac{\partial}{\partial x} (u_{2,xxx}\delta u_2) + u_{2,xxx}\delta u_2; \quad (18)$$

$$u_{2,xxt}\delta u_{2,xx} = \frac{\partial}{\partial x} (u_{2,xxt}\delta u_{2,x}) - \frac{\partial}{\partial x} (u_{2,xxxt}\delta u_2) + u_{2,xxxt}\delta u_2. \quad (19)$$

С помощью формулы Грина, учитывая (18), (19), для (17) получим

$$\begin{aligned} I_{U2} = & I \iint_W (Eu_{2,xxxx} + \mu u_{2,xxxxt}) \delta u_2 dW + \\ & + I \oint_{\gamma_1} ((Eu_{2,xxx} + \mu u_{2,xxxt}) \delta u_2 - (Eu_{2,xx} + \mu u_{2,xxt}) \delta u_{2,x}) dt + \end{aligned}$$

$$+ I \oint_{\gamma_2} ((Eu_{2,xxx} + \mu u_{2,xxxt}) \delta u_2 - (Eu_{2,xx} + \mu u_{2,xtt}) \delta u_{2,x}) dt. \quad (20)$$

4.5. Вариации интегралов действия от факторов внешнего окружения объекта. Вариация интеграла действия от упругой деформации подложки задаётся соотношением

$$\delta I_{U3} = k_0 \iint_W u_2 \delta u_2 dW. \quad (21)$$

Вариация интеграла действия от упругого присоединения системы роликов выражается соотношением

$$\delta I_{U4} = k_2 \int_0^{t_1} u_2(L(t), t) \delta u_2|_{x=L(t)} dt. \quad (22)$$

Вариация интеграла действия внешних сил сопротивления

$$\delta I_{U5} = \lambda \iint_W u_{2,t} \delta u_2 dW, \quad (23)$$

Вариация интеграла действия от внешней распределенной нагрузки задаётся соотношением

$$\delta I_{U6} = - \iint_W f(x, t) \delta u_2 dW, \quad (24)$$

а вариация интеграла действия от внешней сосредоточенной нагрузки составляет величину

$$\delta I_{U7} = - \int_0^{t_1} F_k \delta u_k|_{x=L(t)} dt. \quad (25)$$

**5. Получение системы дифференциальных уравнений, граничных и начальных условий, описывающих колебания объекта.** Согласно вариационному принципу Гамильтона, вариация интеграла действия должна быть равна нулю:

$$\delta I = -\delta I_{T1} - \delta I_{T2} + \delta I_{U1} + \delta I_{U2} + \delta I_{U3} + \delta I_{U4} + \delta I_{U5} + \delta I_{U6} + \delta I_{U7} = 0. \quad (26)$$

Составляющие вариации определены выражениями (9), (11), (16), (20)–(25).

5.1. Система дифференциальных уравнений в частных производных.

Приравняем нулю коэффициенты перед  $\delta u_1$ ,  $\delta u_2$  составляющих вариации (26), содержащих двойные интегралы. В результате получим систему дифференциальных уравнений, описывающую продольно-поперечные колебания объекта:

$$\rho S u_{1,tt} - S \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E (\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1) + \mu \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \frac{u_{1,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) = 0; \quad (27)$$

$$\rho S u_{2,tt} - S \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E (\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1) + \mu \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \frac{u_{2,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) +$$



$$+ I(Eu_2,_{xxxx} + \mu u_2,_{xxxxt}) + \lambda u_{2,t} + K_0 u_2 - f(x, t) = 0. \quad (28)$$

5.2. **Граничные условия при  $x = 0$ ,  $x = L_0$ .** Граничные условия на неподвижных границах (см. рис. 1) имеют классический вид:

$$\begin{aligned} u_1^*(0, t) = 0, \quad u_2(0, t) = 0, \quad u_{2,xx}(0, t) = 0, \\ u_1^*(L_0, t) = 0, \quad u_2(L_0, t) = 0, \quad u_{2,x}(L_0, t) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

