Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 1. С. 158–166
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1473

УДК 519.7

К ДИНАМИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ ПО ЗНАЧЕНИЯМ В ПОЛУГРУППЕ

В. Г. Овчинников

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Для не рассматривавшейся ранее со значениями целевой функции в линейно упорядоченной абелевой полугруппе P задачи дискретного оптимального управления даются характеризация разрешимости и на ее основе алгоритм, ищущий оптимальный процесс, используя доставляющие значения Беллмана элементы ограничивающих множеств. Отмечаются модификации данного алгоритма, когда

1) P — непустое естественно упорядоченное подмножество чисел с операцией получения максимума из двух чисел;
2) P — естественно упорядоченное множество неотрицательных чисел со сложением (умножением);
3) P — лексикографическое произведение m (не менее двух) линейно упорядоченных абелевых полугрупп;
4) P — лексикографическое произведение m (не менее двух) множеств вещественных чисел с естественным порядком и сложением, и данный алгоритм получает m — оптимальный процесс проще, чем предыдущий алгоритм автора.

Ключевые слова: линейно упорядоченная абелева полугруппа, дискретное оптимальное управление, оптимальный процесс, доставляющие значения Беллмана элементы ограничивающих множеств, динамическое программирование, лексикографические произведения, алгоритмы.

1. Статья продолжает исследования применения динамического программирования [1, 2]. В ней для упрощения алгоритма [2] используется не рассматривавшаяся ранее в общей формулировке и в указанных ниже частных случаях следующая задача дискретного оптимального управления.

Задача $\mathfrak{A}$. *Пусть известно следующее*:

– *пространства* A, B;
– *множество шагов* $T(1 < |T| < \infty)$, *наделенное строгим порядком* $\prec$, *иными словами*, *отношением* $\prec$ *со свойствами*

$$(i \prec j) \Rightarrow (i \neq j)(\forall i, j \in T), \quad (i \prec g) \wedge (g \prec j) \Rightarrow (i \prec j)(\forall i, g, j \in T),$$

Образец для цитирования
Овчинников В. Г. К динамическому программированию по значениям в полугруппе // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 158–166. doi: 10.14498/vsgtu1473.

Сведения об авторе
Валерий Гаврилович Овчинников (ovg.samara@mail.ru), старший преподаватель, каф. разработки нефтяных и газовых месторождений.

имеющее подмножество начальных шагов

$$T_0 = \{i \in T | \emptyset = \{j \in T | j \prec i\}\} (\neq T),$$

обозначаемые $\{\pi(i)\}$ *одноэлементные подмножества*

$$\big\{j \in T | (j \prec i) \wedge (\emptyset = \{g \in T | j \prec g \prec i\})\big\} (\forall i \in T \backslash T_0)$$

и удовлетворяющее равенству $\emptyset = M \cap T_0$ *подмножество финальных шагов*

$$M = \{i \in T | \tau(i) = \emptyset\},$$

где $\tau(i) = \{j \in T \backslash T_0 | \pi(j) = i\}$;

- *функции* X, U, S *с конечными множественными значениями*

$$X(i) \subset A (\forall i \in T), \quad U(i, \alpha) \subset B (\forall i \in T \backslash T_0)(\forall \alpha \in A),$$

$$S(i, \alpha, \beta) \subset A (|S(i, \alpha, \beta)| \leqslant 1)(\forall i \in T \backslash T_0)(\forall \alpha \in A)(\forall \beta \in B);$$

- *обозначение* D *множества называемых процессами пар* (x, u) *функций* x, u *со значениями* $x_i \in A (\forall i \in T)$, $u_i \in B (\forall i \in T)$ *при ограничениях*

$$x_i = u_i (\forall i \in T_0), \quad x_i \in X(i)(\forall i \in T), \quad u_i \in U(i, x_{\pi(i)}) \quad (\forall i \in T \backslash T_0),$$
$$x_i \in S(i, x_{\pi(i)}, u_i) \quad (\forall i \in T \backslash T_0);$$

