Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 1. С. 149–157
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1438
УДК 512.14, 519.117

СУММИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ КОМБИНАТОРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОДИНАКОВЫХ СТЕПЕНЕЙ

А. И. Никонов

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

В статье рассматривается вывод комбинаторных выражений для сумм членов нескольких последовательностей. Вывод производится на основе комбинаторного представления суммы взвешенных одинаковых степеней. Суммированию подлежат взвешенные члены геометрической прогрессии, простых арифметико-геометрической и комбинированной прогрессий. Одно из главных мест в данном выводе занимает представление членов каждой из указанных прогрессий в виде элементов матрицы. Строка этой матрицы формируется с использованием набора одинаковых степеней с заданным весовым коэффициентом. Кроме того, в работе представлены формулы комбинаторных тождеств с участием свободных компонентов сумм одинаковых степеней, а также отдельной степени — члена последовательности одинаковых степеней или геометрической прогрессии. Все представленные формулы имеют общую основу — компоненты сумм одинаковых степеней.

Ключевые слова: сумма одинаковых степеней, степень, геометрическая прогрессия, арифметико-геометрическая прогрессия, комбинированная прогрессия, матрица.

Комбинаторным представлением какого-либо математического соотношения мы называем такое его представление, которое производится с применением объектов комбинаторики, например, сочетаний и выражений на их основе [1–4]. В комбинаторном представлении математических выражений можно выделить представление сумм одинаковых степеней [5, 6], в том числе сумм взвешенных одинаковых степеней [7, 8]. Явное комбинаторное представление суммы взвешенных одинаковых степеней (СВОС) выглядит следующим образом [8]:

$$\Phi_{\text{oc}}(p,\nu)=\sum_{l=1}^{p} b_l l^{\nu}=\sum_{\iota=1}^{\max\iota}\left(\sum_{q=1}^{\iota}(-1)^{\iota+q}C_{\iota}^{q}q^{\nu}\right)\left(\sum_{k=0}^{p-\iota}C_{p-k}^{\iota}b_{p-k}\right), \qquad (1)$$

Образец для цитирования
Никонов А. И. Суммирование на основе комбинаторного представления одинаковых степеней // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 149–157. doi: 10.14498/vsgtu1438.

Сведения об авторе
Александр Иванович Никонов (д.т.н., проф.; nikonovai@mail.ru), профессор, каф. электронных систем и информационной безопасности.

где p — число одночленов, в данном случае с весовыми коэффициентами вида $b_l \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$; ν — одинаковая степень натуральных чисел вида l, $\nu \in \mathbb{N}$; $\max \iota = \min(p, \nu)$.

Целью настоящей статьи является получение комбинаторных выражений для сумм членов нескольких последовательностей взвешенного типа, которое производится на основе комбинатроного представления СВОС вида (1). Этими последовательностями, рассматриваемыми в первой части данной статьи, являются геометрическая прогрессия (ГП), простая арифметико-геометрическая прогрессия (АГП), простая комбинированная прогрессия (КП) [9–11]. Они играют, в частности, заметную роль в описании процессов шифрования с участием сумм со слагаемыми-произведениями свободных и весовых компонентов [11]. Во второй части нашей статьи рассматривается вывод двух комбинаторных тождеств с участием свободных компонентов СВОС.

Целочисленные аргументы, рассматриваемые в настоящем исследовании, позволяют обеспечить как приближённую оценку суммируемых членов прогрессий, так и их точную оценку в случае наличия рациональных значений знаменателей данных сумм. Исследование второго из указанных выше комбинаторных тождеств (вторая часть нашей статьи) избавлено от целочисленного характера.

В дальнейшем для краткости мы будем иногда именовать каждую из рассматриваемых прогрессий взвешенной. Сумма членов любой из данных прогрессий относится к многочленам одной переменной, но имеет и специфическое вышеприведённое название, основанное на названии соответствующей последовательности [11].

Сумма взвешенной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем ρ — числом одночленов в данном случае с весовыми коэффициентами вида $b_{\nu l} = b_\nu$ выглядит следующим образом:

$$\Phi_{\text{гп}}(\rho, \max \nu) = \sum_{\nu=\min \nu}^{\max \nu} b_\nu \rho^\nu, \quad b_\nu \in \mathbb{R}.$$

Для определённости примем $\min \nu = 1$; $\max \nu = \tilde{p} \in \mathbb{N}$.