5.3. **Граничные условия при  $x = L(t)$ .** Выпишем части вариаций по замкнутым контурам  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  выражений (9), (11), (16), (20), (22), (25), соответствующих линии  $x = L(t)$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} \left( \rho S(u_{k,t}(L(t) - 0, t) - u_{k,t}(L(t) + 0, t)) L'(t) \delta u_k \Big|_{x=L(t)} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + m_i \frac{d^2}{dt^2} u_i(L(t), t) \delta u_i \Big|_{x=L(t)} + \right. \\ & + \left( \left( ES(\sqrt{u_{j,x}(L(t) - 0, t) u_{j,x}(L(t) - 0, t)} - 1) + \right. \right. \\ & \qquad \left. \left. + \mu S \frac{u_{k,x}(L(t) - 0, t) u_{k,xt}(L(t) - 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) - 0, t) u_{j,x}(L(t) - 0, t)}} \right) \times \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \times \frac{u_{i,x}(L(t) - 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) - 0, t) u_{j,x}(L(t) - 0, t)}} - \right. \\ & - \left( ES(\sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t) u_{j,x}(L(t) + 0, t)} - 1) + \right. \\ & \qquad \left. \left. + \mu S \frac{u_{k,x}(L(t) + 0, t) u_{k,xt}(L(t) + 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t) u_{j,x}(L(t) + 0, t)}} \right) \times \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \times \frac{u_{i,x}(L(t) + 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t) u_{j,x}(L(t) + 0, t)}} \right) \delta u_i \Big|_{x=L(t)} - \\ & - I(Eu_2,_{xxx}(L(t) - 0, t) + \mu u_2,_{xxx}(L(t) - 0, t) - \\ & \qquad \qquad \qquad - Eu_2,_{xxx}(L(t) + 0, t) - \mu u_2,_{xxx}(L(t) + 0, t)) \delta u_2 \Big|_{x=L(t)} + \\ & + I(Eu_2,_{xx}(L(t) - 0, t) + \mu u_2,_{xx}(L(t) - 0, t) - \\ & \qquad \qquad \qquad - Eu_2,_{xx}(L(t) + 0, t) - \mu u_2,_{xx}(L(t) + 0, t)) \delta u_{2,x} \Big|_{x=L(t)} + \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + K_2 u_2(L(t), t) \delta u_2 \Big|_{x=L(t)} - F_k(t) \delta u_k \Big|_{x=L(t)} \right) dt = 0. \quad (30) \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты перед вариациями к нулю и учитывая соотношения (5)–(7), получим

$$\begin{aligned} & \rho S(u_{1,t}(L(t) - 0, t) - u_{1,t}(L(t) + 0, t)) L'(t) + m_1 \frac{d^2}{dt^2} u_1(L(t), t) + \\ & + \left( ES(\sqrt{u_{j,x}(L(t) - 0, t) u_{j,x}(L(t) - 0, t)} - 1) + \right. \\ & \qquad \left. + \mu S \frac{u_{k,x}(L(t) - 0, t) u_{k,xt}(L(t) - 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) - 0, t) u_{j,x}(L(t) - 0, t)}} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{u_{1,x}(L(t) - 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) - 0, t)u_{j,x}(L(t) - 0, t)}} - \\
 & - \left( ES \left( \sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t)u_{j,x}(L(t) + 0, t)} - 1 \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \mu S \frac{u_{k,x}(L(t) + 0, t)u_{k,xt}(L(t) + 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t)u_{j,x}(L(t) + 0, t)}} \right) \times \\
 & \quad \times \frac{u_{1,x}(L(t) + 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t)u_{j,x}(L(t) + 0, t)}} - F_1(t) = 0; \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_2 \frac{d^2}{dt^2} u_2(L(t), t) + EI u_{2,xxx}(L(t) + 0, t) + \mu I u_{2,xxxt}(L(t) + 0, t) - \\
 - EI u_{2,xxx}(L(t) - 0, t) - \mu I u_{2,xxxt}(L(t) - 0, t) + \\
 + K_2 u_2(L(t), t) - F_2(t) = 0. \quad (32)
 \end{aligned}$$

