



УДК 539.313:517.968.72

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАСЛЕДСТВЕННО УПРУГОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА НА ОСНОВЕ СТРУКТУРНЫХ МОДЕЛЕЙ И АППАРАТА ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ

Е. Н. Огородников, В. П. Радченко, Л. Г. Унгарова

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Рассмотрена стандартная одномерная обобщённая модель вязкоупругого тела и некоторые её частные случаи — модели Фойхта, Максвелла, Кельвина и Зенера. На основе гипотезы В. Вольтерры о наследственно упругом деформируемом твёрдом теле и метода структурного моделирования вводятся дробные аналоги перечисленных выше классических реологических моделей. Показано, что если в исходном определяющем соотношении В. Вольтерры использовано ядро абелевского типа, то возникающие в определяющих соотношениях дробные производные будут являться производными Римана—Лиувилля на отрезке. Отмечено, что в многочисленных работах, посвящённых математическим моделям наследственно упругих тел, авторы используют некоторые дробные производные, удобные с точки зрения применения интегральных преобразований, например, производные Римана—Лиувилля на всей числовой оси или производные Капуто, причем явные решения начальных задач для модельных дробных дифференциальных уравнений не приводятся. Показана корректность задачи Коши относительно некоторых линейных комбинаций функций напряжений и деформаций для определяющих соотношений в дифференциальной форме с дробными производными Римана—Лиувилля. Найдены явные решения задачи о ползучести при постоянном напряжении в стадиях нагружения и разгрузки. Показана непрерывная зависимость найденных решений от параметра дробности модели, в том смысле, что эти решения при $\alpha \rightarrow 1$ переходят в хорошо известные решения для классических реологических моделей. Отмечена сохраняемость величин мгновенной упругой деформации в стадиях нагружения и разгрузки для дробных аналогов моделей Максвелла, Кельвина и Зенера. Сформулированы теоремы о существовании и асимптотических свойствах найденных решений задачи ползучести. Разработан

© 2016 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования

Огородников Е. Н., Радченко В. П., Унгарова Л. Г. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 167–194. doi: [10.14498/vsgtu1456](https://doi.org/10.14498/vsgtu1456).

Сведения об авторах

Евгений Николаевич Огородников (к.ф.-м.н., доц; eugen.ogo@gmail.com; автор, ведущий переписку), доцент, каф. прикладной математики и информатики.

Владимир Павлович Радченко (д.ф.-м.н., проф.; radch@samgtu.ru), заведующий кафедрой, каф. прикладной математики и информатики.

Луиза Гадильевна Унгарова (algluiza@gmail.com), аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

метод идентификации параметров дробной модели вязкоупругого тела. Для экспериментальной проверки предложенных моделей использованы данные испытаний на растяжение с постоянными напряжениями поливинилхлоридной трубки. Представлены результаты расчётных данных на основе дробного аналога модели Фойхта. Наблюдается удовлетворительное соответствие расчётных и экспериментальных данных.

Ключевые слова: структурные модели, реологические модели, вязкоупругость, ползучесть, дробное исчисление, операторы дробного интегриро-дифференцирования Римана—Лиувилля, дробные интегральные и дифференциальные уравнения, функция типа Миттаг—Леффлера, параметрическая идентификация, экспериментальные данные.

Введение. Основной задачей математического моделирования реологических сред является установление функциональной связи между напряжениями и деформациями, возникающими в изучаемом объекте. В одномерном случае эта связь может быть задана посредством некоторого непрерывного, но необязательно линейного, оператора A следующим образом:

$$\sigma(t) = A\varepsilon(t), \quad (1)$$

где $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ — напряжение и деформация тела в момент времени t . При заданной зависимости деформации от времени равенство (1) должно позволять находить зависимость напряжения как функции времени, в частности при $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$ находить решение задачи о релаксации напряжений в вязкоупругом теле; предполагая обратимость оператора A , определять зависимость деформации от времени при заданном законе изменения напряжения, в частности, при $\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}$ находить решение задачи ползучести [1–3].

В феноменологических моделях вид, структура и свойства оператора A принимаются за исходный, первичный элемент и в конечном итоге устанавливаются экспериментальным путём. Другой подход к моделированию заключается в замене реального деформируемого твердого тела некоторой механической структурной моделью, представляющей собой определённые комбинации из идеальных упругих и вязких элементов, подчиняющихся соответственно законам Гука и Ньютона для вязкой жидкости.

Известно, что в рамках структурного моделирования стандартную одномерную обобщённую модель вязкоупругого тела можно записать в виде

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^n b_k D^k \sigma = E\varepsilon + \sum_{k=1}^m a_k D^k \varepsilon, \quad (2)$$

где $D^k = (d/dt)^k$; a_k, b_k, E_0 — постоянные величины, обычно заранее не известные; $n = m$ или $m = n + 1$. Частными случаями модели (2) являются собственно законы Гука

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon(t),$$

и Ньютона

$$\sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t),$$

а также следующие модели:

– модель Фойхта

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t), \quad (3)$$

– модель Максвелла

$$E_0\sigma(t) + \eta\dot{\sigma}(t) = \eta E_0\dot{\varepsilon}(t), \quad (4)$$

– модель Кельвина

$$(E_1 + E_2)\sigma(t) + \eta\dot{\sigma}(t) = E_1E_2\varepsilon(t) + \eta E_2\dot{\varepsilon}(t), \quad (5)$$

– модель Зенера

$$E_1\sigma(t) + \eta\dot{\sigma}(t) = E_1E_2\varepsilon(t) + \eta(E_1 + E_2)\dot{\varepsilon}(t), \quad (6)$$

где E_0, E_1, E_2 — модули соответствующих упругих элементов, η — коэффициент демпфирования. Заметим, что всё многообразие реологических моделей можно разбить на два типа: модели, описывающие явление мгновенной упругой деформации в момент приложения нагрузки (модели типа Максвелла, Кельвина, Зенера) и модели типа Фойхта, не наделённые (не описывающие) мгновенной упругой деформацией. Очевидно, что решения задачи о ползучести при постоянно действующей нагрузке $\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}$, получающиеся из определяющего соотношения (2), будут носить в основном экспоненциальный характер. Однако известно, что многие среды (полимеры, резины и т.п.) в испытаниях на ползучесть демонстрируют степенную зависимость деформации от времени. Оказалось, что подобное поведение характерно не только для механических сред, ряда физических явлений и биологических процессов, но вообще для любых динамических систем с памятью. Это обстоятельство дало толчок применению понятий и методов дробного анализа в задачах моделирования вязкоупругого поведения механических сред и наследственно упругого деформируемого твердого тела [4–7].