- *множество* P *с операцией* $\perp$ *и порядком* $\trianglelefteq$ *как расширением строгого порядка* $\triangleleft$ *по правилам*

$$(p_1 \trianglelefteq p_2) \Leftrightarrow (p_1 \triangleleft p_2) \vee (p_1 = p_2)(\forall p_1, p_2 \in P),$$

  являющееся линейно упорядоченной абелевой полугруппой $\langle P, \perp, \trianglelefteq \rangle$ *и, таким образом, имеющее свойства*
  $(p_1 \perp p_2) \perp p_3 = p_1 \perp (p_2 \perp p_3)(\forall p_1, p_2, p_3 \in P)$ *(ассоциативность* $\perp$*)*,
  $p_1 \perp p_2 = p_2 \perp p_1 (\forall p_1, p_2 \in P)$ *(коммутативность* $\perp$*)*,
  $(p_1 \trianglelefteq p_2) \vee (p_2 \trianglelefteq p_1)(\forall p_1, p_2 \in P)$ *(линейность* $\trianglelefteq$*)*,
  $(p_1 \trianglelefteq p_2) \Rightarrow (p_1 \perp p_3) \trianglelefteq (p_2 \perp p_3)(\forall p_1, p_2, p_3 \in P)$ *(стабильность* $\trianglelefteq$ *относительно* $\perp$*)*;

- *обозначение обобщённой операции* $\underset{i \in I}{\bot}$ *с результатом* $\underset{i \in I}{\bot} q(i)$ *как элементом* $\Lambda(|I|, \omega, q) \in P$, *определяемым по функции*

$$q : I \to P (\emptyset \neq I \subset T)$$

  из условий

$$k > 1 \Rightarrow \Lambda(k, \omega, q) = \Lambda(k - 1, \omega, q) \perp q(\omega(k)) (\forall k \in N_{|I|}),$$

$$\Lambda(1, \omega, q) = q(\omega(1))$$

  независимо от выбора биекции

$$\omega : N_{|I|} \to I \quad (N_m = \{1, \ldots, m\} (\forall m \in \mathbb{N}))$$

  (ср. с замечаниями N.B. [3, с. 62]);

– *затраты шагов*

$$f(i,\gamma,\alpha,\beta)(\in P)(\forall i\in T\backslash T_0)(\forall \gamma,\alpha\in \mathrm{A})(\forall\beta\in B);$$

– *обозначение* $\min\limits_{\gamma\in\Gamma}{}^{(\trianglelefteq)}Q(\gamma)$ *наименьшего по порядку* $\trianglelefteq$ *значения функции*

$$Q:\Gamma\to P.$$

Требуется найти называемую оптимальным процессом пару $(x^*,u^*)\in D$, *удовлетворяющую равенству*

$$\mathop{\perp}_{i\in T\backslash T_0} f\left(i,x_i^*,x_{\pi(i)}^*,u_i^*\right)=\min_{(x,u)\in D}{}^{(\trianglelefteq)}\mathop{\perp}_{i\in T\backslash T_0} f(i,x_i,x_{\pi(i)},u_i).$$

Замечание 1. Если

$$P\subset W\in\{\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}\}(1<|P|),\quad p\perp q=\max(p,q)(\forall p,q\in P),$$

$\trianglelefteq$ означает $\leqslant$, то оптимальный процесс $(x^*,u^*)\in D$ находится из условия

$$\max_{i\in T\backslash T_0} f(i,x_i^*,x_{\pi(i)}^*,u_i^*)=\min_{(x,u)\in D}\max_{i\in T\backslash T_0} f(i,x_i,x_{\pi(i)},u_i).$$