К полученным граничным условиям на границе необходимо добавить соотношения

$$\begin{aligned}
 u_1(L(t) - 0, t) &= u_1(L(t) + 0, t); \\
 u_2(L(t) - 0, t) &= u_2(L(t) + 0, t); \\
 u_{2,x}(L(t) - 0, t) &= u_{2,x}(L(t) + 0, t) = 0.
 \end{aligned} \quad (33)$$

При отсутствии изгибной жесткости соотношение (6) не выполняется. При этом вместо граничного условия (32) необходимо использовать следующее условие:

$$\begin{aligned}
 m_2 \frac{d^2}{dt^2} u_2(L(t), t) + \left( ES \left( \sqrt{u_{j,x}(L(t) - 0, t)u_{j,x}(L(t) - 0, t)} - 1 \right) + \right. \\
 \quad \left. + \mu S \frac{u_{k,x}(L(t) - 0, t)u_{k,xt}(L(t) - 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) - 0, t)u_{j,x}(L(t) - 0, t)}} \right) \times \\
 \quad \times \frac{u_{2,x}(L(t) - 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t)u_{j,x}(L(t) + 0, t)}} - \\
 - \left( ES \left( \sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t)u_{j,x}(L(t) + 0, t)} - 1 \right) + \right. \\
 \quad \left. + \mu S \frac{u_{k,x}(L(t) + 0, t)u_{k,xt}(L(t) + 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t)u_{j,x}(L(t) + 0, t)}} \right) \times \\
 \quad \times \frac{u_{2,x}(L(t) + 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t)u_{j,x}(L(t) + 0, t)}} + \\
 + \rho S (u_{2,t}(L(t) - 0, t) - u_{2,t}(L(t) + 0, t)) L'(t) + \\
 + K_2 u_2(L(t), t) - F_2(t) = 0.
 \end{aligned}$$

Полученные граничные условия называются естественными [19].

В выражении (30) присутствуют вариации

$$\delta u_1|_{x=L(t)}, \quad \delta u_2|_{x=L(t)}, \quad \delta u_{2,x}|_{x=L(t)}.$$

Если функции  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$  заданы, то их вариации равны нулю. Граничные условия, кроме естественных, могут быть также следующими:

$$\begin{aligned} u_1(L(t) - 0, t) &= u_1(L(t) + 0, t) = f_1(t); \\ u_2(L(t) - 0, t) &= u_2(L(t) + 0, t) = f_2(t); \\ u_{2,x}(L(t) - 0, t) &= u_{2,x}(L(t) + 0, t) = f_3(t), \end{aligned}$$

где  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$  — заданные функции.

**5.4. Начальные условия.** Выпишем части вариаций выражений (9), (11), соответствующих интервалу от  $t = 0$  до  $t = t_1$ :

$$\begin{aligned} m_i \left( \frac{d}{dt} u_i(L(t), t) \delta u_i \Big|_{x=L(t)} \right) \Big|_0^{t_1} - \int_0^{L(0)-0} u_{k,t}(x, 0) \delta u_k \Big|_{t=0} dx - \\ - \int_{L(0)+0}^{L_0} u_{k,t}(x, 0) \delta u_k \Big|_{t=0} dx + \int_0^{L(0)-0} u_{k,t}(x, 0) \delta u_k \Big|_{t=t_1} dx + \\ + \int_{L(0)+0}^{L_0} u_{k,t}(x, 0) \delta u_k \Big|_{t=t_1} dx = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Начальные условия обычно задаются при  $t = 0$  в виде

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= \varphi_1(x); \\ u_2(x, 0) &= \varphi_2(x); \\ u_{1,t}(x, 0) &= \varphi_3(x); \\ u_{2,t}(x, 0) &= \varphi_4(x), \end{aligned} \quad (35)$$

где  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\varphi_3(x)$ ,  $\varphi_4(x)$  — заданные функции. Вариации заданных функций равны нулю, что обеспечивает равенство нулю частей выражения (34) при  $t = 0$ .