Введём в рассмотрение матрицу взвешенных членов, см. рис. 1. Её строка состоит из взвешенных членов последовательности

$$(b_\nu l^\nu, \quad l = 1, \ldots, p)\,.$$

Суммы членов взвешенной геометрической прогрессии для знаменателей p, $p-1$ и степенного показателя

$$\nu = \tilde{p} - k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tilde{p} - 1$$

будут соответствовать набору элементов СВОС произвольной строки рассматриваемой матрицы, а также набору указанных элементов, простирающихся лишь до двойной линии, проведённой в этой матрице.

Аналитически данное рассуждение может быть выражено таким образом:

$$\Phi_{\text{гп}}(p, \tilde{p}) = \sum_{\nu=1}^{\tilde{p}} b_\nu p^\nu, \quad \Phi_{\text{гп}}(p-1, \tilde{p}) = \sum_{\nu=1}^{\tilde{p}-1} b_\nu (p-1)^\nu, \tag{2}$$

$\nu = \max\nu = \tilde{p}$	$b_{\tilde{p}} \cdot 1^{\tilde{p}}$	$\ldots$	$b_{\tilde{p}} \cdot (p-1)^{\tilde{p}}$	$b_{\tilde{p}} \cdot p^{\tilde{p}}$
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\nu = \tilde{p} - k$	$b_\nu \cdot 1^\nu$	$\ldots$	$b_\nu \cdot (p-1)^\nu$	$b_\nu \cdot p^\nu$
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\nu = \tilde{p} - (\tilde{p}-1)$	$b_1 \cdot 1^1$	$\ldots$	$b_1 \cdot (p-1)^1$	$b_1 \cdot p^1$

Рис. 1. Матрица взвешенных членов для ГП
[Figure 1. A suspended members matrix for geometric progression]

причем

$$\Delta\Phi_{\text{гп}}(p,\tilde{p}) = \Phi_{\text{ос}}(p,\nu) - \Phi_{\text{ос}}(p-1,\nu) = b_\nu p^\nu. \tag{3}$$

Из формулы (3) находим:

$$\Phi_{\text{гп}}(p,\tilde{p}) = \sum_{\nu=1}^{\tilde{p}} b_\nu p^\nu = \sum_{\nu=1}^{\tilde{p}} \Delta\Phi_{\text{гп}}(p,\tilde{p}). \tag{4}$$

Здесь величины $\Phi_{\text{ос}}(p,\nu)$, $\Phi_{\text{ос}}(p-1,\nu)$ — это суммы взвешенных одинаковых степеней с числом элементов соответственно p, $p-1$ и одинаковым показателем ν.

Подставив в выражение (4) формулу (1) с параметрами p, $p-1$, получим следующее:

$$\begin{gathered} \Phi_{\text{гп}}(p,\tilde{p}) = \sum_{\nu=1}^{\tilde{p}} b_\nu A_\nu; \\ A_\nu = \sum_{\iota=1}^{\max\iota} \left(\sum_{q=1}^{\iota} (-1)^{\iota+q} C_\iota^q q^\nu \right) C_p^\iota. \end{gathered} \tag{5}$$

Совокупность выражений (5) и есть искомая комбинаторная формула суммы взвешенных членов ГП, соответствующая представлению (2).

Использовав теперь непосредственную подстановку в формулу (1) значения $l = 0$, будем иметь

$$\Delta\Phi_{\text{гп}}(p,\nu=0) = \Delta\Phi_{\text{гп}}(p,0)\big|_{\iota=0,q=0} = b_0(-1)^0 C_0^0 \delta_{0\nu}^0 C_p^0 = b_0,$$

где b_0 — задаваемый весовой коэффициент с нулевым индексом; $\delta_{0\nu}$ — символ Кронекера, вводимый сюда, поскольку член 0^0 принято считать не имеющим смысла.