Замечание 2. Если

$$P=\{p\in W|0\leqslant p\}(W\in\{\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}\}),$$

$$p\perp q=p+q\ (\text{либо } p\perp q=p\cdot q)\ (\forall p,q\in P),$$

$\trianglelefteq$ означает $\leqslant$, то оптимальный процесс $(x^*,u^*)\in D$ находится из условия

$$\sum_{i\in T\backslash T_0} f(i,x_i^*,x_{\pi(i)}^*,u_i^*)=\min_{(x,u)\in D}\sum_{i\in T\backslash T_0} f(i,x_i,x_{\pi(i)},u_i)$$

$$\left(\text{либо}\quad \prod_{i\in T\backslash T_0} f(i,x_i^*,x_{\pi(i)}^*,u_i^*)=\min_{(x,u)\in D}\prod_{i\in T\backslash T_0} f(i,x_i,x_{\pi(i)},u_i)\right).$$

Замечание 3. В задаче $\mathfrak{A}$ линейно упорядоченная абелева полугруппа $\langle P,\perp,\trianglelefteq\rangle$ может получаться как лексикографическое произведение линейно упорядоченных абелевых полугрупп $\langle P_k,\perp_k,\trianglelefteq_k\rangle(\forall k\in N_m)(m\in\mathbb{N}\backslash\{1\})$ или, иными словами, определяться из следующих условий:

– P — множество функций

$$q:N_m\longrightarrow\bigcup_{k\in N_m}P_k$$

со значениями $q_k\in P_k$ $(\forall k\in N_m)$,

– $(p \trianglelefteq q) \Leftrightarrow (p = q) \vee (\emptyset \neq K = \{k \in N_m | p_k \neq q_k\}) \wedge (e = \min K) \wedge (p_e \trianglelefteq_e q_e)$ $(\forall p, q \in P)$,
– $(p \perp q)_k = p_k \perp_k q_k$ $(\forall k \in N_m)$ $(\forall p, q \in P)$.

Замечание 4. Если полугруппа $\langle P, \perp, \trianglelefteq \rangle$ определяется по замечанию 3, $P_k = \mathbb{R}(\forall k \in N_m)$, $\trianglelefteq_k$ означает $\leqslant$ $(\forall k \in N_m)$, $\perp_k$ означает $+$ $(\forall k \in N_m)$ и, кроме того,

$$S(i, \alpha, \beta) = \{s(i, \alpha, \beta)\}$$

и

$$\big(f(i, s(i, \alpha, \beta), \alpha, \beta)\big)_k = f^k(i, \alpha, \beta)(\forall i \in T \backslash T_0)(\forall \alpha \in A)(\forall \beta \in B)(\forall k \in N_m),$$

то оптимальный процесс $(x^*, u^*) \in D$ является m-оптимальным процессом [2].

2. В общем случае наряду с обозначениями [2]

$$T_k = \{i \in T | h(i) = k\}(\forall k \in N_{h(T)}),$$

где

$$h(T) = \max_{i \in T} h(i), \quad h(i) = |\{j \in T | j \prec i\}|,$$

будет использоваться следующее развитие терминов [2]:

– пара (Y, V) называется *подходящей*, если её составляют функции Y, V со значениями

$$Y(i) \subset A(\forall i \in T),\ V(i, \alpha) \subset B(\forall \alpha \in Y(\pi(i)))(\forall i \in T \backslash T_0),$$

когда $Y(i) \neq \emptyset(\forall i \in T)$;
– для подходящей пары (Y, V) множество $F(Y, V)$ образуют пары (x, u) функций x, u со значениями

$$x_i \in A(\forall i \in T), \quad u_i \in B(\forall i \in T)$$

при ограничениях

$$x_i = u_i(\forall i \in T_0), \quad x_i \in S(i, x_{\pi(i)}, u_i)(\forall i \in T \backslash T_0),$$

$$x_i \in Y(i)(\forall i \in T), \quad u_i \in V(i, x_{\pi(i)})(\forall i \in T \backslash T_0);$$

– подходящая пара (Y, V) называется *S-согласованной*, если выполнены условия

$$\emptyset \neq V(i, \alpha) = \{\beta \in V(i, \alpha) | \emptyset \neq S(i, \alpha, \beta) \cap Y(i)\}(\forall \alpha \in Y(\pi(i)))(\forall i \in T \backslash T_0).$$

3. Следующее утверждение (теорема 1), развивающее теорему 1 [2], даёт характеризацию (необходимые и достаточные условия) разрешимости задачи $\mathfrak{A}$.