Если решение задачи однозначно, то функции  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$  при  $t = t_1$  однозначно определены и их вариации равны нулю. Это обеспечивает равенство нулю частей выражения (34) при  $t = t_1$ .

Таким образом, модель, описывающая колебания объекта, изображенного на рис. 1, определяется системой дифференциальных уравнений (28); граничными условиями (29), (31), (32); соотношениями (33) и начальными условиями (35).

**6. Линеаризация задачи.** Предположим, что смещения  $u_1^*$ ,  $u_2$  и их производные малы. При этом квадратичными членами, а также значениями  $\varepsilon_0$  и  $u_{1,x}^*$ ,  $u_{2,x}$  по сравнению с единицей можно пренебречь. При линеаризации задача получается расщеплённой, то есть отсутствует взаимодействие между продольными и поперечными колебаниями.

**6.1. Задача для продольных колебаний.**

$$\begin{aligned} \rho u_{1,tt}^* - E u_{1,xx}^* - \mu u_{1,xt}^* &= 0; \\ u_1^*(0, t) &= 0; \quad u_1^*(L_0, t) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{d^2}{dt^2} u_1(L(t), t) - S\rho(u_{1,t}^*(L(t) + 0, t) - u_{1,t}^*(L(t) - 0, t))L'(t) - \\
 - SE(u_{1,x}^*(L(t) + 0, t) - u_{1,x}^*(L(t) - 0, t)) - \\
 - S\mu(u_{1,xt}^*(L(t) + 0, t) - u_{1,xt}^*(L(t) - 0, t)) - F_1(t) = 0; \\
 u_1^*(L(t) + 0, t) = u_1^*(L(t) - 0, t); \\
 u_1^*(x, 0) = \varphi_1(x); \\
 u_{1,t}^*(x, 0) = \varphi_2(x).
 \end{aligned}$$

### 6.2. Задача для поперечных колебаний.

$$\begin{aligned}
 \rho S u_{2,tt} - ES\varepsilon_0 u_{2,xx} + EI u_{2,xxx} + \mu I u_{2,xxxx} + \lambda u_{2,t} + K_0 u_2 - f(x, t) = 0; \\
 u_2(0, t) = 0; \quad u_{2,xx}(0, t) = 0; \quad u_2(L_0, t) = 0; \quad u_{2,x}(L_0, t) = 0; \\
 m_2 \frac{d^2}{dt^2} u_2(L(t), t) + EI u_{2,xxx}(L(t) + 0, t) + \mu I u_{2,xxx}(L(t) + 0, t) - \\
 - EI u_{2,xxx}(L(t) - 0, t) - \mu I u_{2,xxx}(L(t) - 0, t) + \\
 + K_2 u_2(L(t), t) - F_2(t) = 0; \\
 u_2(L(t) - 0, t) = u_2(L(t) + 0, t); \\
 u_{2,x}(L(t) - 0, t) = 0; \\
 u_{2,x}(L(t) + 0, t) = 0; \\
 u_2(x, 0) = \varphi_3(x); \\
 u_{2,t}(x, 0) = \varphi_4(x).
 \end{aligned}$$

Полученные линеаризованные задачи соответствуют классическим постановкам таких задач [1, 5, 12, 19, 20].

**Заключение.** Таким образом, в работе поставлены новые нелинейные математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами, при этом соблюдается принцип однородности: в частном случае малых колебаний предложенные модели совпадают с классическими моделями, что свидетельствует о корректности полученных результатов. Решение конкретных краевых задач на основе полученных моделей представляется собой самостоятельную задачу и не является целью данного исследования.