В. Вольтерра предложил рассматривать законы наследственной упругости, связывающие между собой напряжение σ и деформацию ε , в форме равенства [8], [9, с. 223]

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \left(\sigma + \int_{-\infty}^t K(t - \tau)\sigma(\tau)d\tau \right). \quad (7)$$

В многочисленных исследованиях по наследственной механике, берущих начало с работ Х. Больцмана [10] и продолженных в работах Г. Дюффинга [11], А. Джемента [12], А. П. Бронского [13], Г. Л. Слонимского [14], А. Ю. Ишлинского [15], А. Р. Ржаницына [16], Ю. Н. Работнова [17] и других авторов (см. библиографический список в [18–21]), показано и обосновано, что для целого ряда физических сред ядра ползучести в интегральном операторе (7) являются ядрами абелевского типа, а основные соотношения между напряжениями и деформациями выражаются через дробные интегралы Римана–Лиувилля [22]. Производные по времени дробных интегралов будут являться дробными производными Римана–Лиувилля. На это обстоятельство мы ещё не раз обратим внимание. Отметим, что, по-видимому, А. Джемента [23] впервые использовал при моделировании механических свойств вязкоупругих материалов дифференцирование дробного порядка.

Отталкиваясь от экспериментальных результатов Дюффинга [11], в работе [17] Ю. Н. Работнов предложил модель вязкоупругой среды на основе интегрального оператора с ядром Абеля в следующей форме:

$$I_\alpha = \frac{(t - \tau)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad \alpha > -1. \quad (8)$$

Интегральные операторы с ядрами вида (8)

$$\tilde{I}_\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t - \tau)^\alpha}, \quad t > 0,$$

обладают следующими композиционными свойствами [4, с. 28], [17]:

$$\tilde{I}_\alpha \tilde{I}_\beta = \tilde{I}_{\alpha+\beta+1}, \quad \tilde{I}_\alpha^n = \tilde{I}_{n\alpha+n-1}.$$

Разрешая интегральное уравнение Вольтерры второго рода с оператором \tilde{I}_α путём обращения оператора $I - \lambda \tilde{I}_\alpha$ (I — тождественный оператор), Ю. Н. Работнов определил резольвентный оператор $\tilde{\Theta}_\alpha(\lambda)$, ядро которого определяется рядом

$$\Theta_\alpha(\lambda, z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z^{1+\alpha})^n}{\Gamma((n+1)(1+\alpha))}, \quad \alpha > -1,$$

и получил определяющее соотношение

$$\sigma(t) = E \left(\varepsilon(t) - \lambda \int_0^t \Theta_\alpha(-\lambda, t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right),$$

позволяющее вычислять напряжение $\sigma(t)$, если известен закон изменения деформации $\varepsilon(t)$.

Если вместо (8) записывать ядра интегральных операторов в виде

$$K(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0, \quad (9)$$

то соответствующий интегральный оператор

$$I_{0t}^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{1-\alpha}}, \quad t > 0, \quad (10)$$

представляет собой левосторонний интеграл Римана—Лиувилля порядка α , который обладает естественным полугрупповым свойством [20, с. 73], [22, с. 42]

$$I_{0t}^\alpha I_{0t}^\beta \varphi = I_{0t}^\beta I_{0t}^\alpha \varphi = I_{0t}^{\alpha+\beta} \varphi \quad (11)$$

для любой суммируемой функции $\varphi \in L(0, T)$, $T > 0$. Решение интегрального уравнения Вольтерры второго рода с оператором (10)

$$\varphi(t) - \lambda I_{0t}^\alpha \varphi(t) = f(t) \quad (12)$$

записывается в терминах резольвентного оператора

$$E_{0t;\lambda}^{\mu,\alpha} f = \int_0^t \text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (13)$$

где $\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) = t^{\mu-1} E_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu)$ — обобщённая (двупараметрическая) дробная экспоненциальная функция [24], $E_\alpha(z; \mu)$ — функция типа Миттаг—Леффлера [25]. Свойства оператора (13) и функции $\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; z)$ рассматривались во многих публикациях авторов настоящей работы [см., например, 26–28]. Решение интегрального уравнения (12) записывается в виде

$$\varphi(t) = (I - \lambda I_{0t}^\alpha)^{-1} f = (I + \lambda E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha}) f.$$

К настоящему моменту времени опубликовано значительное количество работ, посвящённых изучению дробных реологических моделей (см. обзор литературы в [21], а также [29–31]), причём в большинстве источников одномерная обобщённая модель вязкоупругого тела с памятью (наследственно упругого тела) записывается в виде [32, с. 202], [33, с. 742]

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^n b_k D^{\beta_k} \sigma = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^m a_k D^{\alpha_k} \varepsilon, \quad (14)$$

причём, как отмечается в монографии [20, с. 443], многие авторы используют в равенстве (14) «подходящие дробные производные», лишь бы их преобразование Фурье удовлетворяло условию

$$\mathcal{F}(D^\alpha f(t))(s) = (is)^\alpha \hat{f}(is),$$

где s — частота, $\hat{f}(is) = \mathcal{F}(f(t))(s)$ — преобразование Фурье функции f . Однако этому условию, вообще говоря, могут удовлетворять дробные производные и Грюнвальда—Летникова, и Лиувилля, и Капуто, и Римана—Лиувилля на оси или полуоси, если $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Для нахождения явных решений дифференциальных уравнений дробного порядка, возникающих из определяющего соотношения (14), используется в основном преобразование Лапласа, в то время как они могут быть найдены собственно методами дробного анализа, что не требует обязательного использования интегральных преобразований.