Теорема 1. *Оптимальный процесс задачи $\mathfrak{A}$ существует, если и только если из равенств*

$$X^{\partial}(i) = X(i)(\forall i \in M),$$

$$X^{\partial}(i)=\{\alpha\in X(i)|\emptyset\neq\{\beta\in U(j,\alpha)|\emptyset\neq S(j,\alpha,\beta)\cap X^{\partial}(j)\}(\forall j\in\tau(i))\}$$
$$(\forall i\in T_{k-1}\backslash M)(\forall k\in N_{h(T)})$$

(по уменьшению k) получаются непустые множества достижимости

$$X^{\partial}(i)(\forall i\in T).$$

При этих условиях определяемая значениями

$$X^{\partial}(i)\subset A(\forall i\in T)$$

функция X^{∂} и определяемая значениями

$$U^{\partial}(i,\alpha)=\{\beta\in U(i,\alpha)|\emptyset\neq S(i,\alpha,\beta)\cap X^{\partial}(i)\}\subset B(\forall\alpha\in X^{\partial}(\pi(i)))(\forall i\in T\backslash T_0)$$

функция U^{∂} составляют S-согласованную пару $(X^{\partial},U^{\partial})$, удовлетворяющую равенству $D=F(X^{\partial},U^{\partial})$.

4. Далее предполагается, что оптимальный процесс задачи $\mathfrak{A}$ существует, пара $(X^{\partial},U^{\partial})$ составлена, как указано в теореме 1, и, следовательно,

$$D=F(X^{\partial},U^{\partial}),\quad \emptyset\neq X^{\partial}(i)(\forall i\in T),$$

$$S(i,\alpha,\beta)\neq\emptyset\neq U^{\partial}(i,\alpha)=\{\beta\in U^{\partial}(i,\alpha)|\emptyset\neq S(i,\alpha,\beta)\cap X^{\partial}(i)\}$$
$$(\forall\beta\in U^{\partial}(i,\alpha))(\forall\alpha\in X^{\partial}(\pi(i)))(\forall i\in T\backslash T_0).$$

Также предполагается, что так называемые значения Беллмана $\mathbf{B}(i,\alpha)$ определены из условий

$$(i\in M)\Rightarrow\mathbf{B}(i,\alpha)=\overset{(\trianglelefteq)}{\min_{\beta\in U^{\partial}(i,\alpha)}}f(i,\psi(S(i,\alpha,\beta)),\alpha,\beta),$$

$$(i\notin M)\Rightarrow\mathbf{B}(i,\alpha)=\overset{(\trianglelefteq)}{\min_{\beta\in U^{\partial}(i,\alpha)}}\Big(f(i,\psi(S(i,\alpha,\beta)),\alpha,\beta)\perp\underset{j\in\tau(i)}{\bot}\mathbf{B}(j,\psi(S(i,\alpha,\beta)))\Big)$$

$$(\forall\alpha\in X^{\partial}(\pi(i))(\forall i\in T_k)\left(\forall k\in N_{h(T)}\right)\quad\text{(индукцией по уменьшению } k),$$

где ψ — функция выбора при условиях

$$\emptyset\neq C\Rightarrow\psi(C)\in C(\forall C\subset A\cup B\cup T).$$

Следующее утверждение (теорема 2) в определённых пределах характеризует оптимальность процесса задачи $\mathfrak{A}$.