#### ORCIDс

Валерий Николаевич Анисимов: <http://orcid.org/0000-0002-1346-167X>

Владислав Львович Литвинов: <http://orcid.org/0000-0002-6108-803X>

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Горошко О. А., Савин Г. Н. *Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины*. Киев: Наукова думка, 1971. 270 с.
2. Zhu W. D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // *J. Vib. Acoust.*, 2006. vol. 128, no. 1. pp. 66–78. doi: [10.1115/1.2128640](https://doi.org/10.1115/1.2128640).
3. Самарин Ю. П., Анисимов В. Н. Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // *Изв. вузов. Машиностроение*, 1986. № 12. С. 17–21.
4. Boyle (Jr) J. M., Bhushan B. Vibration modeling of magnetic tape with vibro-impact of tape-guide contact // *J. Sound Vibr.*, 2006. vol. 289, no. 3. pp. 632–655. doi: [10.1016/j.jsv.2005.02.033](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.02.033).
5. Лежнева А. А. Изгибные колебания балки переменной длины // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1970. № 1. С. 159–161.

6. Ding Hu, Chen Li-Qun Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams // *J. Sound Vibr.*, 2010. vol.329, no.17. pp. 3484–3494. doi: [10.1016/j.jsv.2010.03.005](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.03.005).
7. Guo Y., Yang S., Guo W. Analysis of dynamic characteristics of steel spring supported floating track bed // *Zhendong Ceshi Yu Zhenduan = Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis*, 2006. vol.26, no.2. pp. 146–150 (In Chinese).
8. Lei X.-Y Effects of abrupt changes in track foundation stiffness on track vibration under moving loads // *Zhendong Gongcheng Xuebao = Journal of Vibration Engineering*, 2006. vol.19, no.2. pp. 195–199 (In Chinese).
9. Sahebkar S. M., Ghazavi M. R., Khadem S. E., Ghayesh M. H. Nonlinear vibration analysis of an axially moving drillstring system with time dependent axial load and axial velocity in inclined well // *Mechanism and Machine Theory*, 2011. vol.46, no.5. pp. 743–760. doi: [10.1016/j.mechmachtheory.2010.12.003](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2010.12.003).
10. Inácio O., Antunes J., Wright M. C. M. Computational modelling of string-body interaction for the violin family and simulation of wolf notes // *J. Sound Vibr.*, 2008. vol.310, no.1–2. pp. 260–286. doi: [10.1016/j.jsv.2007.07.079](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.07.079).
11. Тихонов В. С., Абрамов А. А. Поперечные колебания гибкой нити переменной длины в потоке // *Вестник МГУ. Сер. 1*, 1993. №5. С. 45–48.
12. Весницкий А. И. *Волны в системах с движущимися границами*. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
13. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Исследование резонансных свойств механических объектов при помощи метода Канторовича-Галёркина // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. №1(18). С. 149–158. doi: [10.14498/vsgtu658](https://doi.org/10.14498/vsgtu658).
14. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В. Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №3(28). С. 145–151. doi: [10.14498/vsgtu1079](https://doi.org/10.14498/vsgtu1079).
15. Kotera T. Vibration of a string with time-varying length / *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kobe University*, 24, 1978. pp. 45–54 (in Japanese).
16. Zhu W. D., Zheng N. A. Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation / *ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. vol.1 (September 4–7, 2007), 21st Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Parts A, B, and C. Las Vegas, Nevada, USA, 2008. pp. 1995–2013. doi: [10.1115/detc2007-34590](https://doi.org/10.1115/detc2007-34590).
17. Zhu W. D., Zheng N. A. Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation // *J. Appl. Mech.*, 2008. vol.75, no.3, 031003. 14 pp.. doi: [10.1115/1.2839903](https://doi.org/10.1115/1.2839903)
18. Brake M. R., Wickert J. A. Frictional vibration transmission from a laterally moving surface to a traveling beam // *J. Sound Vibr.*, 2008. vol.310, no.3. pp. 663–675. doi: [10.1016/j.jsv.2007.04.029](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.04.029).
19. Мышкис А. Д. *Математика для технических вузов*. СПб.: Лань, 2002. 640 с.
20. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В. Постановка задачи о колебаниях балки с движущейся подпружиненной опорой // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки*, 2013. №1(37). С. 93–98.