В качестве «удобных для анализа и приложений» дробных производных некоторые авторы используют лиувиллевскую форму дробного интегрирования благодаря замечательному свойству этих операторов сохранять экспоненциальную функцию [34, с. 2] (см., также [20, с. 81], [22, с. 87] и [19, с. 311]). Известно, что для любого $\alpha > 0$

$$(I_+^\alpha e^{\alpha\tau})(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{e^{\alpha\tau} d\tau}{(t - \tau)^{1-\alpha}} = \lambda^{-\alpha} e^{\lambda t},$$

$$(D_+^\alpha e^{\alpha\tau})(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{-\infty}^t \frac{e^{\alpha\tau} d\tau}{(t - \tau)^{\alpha-n+1}} = \lambda^\alpha e^{\lambda t},$$

где $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ — целая часть числа $\alpha \in \mathbb{R}$. Отметим, что использование лиувиллевской формы дробного интегро-дифференцирования в математических моделях динамических систем с памятью действительно оправдано, если за исходный постулат брать соотношение (7), в котором $K(x-t)$ — ядро Абе-ля. На самом деле «история деформирования» тела начинается с некоторого конечного момента времени, например, времени первого нагружения, кото-рое принимают за начало отсчёта времени $t = 0$. Таким образом, в основном соотношении (7) возникает интегральный оператор с началом в точке $t = 0$. В частности, если в (7) ядро интегрального оператора пропорционально абе-левому ядру (9) с некоторым коэффициентом $\beta > 0$, то соотношение (7) будет представлять собой дробный аналог модельного определяющего соотношения Максвелла в интегральной форме

$$E\varepsilon(t) = \sigma(t) + \beta I_{0t}^\alpha \sigma(t). \quad (15)$$

Применим к левой и правой частям равенства (15) оператор дифферен-цирования D_{0t}^α и воспользуемся тождеством [20, с. 74], [22, с. 50]

$$D_{0t}^\alpha I_{0t}^\alpha \varphi(t) = \varphi(t) \quad (\alpha > 0),$$

справедливым для любой функции $\varphi(t) \in L(0, T)$ ($T > 0$). Получим

$$ED_{0t}^\alpha \varepsilon(t) = D_{0t}^\alpha \sigma(t) + \beta \sigma(t). \quad (16)$$

Очевидно, что в классе абсолютно непрерывных функций $AC[0, T]$ при $\alpha \in (0, 1)$ равенства (15) и (16) эквивалентны. Действительно, если $\alpha \in (0, 1)$, а функция $\varphi(t) \in AC[0, T]$, то

$$I_{0t}^\alpha D_{0t}^\alpha \varepsilon(t) = \varphi(t). \quad (17)$$

Тогда, применяя к левой и правой частям равенства (16) оператор интегри-рования I_{0t}^α , в силу тождества (17) получаем (15). Отметим здесь, что тож-дество (17) при $\alpha \geq 1$ несправедливо даже в классе $AC^n[0, T]$. Известно, что для функций $f(t)$, принадлежащих классу

$$L^\alpha(0, T) = \{f(t) \in L(0, T) : I_{0t}^{n-\alpha} f(t) \in AC^n[0, T]\},$$

который обеспечивает существование суммируемой дробной производной $D_{0t}^\alpha f$, справедлив аналог формулы Ньютона—Лейбница [20, с. 75], [22, с. 50]:

$$I_{0t}^\alpha D_{0t}^\alpha f = f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f_{n-\alpha}^{(n-k)}(0+)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} t^{\alpha-k},$$

где

$$f_{n-\alpha}^{(n-k)}(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} D_{0t}^{\alpha-k} f, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Упомянутые выше классы абсолютно непрерывных функций, без кото-рых невозможно построение полноценной теории дробного интегро-диффе-ренцирования, основанного на лебеговской конструкции интеграла, можно заменить несколько более узкими классами функций, разрывных в конечном

множестве точек, достаточное число раз дифференцируемых в интервалах своей непрерывности с суммируемой старшей производной. Действительно, в задачах одноосной ползучести особый интерес представляют функции напряжения, имеющие разрыв 1-го рода в конечном множестве точек, которые мы будем считать непрерывными слева в точках разрыва. Например, функция

$$\sigma(t) = \sigma_0(t)(H(t) - H(t - t_1)) \quad (18)$$

описывает нагружение для $t : 0 < t \leq t_1$ и разгрузку для $t : t_1 < t \leq T$ деформируемого тела. Здесь $\sigma_0(t)$ — некоторая неотрицательная непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$ функция, $\sigma_0(0) = \sigma_0 > 0$,

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

— функция Хевисайда.

Из (18) ясно, что $\sigma(0) = 0$, в то время как

$$\sigma(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} \sigma(t) = \sigma_0(0) = \sigma_0.$$

Отметим, что $\varepsilon(t) \in C(0, t_1] \cup C(t_1, T]$, так как $\sigma(t) \in C(0, t_1] \cup C(t_1, T]$, а $\dot{\sigma}(t) \in C(0, t_1) \cup C(t_1, T) \cap L(0, T)$. Кроме этого, из уравнения (15) следует равенство

$$E\varepsilon(0+) = \sigma(0+) = \sigma_0, \quad (19)$$

которое описывает мгновенную упругую деформацию в момент приложения нагрузки.

Вернёмся ещё раз к уравнению (16). Относительно функции

$$u(t) = E\varepsilon(t) - \sigma(t)$$

это уравнение является простейшим дифференциальным уравнением с дробной производной Римана—Лиувилля порядка $\alpha \in (0, 1)$:

$$D_{0t}^\alpha u = \beta\sigma(t). \quad (20)$$

Известно, что естественным начальным условием для такого дифференциального уравнения будет начальное условие типа Коши:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} I_{0t}^{1-\alpha} u = u_0. \quad (21)$$

В классе кусочно-непрерывных ограниченных функций начальное условие (21) будет однородным, что обеспечивает возможность применения тождества (17) для решения дифференциального уравнения (16). Возникает вопрос: каким может быть начальное условие для деформации $\varepsilon(0)$, если (16) рассматривать как дифференциальное уравнение относительно деформации? Этот вопрос равносителен следующему: существует ли кусочно-дифференцируемое решение $u(t)$ дифференциального уравнения (20) с начальным условием $u(0) = u_0$, если $\sigma(t)$ — кусочно-непрерывная ограниченная функция?