Теорема 2. *Процесс $(x^*,u^*)\in D$ задачи $\mathfrak{A}$ оптимален, если (и при стабильности $\triangleleft$ относительно $\perp$, только если) одновременно выполнены условия*

$$\mathbf{B}\left(i,x^*_{\pi(i)}\right)=f\left(i,x^*_i,x^*_{\pi(i)},u^*_i\right)\quad(\forall i\in M),$$

$$\mathbf{B}(i, x^*_{\pi(i)}) = f\left(i, x^*_i, x^*_{\pi(i)}, u^*_i\right) \perp \bigperp_{j\in\tau(i)} \mathbf{B}\left(j, x^*_i\right) \quad (\forall i \in (T\backslash T_0)\backslash M),$$

$$\bigperp_{j\in\tau(i)} \mathbf{B}(j, x^*_i) = \overset{(\trianglelefteq)}{\min_{\alpha\in X^\partial(i)}} \bigperp_{j\in\tau(i)} \mathbf{B}(j, \alpha)(\forall i \in T_0).$$

Замечание 5. В случае замечания 1 (когда нет стабильности $\triangleleft$ относительно $\perp$) легко строится задача $\mathfrak{A}$ с оптимальным процессом, не удовлетворяющим всем условиям теоремы 2.

Из теоремы 2 получается

Следствие. *Значения функций, составляющих оптимальный процесс* $(x^*, u^*) \in D$ *задачи* $\mathfrak{A}$, *находит следующий алгоритм динамического программирования* (*алгоритм* $\mathfrak{B}$).

Алгоритм $\mathfrak{B}$. *Этот алгоритм образуют описываемые при помощи псевдоязыка* `Pascal` [4] *следующие последовательно выполняемые действия* (`Цикл 1`, `Цикл 2`, `Цикл 3`):

`Цикл 1`, находящий элементы $\mathbf{x}(i,\alpha)(\in S(i,\alpha,\mathbf{u}(i,\alpha)))$, $\mathbf{u}(i,\alpha)(\in U^\partial(i,\alpha))$ из условий

$$i \in M \Rightarrow \mathbf{B}(i,\alpha) = f(i, \mathbf{x}(i,\alpha), \alpha, \mathbf{u}(i,\alpha)),$$

$$i \notin M \Rightarrow \mathbf{B}(i,\alpha) = f(i, \mathbf{x}(i,\alpha), \alpha, \mathbf{u}(i,\alpha)) \perp \bigperp_{j\in\tau(i)} \mathbf{B}(j, \mathbf{x}(i,\alpha))$$

$$(\forall \alpha \in X^\partial(\pi(i))(\forall i \in T\backslash T_0) :$$

for $k := h(T)$ **downto** 1 **do**
for для каждого $i \in T_k$ **do**
for для каждого $\alpha \in X^\partial(\pi(i))$ **do**
begin $\beta^* := \psi(U^\partial(i,\alpha))$; $r^* := f(i, \psi(S(i,\alpha,\beta^*)), \alpha, \beta^*)$;
  if $\tau(i) \neq \emptyset$ **then**
  for для каждого $j \in \tau(i)$ **do** $r^* := r^* \perp \mathbf{B}(j, \psi(S(i,\alpha,\beta^*)))$;
  if $U^\partial(i,\alpha)\backslash\{\beta^*\} \neq \emptyset$ **then**
  for для каждого $\beta \in U^\partial(i,\alpha)\backslash\{\beta^*\}$ **do**
   begin $r := f(i, \psi(S(i,\alpha,\beta)), \alpha, \beta)$;
    if $\tau(i) \neq \emptyset$ **then**
    for для каждого $j \in \tau(i)$ **do** $r := r \perp \mathbf{B}(j, \psi(S(i,\alpha,\beta)))$;
    b :=**not**$(r^* \trianglelefteq r)$; **if** b **then begin** $r^* := r$; $\beta^* := \beta$ **end**;
  end;
  $\mathbf{B}(i,\alpha) := r^*$; $\mathbf{x}(i,\alpha) := \psi(S(i,\alpha,\beta^*))$; $\mathbf{u}(i,\alpha) := \beta^*$
end.