Тогда формула суммы взвешенных членов ГП (5) получает модифицированный вид

$$\begin{gathered}\Phi_{\text{гп}}(p,\tilde{p}) = \sum_{\nu=0}^{\tilde{p}} b_\nu A_{\nu\delta};\\ A_{\nu\delta} = \sum_{\iota=0}^{\max\iota}\left(\sum_{q=0}^{\iota}(-1)^{\iota+q}C_\iota^q(q+\delta_{0\nu})^\nu\right)C_p^\iota.\end{gathered} \tag{6}$$

Этот вид соответствует такому представлению ГП, как

$$\Phi_{\text{гп}}(p,\tilde{p}) = \sum_{\nu=0}^{\tilde{p}} b_\nu p^\nu,$$

что, в свою очередь, связано с добавлением в матрицу взвешенных членов на рис. 1 новой нижней строки

$$\left(b_0 l^0 = b_0, \ldots l = 1, \ldots, p\right).$$

Как видим, выражение (6) позволяет расширить область действия формулы (5). Тем не менее, далее в настоящей работе случаи нулевого нижнего предела определяемых ниже сумм рассматриваться не будут, поскольку данные суммы имеют в таких случаях, в отличие от суммы взвешенной ГП, лишь нулевые значения.

Простая форма представления суммы членов взвешенной АГП имеет вид

$$\Phi_{\text{агп}}(p,\tilde{p}) = \sum_{\nu=1}^{\tilde{p}} b_\nu \nu p^\nu = \sum_{\nu=1}^{\tilde{p}} b'_\nu p^\nu; \quad b'_\nu = b_\nu\nu. \tag{7}$$

Тогда искомая формула комбинаторного представления суммы $\Phi_{\text{агп}}$, записанной в виде (7), будет выражаться в соответствии с соотношением (4) как

$$\Phi_{\text{агп}}(p,\tilde{p}) = \sum_{\nu=1}^{\tilde{p}} b'_\nu A_\nu. \tag{8}$$

Структуры выражений (7) и (2) соответствуют друг другу, и ясно, что матрица взвешенных членов для простой взвешенной АГП будет аналогична матрице для взвешенной ГП с учетом, естественно, равенства (8). Этот учет дает возможность применить к выражению (8) формулу СВОС для единичной одинаковой степени со значениями соответствующего коэффициента $\nu^1 = 1$ и с весовыми коэффициентами в $b_\nu A_\nu = b_\nu A_{\tilde{p}-k}$ при $\alpha_0^1(1) = 1$:

$$\Phi_{\text{агп}} = \sum_{k=0}^{\tilde{p}-1} C^1_{\tilde{p}-k} A_\nu, \quad \tilde{p}-k=\nu; \tag{9}$$

$$\max\iota = \max\iota(p,\nu) = \min(p,\nu). \tag{10}$$

Соотношения (9), (10) дают искомое комбинаторное представление суммы взвешенных членов простой АГП.

Перейдем теперь к исследованию выражения суммы взвешенных членов простой КП:

$$\Phi_{\text{кп}}(p,p)=\sum_{l=1}^{\tilde{p}} b_l(dl)^{dl}, \quad d\in\mathbb{N}. \tag{11}$$

Рассмотрим рис. 2, где изображено положение чисел $b_l(dl)^{dl}$ — компонентов выражения (11); слева направо идет нарастание значений l:

$$(dl)^{dl}=d^{dl}l^{dl}, \quad l=1,\ldots,\nu_d=\max l, \quad \nu_d=1,\ldots,\max\nu_d=p.$$

$\nu_d=\max\nu_d=p$	$b_p(d^d)^p\times$	1^{dp}	$\ldots$	ν_d^{dp}	$\ldots$	p^{dp}
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		
$\nu_d=\max l$	$b_{\nu_d}(d^d)^{\nu_d}\times$	$1^{d\nu_d}$	$\ldots$	$\nu_d^{d\nu_d}$		
	$\ldots$	$\ldots$				
$\nu_d=1$	$b_1(d^d)^1\times$	1^{d1}				

Рис. 2. Матрица взвешенных членов для простой КП

[Figure 2. A suspended members matrix for easy combination progression]

Комбинаторная формула суммы взвешенных членов простой КП выводится аналогично формуле суммы взвешенных членов ГП (5) со следующими особенностями:

а) $\nu=d\nu_d$;

б) $p=\tilde{p}=\max\nu_d$;

в) в выводимом выражении присутствует множитель d^{ν}.