Хорошо известно [20, с. 73], [22, с. 46], что для функции $u(t) \in AC[0, T]$ справедлив достаточный признак существования дробной производной Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in (0, 1)$:

$$D_{0t}^\alpha u(t) = \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} + I_{0t}^{1-\alpha} \dot{u}(t). \quad (22)$$

Это тождество тем более справедливо в классе кусочно-дифференцируемых ограниченных функций. Из (22) видно, что производная $D_{0t}^\alpha u$ имеет интегрируемую особенность в нуле. Подставляя выражение производной $D_{0t}^\alpha u$ из (22) в левую часть уравнения (20), заключаем, что равенство (20) возможно, если

$$u(0) = E\varepsilon(0) - \sigma(0) = 0.$$

Отсюда следует, что начальное условие $\varepsilon(0)$ для искомой функции деформации $\varepsilon(t)$ не может быть произвольным, а зависит от значения нагрузки $\sigma(0)$ в начальный момент времени:

$$\varepsilon(0) = \sigma(0)/E, \quad (23)$$

что физически проявляется в форме скачка мгновенной упругой деформации. Формальная редукция дифференциального уравнения (16) или (20) к интегральному уравнению (15) очевидна.

Действительно, запишем (20) с учетом (22) и (23). Применим к левой и правой частям полученного равенства оператор интегрирования I_{0t}^α :

$$I_{0t}^\alpha I_{0t}^{1-\alpha} \dot{u}(t) = \beta I_{0t}^\alpha \sigma(t).$$

Используя полугрупповое свойство дробных интегралов (11) и равенство (23), находим

$$I_{0t}^\alpha I_{0t}^{1-\alpha} \dot{u}(t) = I_{0t}^1 \dot{u}(t) = u(t) - u(0) = u(t)$$

и окончательно получим равенство (15).

Заметим, что возникающий в равенстве (22) оператор $I_{0t}^{1-\alpha} \dot{u}$ является дробной производной Капуто (см., например, [5, 20, 21]) и обозначается ${}^C D_{0t}^\alpha u$. В подавляющем большинстве публикаций по дробным реологическим моделям авторы используют в основном определяющем соотношении (2) именно дробную производную Капуто (см., например, [35, 36]), которую определяют как «нормализованную производную Римана–Лиувилля» равенством

$${}^C D_{0t}^\alpha f = D_{0t}^\alpha f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} = D_{0t}^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right), \quad (24)$$

где $n = [\alpha] + 1$. Затем путём использования определения дробной производной Римана–Лиувилля из (24) выводится достаточный признак её существования в классе функций $AC^n[0, T]$ и обнаруживается равенство

$${}^C D_{0t}^\alpha f = I_{0t}^{n-\alpha} f^{(n)}.$$

В действительности же известно, что для функций $f(t) \in AC^n[0, T]$ дробная производная Римана—Лиувилля порядка $\alpha > 0$, $n - 1 \leq \alpha < n$, представима в виде [22, с. 46]

$$D_{0t}^\alpha f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} t^{k-\alpha} + I_{0t}^{n-\alpha} f^{(n)},$$

откуда следует, что

$$I_{0t}^{n-\alpha} f^{(n)} = {}^C D_{0t}^\alpha f,$$

причем для функции $f(t)$ при $f^{(k)}(0) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) дробные производные Римана—Лиувилля и Капуто совпадают.

1. От структурных механических моделей — к математическим моделям наследственно упругого тела. В качестве исходного постулата в настоящей работе взята феноменологическая модель памяти В. Вольтерры. Применительно к задачам о вязкоупругом поведении деформируемого твёрдого тела эта математическая модель сводится к равенству (15), позволяющему сразу найти закон изменения деформации $\varepsilon(t)$, если зависимость напряжения $\sigma(t)$ от времени задана. Во введении показано, что определяющее соотношение (15) эквивалентно соотношению (16) в дифференциальной форме для достаточно гладких функций с условием (19) или (23).

Будем считать, что параметр β в уравнении (15) при $\alpha = 1$ совпадает с величиной E/η , где E — модуль упругости, η — коэффициент демпфирования в классической модели Максвелла. Тогда видно, что если равенство (16) записывать в виде

$$E\eta D_{0t}^\alpha \varepsilon(t) = \eta D_{0t}^\alpha \sigma(t) + E\sigma(t), \quad (25)$$

то при $\alpha \rightarrow 1 - 0$ оно переходит в классическое определяющее соотношение (4) и поэтому названо во введении дробным аналогом модели Максвелла.

Запишем равенство (25) в виде

$$\eta D_{0t}^\alpha \varepsilon(t) = \frac{\eta}{E} D_{0t}^\alpha \sigma(t) + \sigma(t) \quad (26)$$

и устремим $E \rightarrow +\infty$ в (26). Это равносильно замене упругого элемента в механической модели абсолютно твёрдым стержнем. В итоге приходим к определяющему соотношению

$$\sigma(t) = \eta D_{0t}^\alpha \varepsilon(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (27)$$

предложенному в 1947 году Скотт-Блэром [37,38]. А. Н. Герасимов в 1948 году [39] предложил аналогичное (27) соотношение с использованием производной D_+^α ($t > 0$) на всей числовой оси [20, 22] вместо производной D_{0t}^α на отрезке. Г. Л. Слонимский [14] рассматривал закон, устанавливающий связь между напряжением и деформацией в интегральной форме

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} D_{0t}^{-\alpha} \sigma(t) = \frac{1}{\eta} I_{0t}^\alpha \sigma(t). \quad (28)$$

Ясно, что при условии $\varepsilon(0) = 0$ законы Скотт-Блэра и Слонимского эквивалентны. Они оба будут эквивалентны соотношению Герасимова, если производная D_+^α рассматривается на функциях, равных нулю тождественно при $t < 0$.

Определяющие соотношения (27) или (28) могут быть взяты в качестве простейших математических моделей вязкоупругого демпфирования (наследственно-упругого тела). Более сложные, зависящие от трёх и более параметров модельные уравнения могут получаться путём структурного моделирования, рассматривая различные комбинации и соединения идеально упругих элементов с элементом Скотт-Блэра.