Поступила в редакцию 05/IX/2014;  
в окончательном варианте — 18/II/2015;  
принята в печать — 08/IV/2015.

MSC: 35R37; 35G30, 35Q70

## MATHEMATICAL MODELS OF NONLINEAR LONGITUDINAL-CROSS OSCILLATIONS OF OBJECT WITH MOVING BORDERS

V. N. Anisimov, V. L. Litvinov

Syzran' Branch of Samara State Technical University,  
45, Sovetskaya str., Syzran', Samara region, 446001, Russian Federation.

### Abstract

The nonlinear formulation of problems for describing longitudinal-cross oscillations of objects with moving borders is noted. These mathematical models consist of a system of two nonlinear partial differential equations with the higher time derivative of the second order and the fourth-order by the spatial variable. The nonlinear boundary conditions on moving boundary have a higher time derivative of the second order and the third-order by the spatial variable. The geometric nonlinearity, visco-elasticity, the flexural stiffness of the oscillating object and the elasticity of the substrate of object are taken into account. Boundary conditions in the case of energy exchange between the parts of the object on the left and right of the moving boundary are given. The moving boundary has got a joined mass. The elastic nature of borders joining is considered. The longitudinal-cross oscillations of objects with moving borders of high intensity can be described by the resulting differential model. The Hamilton's variational principle is used in the formulation of the problem.

**Keywords:** longitudinal-cross oscillations, moving borders, boundary value problems, mathematical models, boundary conditions, nonlinear system of partial differential equations, variational principles.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1330>

### ORCIDs

Valeriy N. Anisimov: <http://orcid.org/0000-0002-1346-167X>

Vladislav L. Litvinov: <http://orcid.org/0000-0002-6108-803X>

© 2015 Samara State Technical University.

### Please cite this article in press as:

Anisimov V. N., Litvinov V. L. Mathematical models of nonlinear longitudinal-cross oscillations of object with moving borders, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 382–397. doi: [10.14498/vsgtu1330](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1330). (In Russian)

### Authors Details:

*Valeriy N. Anisimov* (Cand. Phys. & Math. Sci.; [anisimov170159@mail.ru](mailto:anisimov170159@mail.ru); Corresponding Author), Head of Dept., Dept. of General-Theoretical Disciplines.

*Vladislav L. Litvinov* ([vladlitvinov@rambler.ru](mailto:vladlitvinov@rambler.ru)), Teacher, Dept. of General-Theoretical Disciplines.