Тогда имеем

$$\begin{gathered}\Phi_{\text{кп}}(p,p)=\sum_{\nu_d=1}^{p} b_{\nu_d}d^{d\nu_d}A_{\nu_d}, \quad b_{\nu_d}=b_{\max l};\\ A_{\nu_d}=\sum_{\iota=1}^{\max\iota}\left(\sum_{q=1}^{\iota}(-1)^{\iota+q}C_{\iota}^{q}q^{\nu}\right)C_{\nu_d}^{\iota};\\ \max\iota=\min(\nu_d,\nu_d)=\nu_d.\end{gathered} \tag{12}$$

Слагаемые из (12) располагаются в строке матрицы на рис. 2 в её первой колонке и правее двойной линии. Переходя к преобразованию (12), видим, что мы можем воспользоваться здесь еще раз, как и при преобразовании формулы (11), выражением (5):

$$\begin{gathered}\Phi_{\text{кп}}(p',\nu_d)=\sum_{\nu_d=1}^{p} b_{\nu_d}\left(\sum_{\iota_1=1}^{\max\iota_1}\left(\sum_{q=1}^{\iota_1}(-1)^{\iota_1+q}C_{\iota_1}^{q}q^{\nu_d}\right)C_{p'}^{\iota_1}\right)A_{\nu_d},\\ p'=d^d, \quad \max\iota_1=\min\left(p',\nu_d\right).\end{gathered} \tag{13}$$

Формула (13) и есть искомое комбинаторное выражение суммы взвешенных членов простой КП.

При $d = 1$ и, соответственно, при $p' = 1$, $\nu = \nu_d$ имеет место важный частный случай выражения (13):

$$\Phi_{\text{кп}}(p', \nu_d) = \Phi_{\text{кп}}(1, \nu_d) = \sum_{\nu_d=1}^{p} b_{\nu_d} \left(\sum_{\iota_1=1}^{\max \iota_1} \left(\sum_{q=1}^{\iota_1} (-1)^{\iota_1+q} C_{\iota_1}^{q} q^{\nu_d} \right) C_{p'}^{\iota_1} \right) A_{\nu_d},$$
$$\max \iota_1 = \min(p', \nu_d) = 1. \tag{14}$$

То есть исходя из соотношения (14), получаем

$$\Phi_{\text{кп}}(1, \nu_d) = \sum_{\nu_d=1}^{p} b_{\nu_d} A_{\nu_d}.$$

В заключительной части нашей работы выведем сперва комбинаторное тождество, соответствующее матрице рис. 1. Согласно выражению, аналогичному (3), при $b_\nu = 1$ имеем

$$\Delta\Phi_{\text{ос}}(p, \nu) = p^{\nu}, \tag{15}$$

но в то же время

$$\Delta\Phi_{\text{ос}}(p, \nu) = \sum_{\iota=1}^{\max \iota} \alpha_0^{\iota}(\nu) C_p^{\iota}, \quad \max \iota = \min(p, \nu), \tag{16}$$

где $\alpha_0^{\iota}(\nu)$ — свободный компонент СВОС, причем с учетом формулы (1)

$$\alpha_0^{\iota}(\nu) = \sum_{q=1}^{\iota} (-1)^{\iota+q} C_{\iota}^{q} q^{\nu}.$$

Если принять $p \leqslant \nu$, то, учитывая (15), (16), получим следующее тождество для свободного компонента СВОС:

$$\alpha_0^{p}(\nu) = p^{\nu} - \sum_{\iota=1}^{\max \iota - 1} \alpha_0^{\iota}(\nu) C_p^{\iota}. \tag{17}$$

Используемое для подсчета свободных компонентов вида $\alpha_0^{p}(\nu)$ тождество (17) позволяет достаточно экономно тратить вычислительные ресурсы на выполнение этого подсчета. При $p \geqslant \nu$ число подсчитываемых свободных компонентов не выходит (поскольку здесь $\max \iota = \nu$) за рамки числа ν, так что и в данном случае выражение (17) все равно остается справедливым.