Действительно, параллельное соединение упругого элемента с модулем E_0 и элемента Скотт-Блэра (27) приводит к дробному аналогу модели Фойхта:

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon(t) + \eta D_{0t}^\alpha \varepsilon(t). \quad (29)$$

Соединяя последовательно дробный аналог элемента Фойхта с упругим модулем E_1 с идеальным упругим элементом, модуль которого равен E_2 , приходим к дробному аналогу определяющего соотношения Кельвина:

$$(E_1 + E_2)\sigma(t) + \eta D_{0t}^\alpha \sigma(t) = E_1 E_2 \varepsilon(t) + \eta E_2 D_{0t}^\alpha \varepsilon(t). \quad (30)$$

Если взять соотношение (25) с $E = E_1$, описывающее дробный аналог тела Максвелла, и присоединить параллельно ещё один упругий элемент с модулем E_2 , придём к определяющему соотношению, которое ассоциируется с дробным аналогом модели (тела) Зенера:

$$E_1 \sigma(t) + \eta D_{0t}^\alpha \sigma(t) = E_1 E_2 \varepsilon(t) + \eta (E_1 + E_2) D_{0t}^\alpha \varepsilon(t). \quad (31)$$

Мы сохраняем в равенствах (27)–(31) обозначения постоянных коэффициентов в том же виде, что и в классических определяющих соотношениях (3)–(6), полагая, что при $\alpha = 1$ они должны совпадать.

2. Аналитические решения задачи о ползучести для некоторых дробных аналогов классических реологических моделей. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $\sigma = \sigma(t)$ – заданная суммируемая функция.

2.1. Модель Скотт-Блэра–Герасимова. Пусть η – постоянная величина. Определяющее соотношение в данной модели в соответствии с (27) записывается в виде

$$D_{0t}^\alpha \varepsilon = \frac{1}{\eta} \sigma(t). \quad (32)$$

Ясно, что при $\alpha \rightarrow 0$ соотношение (32) переходит в закон Гука с заменой константы η на E_0 , а при $\alpha \rightarrow 1$ – в закон Ньютона.

Найдем решение этого простейшего дифференциального уравнения с начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varepsilon(t) = \varepsilon(0+) = 0$$

в классе функций $\varepsilon(t)$, таких, что $\dot{\varepsilon}(t) \in C(0, T) \cap L(0, T)$. Учитывая тождество (17), применим к левой и правой частям уравнения (32) оператор I_{0t}^α :

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} I_{0t}^\alpha \sigma(t).$$

Если $\sigma(t)$ изменяется по закону (18), в котором $\sigma_0(t) = \sigma_0 > 0$:

$$\sigma(t) = \sigma_0 (H(t) - H(t - t_1)), \quad (33)$$

то

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma_0}{\eta} I_{0t}^\alpha (H(t) - H(t - t_1)) = \\ &= \frac{\sigma_0}{\eta \Gamma(\alpha)} \left(H(t) \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau - H(t - t_1) \left(\int_0^{t_1} + \int_{t_1}^t \right) (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \right) = \\ &= \frac{\sigma_0}{\eta \Gamma(\alpha + 1)} (t^\alpha H(t) - (t - t_1)^\alpha H(t - t_1)). \quad (34) \end{aligned}$$

Отметим, что при $\alpha \rightarrow 0$ решение (34) сводится к закону Гука, если положить $\eta = E_0$, а при $\alpha \rightarrow 1$ определяет линейный закон деформирования.

2.2. Дробный аналог модели Фойхта. Пусть E_0 и η — постоянные величины. Определяющее соотношение для модели Фойхта (29) записывается в виде

$$\eta D_{0t}^\alpha \varepsilon + E_0 \varepsilon = \sigma(t). \quad (35)$$

Видно, что при $\alpha \rightarrow 1$ соотношение (35) переходит в классическое реологическое соотношение модели Фойхта (3).

Найдем решение дифференциального уравнения (35) с начальным условием

$$\varepsilon(0+) = 0$$

в классе функций $\varepsilon(t)$, таких что $\dot{\varepsilon}(t) \in C(0, T) \cap L(0, T)$, $T > 0$. Учитывая тождество (17), применим интегральный оператор I_{0t}^α к (35):

$$\varepsilon(t) - \lambda I_{0t}^\alpha \varepsilon = \frac{1}{\eta} I_{0t}^\alpha \sigma, \quad (36)$$

где $\lambda = -E_0/\eta$. Уравнение (36) — интегральное уравнение Вольтерры второго рода, решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{1}{\eta} (I - \lambda I_{0t}^\alpha)^{-1} I_{0t}^\alpha \sigma = \frac{1}{\eta} (I + \lambda E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha}) I_{0t}^\alpha \sigma = \frac{1}{\eta} (I_{0t}^\alpha \sigma + \lambda E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha} I_{0t}^\alpha \sigma) = \\ &= \frac{1}{\eta} (I_{0t}^\alpha \sigma + \lambda E_{0t;\lambda}^{2\alpha,\alpha} \sigma) = \frac{1}{\eta} E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha} \sigma. \quad (37) \end{aligned}$$

Здесь использованы некоторые свойства оператора $E_{0x;\lambda}^{\mu,\alpha}$ и тождество [26]

$$\lambda E_{0t;\lambda}^{2\alpha,\alpha} f = E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha} f - I_{0t}^\alpha f.$$

Для $\sigma(t)$, определённой в (33), получим равенство

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha} (H(t) - H(t - t_1)) = \frac{\sigma_0}{\eta} (E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha} H(t) - (E_{0t_1;\lambda}^{\alpha,\alpha} + E_{t_1 t;\lambda}^{\alpha,\alpha}) H(t - t_1)).$$

Используя тождества [27]

$$\begin{aligned} E_{at;\lambda}^{\mu;\sigma} (t - a)^{\alpha-1} &= \Gamma(\alpha) (t - a)^{\mu+\alpha-1} E_\sigma(\lambda(t - a)^\sigma; \mu + \alpha) = \\ &= \Gamma(\alpha) \text{Exp}(\sigma, \mu + \alpha; \lambda; t - a), \end{aligned}$$

зависимости деформации от времени придадим вид

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} (H(t) \text{Exp}(\alpha, \alpha + 1; \lambda; t) - H(t - t_1) \text{Exp}(\alpha, \alpha + 1; \lambda; t - t_1)).$$