`Цикл 2`, $(\forall i \in T_0)$ получающий x^*_i, u^*_i, используя

$$\mathbf{B}(j,\alpha)(\forall \alpha \in X^\partial(\pi(j)))(\forall j \in T_1) :$$

for для каждого $i \in T_0$ **do**

begin $\Delta := \tau(i)\backslash\{\psi(\tau(i))\}$; $\alpha^* := \psi(X^\partial(i))$; $r^* := \mathbf{B}(\psi(\tau(i)), \alpha^*)$;
  if $\Delta \neq \emptyset$ **then**
  for для каждого $j \in \Delta$ **do** $r^* := r^* \perp \mathbf{B}(j, \alpha^*)$;
  if $X^\partial(i)\backslash\{\alpha^*\} \neq \emptyset$ **then**
  for для каждого $\alpha \in X^\partial(i)\backslash\{\alpha^*\}$ **do**
  begin $r := \mathbf{B}(\psi(\tau(i)), \alpha)$;
    if $\Delta \neq \emptyset$ **then**
    for для каждого $j \in \Delta$ **do** $r := r \perp \mathbf{B}(j, \alpha)$;
    $b :=$ **not**$(r^* \trianglelefteq r)$; **if** b **then begin** $r^* := r$; $\alpha^* := \alpha$ **end**
  end;
  $u_i^* := x_i^* := \alpha^*$
end.

`Цикл 3`, $(\forall i \in T\backslash T_0)$ получающий x_i^*, u_i^* с использованием $x_i^*(\forall i \in T_0)$, найденных циклом 2, и использованием $(\forall \alpha \in X^\partial(\pi(i))$ $(\forall i \in T\backslash T_0)$ элементов $\mathbf{x}(i, \alpha)$, $\mathbf{u}(i, \alpha)$, найденных циклом 1:
for $k := 1$ **to** $h(T)$ **do for** для каждого $i \in T_k$ **do**
begin
$x_i^* := \mathbf{x}(i, x^*_{\pi(i)})$; $u_i^* := \mathbf{u}(i, x^*_{\pi(i)})$ **end**.

Замечание 6. В случае замечания 1 алгоритм $\mathfrak{B}$ модифицируется по правилам

$$(b := \mathbf{not}(p \trianglelefteq q)) \Leftrightarrow (b := \mathbf{not}(p \leqslant q))(\forall p, q \in P),$$
$$(p := p \perp q) \Leftrightarrow (p := \max(p, q))(\forall p, q \in P).$$

Замечание 7. В случае замечания 2, алгоритм $\mathfrak{B}$ модифицируется по правилам

$$(b := \mathbf{not}(p \trianglelefteq q)) \Leftrightarrow (b := \mathbf{not}(p \leqslant q))(\forall p, q \in P),$$
$$(p := p \perp q) \Leftrightarrow (p := p + q(p := p \cdot q))(\forall p,q \in P).$$

Замечание 8. В случае замечания 3 алгоритм $\mathfrak{B}$ модифицируется по правилам

$$(b := \mathbf{not}(p \trianglelefteq q)) \Leftrightarrow$$
$$(b := \mathbf{false};\ k := 1;\ \mathbf{while}\ (p_k = q_k) \wedge (k \leqslant m)\ \mathbf{do}\ k := k + 1;$$
$$\mathbf{if}\ k \leqslant m\ \mathbf{then}\ b := \mathbf{not}(p_k \trianglelefteq_k q_k))(\forall p, q \in P),$$
$$(p := q) \Leftrightarrow (\mathbf{for}\ k := 1\ \mathbf{to}\ m\ \mathbf{do}\ p_k := q_k)(\forall p, q \in P),$$
$$(p := p \perp q) \Leftrightarrow (\mathbf{for}\ k := 1\ \mathbf{to}\ m\ \mathbf{do}\ p_k := p_k \perp_k q_k)\ (\forall p, q \in P).$$