Наконец, выявим соотношение, связывающее разности последовательных сумм одинаковых степеней и членов ГП:

$$\Delta\Phi_{\text{ос}}(rl, l) = \Phi_{\text{ос}}(rl, l) - \Phi_{\text{ос}}(r(l-1), l) = (rl)^{l} = r^{l} l^{l};$$
$$\Delta\Phi_{\text{гп}}(rl, l) = \Phi_{\text{гп}}(rl, l) - \Phi_{\text{гп}}(rl, l-1) = (rl)^{l};$$

$$l \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{R}_+ \setminus [0,1).$$

Мы смогли взять здесь величины $\Delta\Phi_{\text{ос}}$, $\Delta\Phi_{\text{гп}}$, поскольку они именно являются одинаковыми разностями $(rl)^l$ последовательных сумм одинаковых степеней и членов ГП, см. рис. 1. Величина $\Delta\Phi_{\text{ос}}$ формируется путем использования выражения (1), учета количества одночленов l вида l^l и единого множителя r^l этих одночленов. В основе формирования величины $\Delta\Phi_{\text{гп}}$ лежит использование выражения (5) и учет числа (rl), находящегося в основании степени $(rl)^l$, причем количество этих степеней также равно l.

В соответствии с формулой (17) имеем

$$\Delta\Phi_{\text{ос}}(rl,l) = (r^l)\sum_{\iota=1}^{\max\iota} \alpha_0^\iota(l) C_l^\iota;$$

$$\Delta\Phi_{\text{гп}}(rl,l) = \sum_{\iota=1}^{\max\iota} \alpha_0^\iota(l) C_{rl}^\iota;$$

$\max\iota$ в данном случае составляет $\min(rl,l) = l$;

$$\Delta\Phi_{\text{ос}}(rl,l) = \Delta\Phi_{\text{гп}}(rl,l) = (rl)^l. \tag{18}$$

Применяя соотношение (18), получаем

$$r^l \sum_{\iota=1}^{\max\iota} \alpha_0^\iota(l) C_l^\iota = \sum_{\iota=1}^{\max\iota} \alpha_0^\iota(l) C_{rl}^\iota. \tag{19}$$

Рассмотрение структуры C_{rl}^ι, содержащей целые числа вида ι, позволяет утверждать, что все используемые в найденном выражении (19) формулы являются конечными. Более того, сомнений в истинности тождества (19) для r — целого положительного начинающегося с единицы числа, естественно, не возникает; таких натуральных чисел r — бесконечное количество. Но тогда, согласно принципу полиномиальной аргументации [12], данное выражение сохраняет свою истинность и для любого вещественного r, лежащего в указанных выше границах.

ORCID
Александр Иванович Никонов: http://orcid.org/0000-0002-0943-6068

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Coolidge J. L. The story of the Binomial Theorem // *Amer. Math. Monthly*, 1949. vol. 56, no. 3. pp. 147–157. doi: 10.2307/2305028.
2. Lin Cong *On Bernoulli Numbers and Its Properties*, 2004. 7 pp., arXiv: math/0408082 [math.HO]
3. Benjamin A. T., Plott S. S. A combinatorial approach to Fibonomial coefcients // *Fibonacci Quarterly*, 2008/2009. vol. 46/47, no. 1. pp. 7–9, URL: http://www.fq.math.ca/Papers1/46_47-1/Benjamin_11-08.pdf (дата обращения: 08.08.2015).
4. Benjamin A. T., Greg O. P., Quinn J. J. A Stirling Encounter with Harmonic Numbers // *Mathematics Magazine*, 2002. vol. 75, no. 2. pp. 95–103. doi: 10.2307/3219141.
5. Edwards A. W. F. Sums of Powers of Integers: A Little of the History // *The Mathematical Gazette*, 1982. vol. 66, no. 435. pp. 22–28. doi: 10.2307/3617302.

6. Beery J. *Sums of Powers of Positive Integers - Introduction*: Convergence (July 2010), 2010. doi: 10.4169/loci003284.
7. Никонов А. И. Преобразование суммы взвешенных степеней натуральных чисел с одинаковыми показателями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 1(20). С. 258–262. doi: 10.14498/vsgtu751.
8. Никонов А. И. Приведение суммы взвешенных одинаковых степеней к явному комбинаторному представлению // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 3(28). С. 163–169. doi: 10.14498/vsgtu1099.
9. *Arithmetic and Geometric Series in Ken Ward's Mathematics Pages*, URL: http://www.trans4mind.com/personal_development/mathematics/series/airthmeticGeometricSeries.htm (дата обращения: 08.08.2015).
10. Riley K. F., Hobson M. P., Bence S. Y. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006, xxiv+1232 pp. doi: 10.1017/CBO9781139164979.
11. Никонов А. И. Повышение эффективности шифрования на основе суммирования произведений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 2(35). С. 199–207. doi: 10.14498/vsgtu1316.
12. Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O. *Concrete mathematics. A foundation for computer science*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1994. xiv+657 pp.