Преобразуем полученное выражение. Используя некоторые свойства функции Миттаг—Леффлера [25], найдём

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\alpha, \alpha + 1; \lambda; t) &= t^\alpha E_\alpha(\lambda t^\alpha; \alpha + 1) = \frac{1}{\lambda} (\lambda t^\alpha) E_\alpha(\lambda t^\alpha; \alpha + 1) = \\ &= -\frac{\eta}{E_0} (E_\alpha(\lambda t^\alpha; 1) - 1) = \frac{\eta}{E_0} (1 - \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t)). \end{aligned}$$

Тогда

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left(H(t)(1 - \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t)) - H(t - t_1)(1 - \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t - t_1)) \right). \quad (38)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \varepsilon(t) &= \\ &= \frac{\sigma_0}{E_0} \left(H(t)(1 - \text{Exp}(1, 1; \lambda; t)) - H(t - t_1)(1 - \text{Exp}(1, 1; \lambda; t - t_1)) \right) = \\ &= \frac{\sigma_0}{E_0} (H(t)(1 - e^{-\beta t}) - H(t - t_1)(1 - e^{-\beta(t-t_1)})), \end{aligned}$$

где $\beta = -\lambda$. Это следует из того, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t) = E(1, 1; \lambda; t) = e^{\lambda t}.$$

Таким образом, при $\alpha \rightarrow 1$ решение (38) принимает вид классического решения для модели Фойхта (3).

В работе [26] рассмотрены некоторые иные аналоги дробной модели Фойхта. Например, при $\alpha \in (0, 1/2)$ было рассмотрено определяющее соотношение следующего вида:

$$E_0 D_{0t}^\alpha \varepsilon + \eta D_{0t}^{1-\alpha} \varepsilon = \sigma(t). \quad (39)$$

По отношению к искомой функции $\varepsilon(t)$ уравнение (39) является обыкновенным дифференциальным уравнением дробного порядка $(1 - \alpha)$, причем при $\alpha \rightarrow 0+$ уравнение (39) принимает вид классического реологического соотношения для модели Фойхта (3).

Его решение для $\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}$ найдено в [26] в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - \text{Exp}(1 - 2\alpha, 1 + \alpha; -E_0/\eta; t) \right).$$

В работе [26] также рассмотрен аналог дробной реологической модели Фойхта

$$E_0 D_{0t}^\alpha \varepsilon + \eta D_{0t}^{1+\alpha} \varepsilon = \sigma(t), \quad (40)$$

который обладает тем же свойством, что и определяющее соотношение (39), а именно при $\alpha \rightarrow 0$ уравнение (40) принимает вид классического соотношения (3). Решение (40) для $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ найдено в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - \text{Exp}(1, 1 + \alpha; -E_0/\eta; t) \right).$$

Приведенные дробные аналоги модели Фойхта, явные решения соответствующих дифференциальных уравнений, рассматривались в работе [26] в качестве примеров в стадии нагружения, а в работах [41–43] был проведен детальный анализ решений задачи ползучести при различных зависимостях напряжения от времени, доказана непрерывная зависимость найденных решений от параметра α при его устремлении к единице или к нулю, изучена асимптотика этих решений.

2.3. Дробный аналог модели Максвелла. Пусть E_0, η — постоянные величины. Рассмотрим определяющее соотношение (25) в виде, аналогичном (20):

$$D_{0t}^\alpha \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E_0} \right) = \frac{1}{\eta} \sigma(t). \quad (41)$$

Найдем решение этого дифференциального уравнения с начальным условием

$$\varepsilon(0+) = \sigma(0+)/E_0.$$

Применяя к левой и правой частям уравнения (41) оператор I_{0t}^α , получим равенство

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} + \frac{1}{\eta} I_{0t}^\alpha \sigma(t). \quad (42)$$

Если $\sigma(t)$ изменяется по закону (33), то решение (42) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma_0}{E_0} (H(t) - H(t - t_1)) + \frac{\sigma_0}{\eta} (I_{0t}^\alpha H(t) - (I_{0t_1}^\alpha + I_{t_1 t}^\alpha) H(t - t_1)) = \\ &= \frac{\sigma_0}{E_0} \left\{ \left(1 + \frac{\beta t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) H(t) - \left(1 + \frac{\beta(t - t_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) H(t - t_1) \right\}, \end{aligned} \quad (43)$$

где $\beta = E_0/\eta$.

Очевидно, что существует предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1-0} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} ((1 + \beta t)H(t) - (1 + \beta(t - t_1))H(t - t_1)),$$

который является классическим решением задачи о ползучести для модели Максвелла (4).

Хорошо видно, что, как и в классическом случае, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varepsilon(t) = \sigma_0/E_0,$$

характеризующий величину мгновенной упругой деформации, совпадающую с мгновенной упругой разгрузкой. Действительно, значение деформации при $t = t_1$:

$$\varepsilon(t_1) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left(1 + \frac{\beta t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right).$$

С другой стороны, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow t_1+0} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0 \beta t_1^\alpha}{E_0 \Gamma(\alpha + 1)}.$$

Тогда

$$\varepsilon(t_1) - \lim_{t \rightarrow t_1+0} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0}.$$

2.4. Дробные аналоги моделей Кельвина и Зенера. Рассмотрим определяющие соотношения (30) и (31) одновременно, записывая их следующим образом:

$$\sigma(t) + bD_{0t}^\alpha \sigma = E\varepsilon(t) + aD_{0t}^\alpha \varepsilon. \quad (44)$$

Соотношению (44) можно придать такой вид:

$$D_{0t}^\alpha \left(\varepsilon - \frac{b}{a} \sigma \right) + \frac{E}{a} \left(\varepsilon - \frac{b}{a} \sigma \right) = \frac{E}{a} \left(\frac{1}{E} - \frac{b}{a} \right) \sigma(t).$$

Относительно функции

$$u(t) = \varepsilon(t) - \frac{b}{a} \sigma(t)$$

получим дифференциальное уравнение Барретта [20, 40]:

$$D_{0t}^\alpha u + \beta u = \frac{1}{a} (1 - b\beta) \sigma(t), \quad (45)$$

где $\beta = E/a$.