Замечание 9. В случае замечания 4 модифицированный по правилам замечания 8 алгоритм $\mathfrak{B}$ получает m-оптимальный процесс проще алгоритма [2] за счет неиспользования, нехранения и неполучения s-согласованных пар $(X^k, U^k)(\forall k \in N_m)$, даваемых теоремой 2 [2].

ORCID
Валерий Гаврилович Овчинников: http://orcid.org/0000-0003-2234-5010

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Овчинников В. Г. Алгоритмы динамического программирования оптимальных и близких к ним процессов / *Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием* (29–31 мая 2008 г.). Часть 4: Информационные технологии в математическом моделировании / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2008. С. 107–112.
2. Овчинников В. Г. К алгоритмам динамического программирования оптимальных процессов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 3(28). С. 215–218. doi: 10.14498/vsgtu1102.
3. Фор Р., Кофман А., Дени–Папен М. *Современная математика.* М.: Мир, 1966. 271 с.
4. Ахо А. В., Хопкрофт Д. Э., Ульман Д. Д. *Структуры данных и алгоритмы.* М.: Вильямс, 2009. 400 с.

Поступила в редакцию 04/II/2016;
в окончательном варианте — 22/II/2016;
принята в печать — 26/II/2016.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 158–166

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1473

MSC: 90C39

ON DYNAMIC PROGRAMMING ON THE VALUES IN THE SEMIGROUP

V. G. Ovchinnikov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

For not considered previously discrete optimal control problem with target function values in a linearly ordered Abelian semigroup given characterization of the solvability and on its basis the algorithm seeks optimal process with the help of delivering Bellman values elements of limiting sets. We mark the modifications to this algorithm, when
1) P is nonempty subset of numbers with the natural ordering and the operation producing the maximum of two numbers;
2) P is set of nonnegative numbers with the natural ordering and the addition (or multiplication);
3) P is lexicographical product of m (not less than two) linearly ordered Abelian semigroups;

Please cite this article in press as:
Ovchinnikov V. G. On dynamic programming on the values in the semigroup, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 158–166. doi: 10.14498/vsgtu1473. (In Russian)

Author Details:
Valery G. Ovchinnikov (ovg.samara@mail.ru), Senior Lecturer, Dept. of Oil and Gas Fields Development.

4) P is lexicographic product of m (not less than two) sets of real numbers with the natural ordering and the addition, and this algorithm gets m-optimal process easier than the previous author's algorithm.

Keywords: linearly ordered Abelian semigroup, discrete optimal control, optimal process, delivering Bellman values elements of limiting sets, dynamic programming, lexicographical products, algorithms.

ORCID
Valery G. Ovchinnikov: http://orcid.org/0000-0003-2234-5010

REFERENCES

1. Ovchinnikov V. G. Algorithms of dynamic programming for optimal and similar processes, *Proceedings of the Fifth All-Russian Scientific Conference with international participation* (29–31 May 2008). Part 4, Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara, Samara State Technical Univ., 2008, pp. 107–112 (In Russian).
2. Ovchinnikov V. G. On the algorithms of dynamic programming for optimal processes, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, vol. 3(28), pp. 215–218 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1102.
3. Faure R., Kaufmann A., Denis-Papin M. *Manuale di Matematica.* Milano, ISEDI, 1975 (In Italian).
4. Aho A. V., Hopcroft J. E., Ullman J. D., *Data Structures and Algorithms*, Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing. Reading, Massachusetts, etc., Addison-Wesley, 1983, xi+427 pp.

Received 04/II/2016;
received in revised form 22/II/2016;
accepted 26/II/2016.