Поступила в редакцию 27/V/2015;
в окончательном варианте — 23/VII/2015;
принята в печать — 08/VIII/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 149–157

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1438

MSC: 05A10, 05A19

SUMMATION ON THE BASIS OF COMBINATORIAL REPRESENTATION OF EQUAL POWERS

A. I. Nikonov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

In the paper the conclusion of combinatorial expressions for the sums of members of several sequences is considered. Conclusion is made on the basis of combinatorial representation of the sum of the weighted equal powers. The weighted members of a geometrical progression, the simple arithmetic-geometrical and combined progressions are subject to summation. One of

Please cite this article in press as:
Nikonov A. I. Summation on the basis of combinatorial representation of equal powers, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 149–157. doi: 10.14498/vsgtu1438. (In Russian)

Author Details:
Alexander I. Nikonov (Dr. Tech. Sci.; nikonovai@mail.ru), Professor, Dept. of Electronic Systems and Information Security.

principal places in the given conclusion occupies representation of members of each of the specified progressions in the form of matrix elements. The row of this matrix is formed with use of a gang of equal powers with the set weight factor. Besides, in work formulas of combinatorial identities with participation of free components of the sums of equal powers, and also separate power-member of sequence of equal powers or a geometrical progression are presented. All presented formulas have the general basis-components of the sums of equal powers.

Keywords: sum of equal powers, power, geometrical progression, simple arithmetic-geometrical progression, simple combined progression, matrix.

ORCID
Alexander I. Nikonov: http://orcid.org/0000-0002-0943-6068

REFERENCES

1. Coolidge J. L. The story of the Binomial Theorem, *Amer. Math. Monthly*, 1949, vol. 56, no. 3, pp. 147–157. doi: 10.2307/2305028.
2. Lin Cong *On Bernoulli Numbers and Its Properties*, 2004, 7 pp., arXiv: math/0408082 [math.HO]
3. Benjamin A. T., Plott S. S. A combinatorial approach to Fibonomial coefcients, *Fibonacci Quarterly*, 2008/2009, vol. 46/47, no. 1, pp. 7–9, Retrieved from http://www.fq.math.ca/Papers1/46_47-1/Benjamin_11-08.pdf (August 08, 2015).
4. Benjamin A. T., Greg O. P., Quinn J. J. A Stirling Encounter with Harmonic Numbers, *Mathematics Magazine*, 2002, vol. 75, no. 2, pp. 95–103. doi: 10.2307/3219141.
5. Edwards A. W. F. Sums of Powers of Integers: A Little of the History, *The Mathematical Gazette*, 1982, vol. 66, no. 435, pp. 22–28. doi: 10.2307/3617302.
6. Beery J. *Sums of Powers of Positive Integers - Introduction*, Convergence (July 2010), 2010. doi: 10.4169/loci003284.
7. Nikonov A. I. Converting the Sum of Weighted Degrees of Natural Numbers with the Same Parameters, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2010, no. 1(20), pp. 258–262. doi: 10.14498/vsgtu751.
8. Nikonov A. I. Reduction of the sum of the weight equal powers to explicit combinatorial representation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2012, no. 3(28), pp. 163–169. doi: 10.14498/vsgtu1099.
9. *Arithmetic and Geometric Series in Ken Ward's Mathematics Pages*, Retrieved from http://www.trans4mind.com/personal_development/mathematics/series/airthmetic-GeometricSeries.htm (August 08, 2015).
10. Riley K. F., Hobson M. P., Bence S. Y. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge, Cambridge University Press, 2006, xxiv+1232 pp. doi: 10.1017/CBO9781139164979.
11. Nikonov A. I. Rising of Efficiency of Enciphering on the Basis of Summation of Products, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2(35), pp. 199–207. doi: 10.14498/vsgtu1316.
12. Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O. *Concrete mathematics. A foundation for computer science*. Reading, MA, Addison-Wesley Publishing Company, 1994, xiv+657 pp.

Received 27/V/2015;
received in revised form 23/VII/2015;
accepted 08/VIII/2015.