Решение дифференциального уравнения (45) будем искать в классе функций $u(t)$, таких, что $\dot{u}(t) \in C(0, T) \cap L(0, T)$, $T > 0$, с начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(t) = u(0+) = 0. \quad (46)$$

Для таких функций $u(t)$ справедливо тождество (17):

$$I_{0t}^\alpha D_{0t}^\alpha u = u(t),$$

если $\alpha \in (0, 1)$. Тогда дифференциальное уравнение (45) с условием (46) эквивалентно редуцируется к интегральному уравнению типа Вольтерры второго рода

$$u(t) - \lambda I_{0t}^\alpha u = \frac{1}{a} (1 - b\beta) I_{0t}^\alpha \sigma, \quad (47)$$

где $\lambda = -\beta = -E/a$.

Интегральное уравнение (47) имеет ту же структуру, что и уравнение (36), и, следовательно, его решение записывается в виде, аналогичном формуле (37):

$$u(t) = \frac{1}{a} (1 - b\beta) E_{0t; \lambda}^{\alpha; \alpha} \sigma. \quad (48)$$

Для закона изменения напряжения (33) решение (48) записывается в виде

$$u(t) = \frac{\sigma_0}{a}(1 - b\beta)(H(t) \text{Exp}(\alpha, \alpha + 1; \lambda; t) - H(t - t_1) \text{Exp}(\alpha, \alpha + 1; \lambda; t - t_1)).$$

Отметим, что

$$u(t) = \frac{\sigma_0}{E}(1 - b\beta)(H(t)(1 - \text{Exp}(\alpha, 1; -\beta; t)) - H(t - t_1)(1 - \text{Exp}(\alpha, 1; -\beta; t - t_1))), \quad (49)$$

так как

$$\text{Exp}(\alpha, \alpha + 1; \lambda; t) = \text{Exp}(\alpha, \alpha + 1; -E/a; t) = \frac{a}{E}(1 - \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t)).$$

Найдём законы деформирования для моделей Кельвина и Зенера в терминах параметров этих моделей:

– модель Кельвина:

$$a = \frac{\eta E_2}{E_1 + E_2}, \quad b = \frac{\eta}{E_1 + E_2}, \quad E = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2},$$

$$\beta = \frac{E}{a} = \frac{E_1}{\eta}, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{E_2}, \quad 1 - \beta b = \frac{E_2}{E_1 + E_2};$$

из равенства (49) имеем

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_2} + \frac{1}{a}(1 - b\beta)E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha}\sigma =$$

$$= \frac{\sigma_0}{E_2} \left\{ H(t) \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \left(1 - \text{Exp}(\alpha, 1; -E_1/\eta; t) \right) \right) - \right.$$

$$\left. - H(t - t_1) \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \left(1 - \text{Exp}(\alpha, 1; -E_1/\eta; t - t_1) \right) \right) \right\}; \quad (50)$$

– модель Зенера:

$$a = \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1}, \quad b = \frac{\eta}{E_1}, \quad E = E_2,$$

$$\beta = \frac{E}{a} = \frac{E_0}{\eta}, \quad E_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}, \quad 1 - \beta b = \frac{E_2}{E_1 + E_2};$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1 + E_2} \left\{ H(t) \left(1 + \frac{E_1}{E_2} \left(1 - \text{Exp}(\alpha, 1; -E_0/\eta; t) \right) \right) - \right.$$

$$\left. - H(t - t_1) \left(1 + \frac{E_1}{E_2} \left(1 - \text{Exp}(\alpha, 1; -E_0/\eta; t - t_1) \right) \right) \right\}. \quad (51)$$

Полученные в формулах (50) и (51) законы деформации в стадии нагружения и разгрузки совпадают с приведенными в работах [41–43]. А в настоящей работе изучена асимптотика найденных решений и показано равенство мгновенных упругих деформаций в стадии нагружения и разгрузки и их совпадение с классическими значениями.

Прежде всего отметим непрерывную зависимость решений (50) и (51) от параметра α в том смысле, что при $\alpha \rightarrow 1-0$ эти решения переходят в хорошо известные решения для классических моделей Кельвина (5) и Зенера (6).

Для дробного аналога модели Кельвина существует предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \varepsilon(t) = \sigma_0/E_2,$$

а в момент разгрузки значение деформации примет вид

$$\varepsilon(t_1) = \frac{\sigma_0}{E_2} \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \left(1 - \text{Exp}(\alpha, 1; -E_1/\eta; t_1) \right) \right).$$

С другой стороны,

$$\lim_{t \rightarrow t_1+0} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} \left(1 - \text{Exp}(\alpha, 1; -E_1/\eta; t_1) \right).$$

Тогда разность

$$\varepsilon(t_1) - \lim_{t \rightarrow t_1+0} \varepsilon(t) = \sigma_0/E_2.$$

Тем самым показано, что величины мгновенной упругой деформации для дробного аналога модели Кельвина в стадии нагружения и разгрузки совпадают с аналогичным значением в классическом случае.

Для дробного аналога модели Зенера имеет место аналогичный результат:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varepsilon(t) = \varepsilon(t_1) - \lim_{t \rightarrow t_1+0} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1 + E_2}.$$

3. Асимптотика найденных решений. Основные результаты этого раздела сформулированы в нижеследующих теоремах о явных решениях задачи ползучести при законе нагружения, определённом формулой (33), и их асимптотических свойствах. Используется следующий факт, касающийся асимптотического поведения дробной (двупараметрической) экспоненциальной функции [24]:

$$\text{Exp}(\alpha, \mu; -\beta; t) = t^{\mu-1} E_\alpha(-\beta t^\alpha; \mu) = \frac{t^{\mu-1-\alpha}}{\beta \Gamma(\mu-\alpha)} + O(t^{\mu-1-2\alpha}),$$

который следует из хорошо известной асимптотической формулы [25]:

$$E_\alpha(z; \mu) = - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k\alpha)} + O(|z|^{-1-p}),$$

если $\alpha_0 \leq |\arg z| \leq \pi$, где

$$\frac{\pi\alpha}{2} < \alpha_0 < \min\{\pi, \alpha\pi\}.$$

В нашем случае $\arg(-\beta t^\alpha) = \pi$.