## REFERENCES

1. Goroshko O. A., Savin G. N. *Vvedenie v mekhaniku deformiruemyykh odnomernyykh tel peremennoi dliny* [Introduction to the Mechanics of Deformable One-Dimensional Bodies of Variable Length]. Kiev, Naukova dumka, 1971, 270 pp. (In Russian)
2. Zhu W. D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control, *J. Vib. Acoust.*, 2006, vol. 128, no. 1, pp. 66–78. doi: [10.1115/1.2128640](https://doi.org/10.1115/1.2128640).
3. Samarín Yu. P., Anisimov V. N. Forced transverse vibrations of the flexible link at dispersal, *Izv. vuzov. Mashinostroenie*, 1986, no. 12, pp. 17–21 (In Russian).
4. Boyle (Jr) J. M., Bhushan B. Vibration modeling of magnetic tape with vibro-impact of tape-guide contact, *J. Sound Vibr.*, 2006, vol. 289, no. 3, pp. 632–655. doi: [10.1016/j.jsv.2005.02.033](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.02.033).
5. Lezhneva A. A. Bending vibration of beam of variable length, *Izv. Akad. Nauk USSR. MTT*, 1970, no. 1, pp. 159–161 (In Russian).
6. Ding Hu, Chen Li-Qun Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams, *J. Sound Vibr.*, 2010, vol. 329, no. 17, pp. 3484–3494. doi: [10.1016/j.jsv.2010.03.005](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.03.005).
7. Guo Y., Yang S., Guo W. Analysis of dynamic characteristics of steel spring supported floating track bed, *Zhendong Ceshi Yu Zhenduan = Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis*, 2006, vol. 26, no. 2, pp. 146–150 (In Chinese).
8. Lei X.-Y Effects of abrupt changes in track foundation stiffness on track vibration under moving loads, *Zhendong Gongcheng Xuebao = Journal of Vibration Engineering*, 2006, vol. 19, no. 2, pp. 195–199 (In Chinese).
9. Sahebkar S. M., Ghazavi M. R., Khadem S. E., Ghayesh M. H. Nonlinear vibration analysis of an axially moving drillstring system with time dependent axial load and axial velocity in inclined well, *Mechanism and Machine Theory*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 743–760. doi: [10.1016/j.mechmachtheory.2010.12.003](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2010.12.003).
10. Inácio O., Antunes J., Wright M. C. M. Computational modelling of string-body interaction for the violin family and simulation of wolf notes, *J. Sound Vibr.*, 2008, vol. 310, no. 1–2, pp. 260–286. doi: [10.1016/j.jsv.2007.07.079](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.07.079).
11. Tikhonov V. S., Abramov A. A. Transverse Vibrations of a Flexible String with Time-Varying Length in Flow, *Vest. Mosk. Univ. Ser. 1. Matematika, Mekhanika*, 1993, no. 5, pp. 45–48 (In Russian).
12. Vesnitskii A. I. *Volny v sistemakh s dvizhushchimisya granitsami* [Waves in systems with moving boundaries and loads]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 320 pp. (In Russian)
13. Anisimov V. N., Litvinov V. L. Investigation of Resonance Characteristics of Mechanical Objects with Moving Borders by Application of the Kantorovich–Galyorkin Method, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2009, no. 1(18), pp. 149–158 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu658](https://doi.org/10.14498/vsgtu658).
14. Anisimov V. N., Litvinov V. L., Korpen I. V. On a method of analytical solution of wave equation describing the oscillations system with moving boundaries, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2012, no. 3(28), pp. 145–151 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1079](https://doi.org/10.14498/vsgtu1079).
15. Kotera T. Vibration of a string with time-varying length, *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kobe University*, 24, 1978, pp. 45–54 (in Japanese).
16. Zhu W. D., Zheng N. A. Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation, *ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, vol. 1 (September 4–7, 2007), 21st Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Parts A, B, and C. Las Vegas, Nevada, USA, 2008, pp. 1995–2013. doi: [10.1115/detc2007-34590](https://doi.org/10.1115/detc2007-34590).
17. Zhu W. D., Zheng N. A. Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation, *J. Appl. Mech.*, 2008, vol. 75, no. 3, 031003, 14 pp.. doi: [10.1115/1.2839903](https://doi.org/10.1115/1.2839903)

18. Brake M. R., Wickert J. A. Frictional vibration transmission from a laterally moving surface to a traveling beam, *J. Sound Vibr.*, 2008, vol. 310, no. 3, pp. 663–675. doi: [10.1016/j.jsv.2007.04.029](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.04.029).
19. Myshkis A. D. *Matematika dlia tekhnicheskikh vuzov* [Mathematics for Technical Colleges]. St. Petersburg, Lan', 2002, 640 pp. (In Russian)
20. Anisimov V. N., Litvinov V. L., Korpen I. V. The formulation of the problem of the beam fluctuations with moving spring-loaded support, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Tekhn. Nauki*, 2013, no. 1(37), pp. 93–98 (In Russian).

Received 05/IX/2014;  
received in revised form 18/II/2015;  
accepted 08/IV/2015.