Во всех нижеследующих теоремах идёт речь о функции деформации $\varepsilon(t)$, такой, что $\dot{\varepsilon}(t) \in C(0, t_1] \cup C(t_1, T) \cap L(0, T)$.

ТЕОРЕМА 1. *Решение задачи ползучести для дробной математической модели Скотт-Блэра–Герасимова (32) с начальным условием*

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varepsilon(t) = 0$$

существует в виде (34), единственно и обладает следующими свойствами:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = +\infty,$$

если $\sigma(t) = \sigma_0$ для любого $t \in (0, +\infty)$, и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0,$$

если $\sigma(t)$ определяется формулой (33).

ТЕОРЕМА 2. *Решение задачи ползучести для дробного аналога модели Фойхта (35) с начальным условием*

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varepsilon(t) = 0$$

существует в виде (38), единственно и обладает следующими свойствами:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \sigma_0/E_0,$$

если $\sigma(t) = \sigma_0$ для любого $t \in (0, +\infty)$, и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0,$$

если $\sigma(t)$ определяется формулой (33).

ЗАМЕЧАНИЕ. Сравнительный анализ показывает, что в качественном отношении дробные модели Скотт-Блэра–Герасимова и Фойхта ведут себя подобным образом, обладая пределом

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0$$

в стадии разгрузки. Однако модель Скотт-Блэра–Герасимова при постоянно действующей нагрузке демонстрирует неограниченный рост деформации, в то время как дробный аналог модели Фойхта обладает асимптотой при $t \rightarrow +\infty$, как и в классическом случае.

Следующие три теоремы касаются решений задачи ползучести в математических моделях второго типа.

ТЕОРЕМА 3. *Решение задачи ползучести для дробного аналога модели Максвелла (41) с начальным условием*

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varepsilon(t) = (1/E_0) \lim_{t \rightarrow 0+} \sigma(t) = \sigma_0/E_0$$

существует в виде (43), единственно и обладает следующими свойствами:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = +\infty,$$

если $\sigma(t) = \sigma_0$ для любого $t \in (0, +\infty)$, и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0,$$

если $\sigma(t)$ определяется формулой (33).

ТЕОРЕМА 4. Решение задачи ползучести для дробного аналога модели Кельвина с начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varepsilon(t) = (1/E_2) \lim_{t \rightarrow 0+} \sigma(t) = \sigma_0/E_2$$

существует в виде (50), единственно и обладает следующими свойствами:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \sigma_0/E,$$

где $E = E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$, если $\sigma(t) = \sigma_0$ для любого $t \in (0, +\infty)$, и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0,$$

если $\sigma(t)$ определяется формулой (33).

ТЕОРЕМА 5. Решение задачи ползучести для дробного аналога модели Зенера с начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varepsilon(t) = 1/(E_1 + E_2) \lim_{t \rightarrow 0+} \sigma(t) = \sigma_0/(E_1 + E_2)$$

существует в виде (51), единственно и обладает следующими свойствами:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \sigma_0/E_2,$$

если $\sigma(t) = \sigma_0$ для любого $t \in (0, +\infty)$, и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0,$$

если $\sigma(t)$ определяется формулой (33).

Доказательство существования решений во всех приведенных выше теоремах осуществляется непосредственной подстановкой решений в определяющие соотношения; единственность является следствием единственности решений интегральных уравнений вольтерровского типа.

4. Пример использования дробной модели Фойхта для описания экспериментальных данных. Одной из задач является решение проблемы применимости дробных моделей вязкоупругого поведения материалов для построения соответствующих феноменологических теорий на основе известных экспериментальных данных. В качестве примера рассмотрим дробный аналог модели Фойхта, задаваемой дифференциальным уравнением (35). Это типичная

трёхпараметрическая модель относительно величин α , E_0 и η . При кусочно-постоянном напряжении $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ (см. формулу (33)) решение (35) имеет вид (38), где $\lambda = -E_0/\eta$. Таким образом, для идентификации параметров α , E_0 и η достаточно иметь кривые прямой и обратной деформации вязкоупругости при напряжении, изменяющемся по закону (33).

Для построения соответствующей дробной феноменологической модели (35) воспользуемся экспериментальными данными для вязкоупругой деформации поливинилхлоридного пластика, которые приведены в работе [44] и были получены при растяжении поливинилхлоридных трубок площадью поперечного сечения 1.2 мм^2 при температуре 20°C и постоянных напряжениях $\sigma_0 = \{4.655; 6.288; 8.738; 10.372; 12.005\}$ МПа, действующих на образцы в течение 8 часов, после чего производилась полная разгрузка образцов ($\sigma_0 = 0$ при $t > 8$ часов). При каждом напряжении испытывалось от 3 до 5 образцов, а затем результаты испытаний осреднялись.

Экспериментальные кривые вязкоупругой деформации поливинилхлоридного пластика имеют мгновенно упругую компоненту и собственно вязкоупругую составляющую. Поэтому мгновенно упругая деформация в момент приложения нагрузки $t = 0 + 0$ при $\sigma_0 = \text{const}$ и в момент разгрузки $t = 8 + 0$ часов не учитывалась, т. е. из общей деформации вычиталась чисто упругая деформация, и в дальнейшем учитывалась только наследственная компонента деформации.

На рис. 1 и 2 сплошными линиями приведены соответствующие осреднённые экспериментальные данные наследственной (вязкоупругой) деформации.

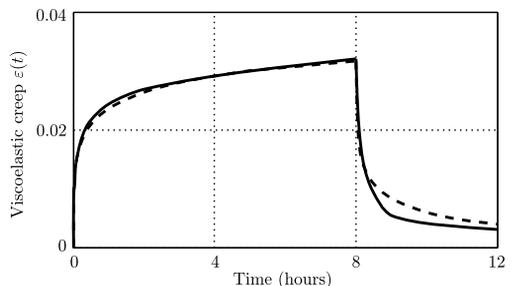
Рассмотрим методику идентификации параметров дробной модели Фойхта (35). С точки зрения регрессионного анализа решение (38) представляет нелинейную зависимость относительно параметров α , E_0 и λ , поэтому применение классического метода наименьших квадратов даёт нелинейную систему алгебраических уравнений, решение которой (с учётом того, что функция $\text{Exp}(\alpha, 1; \lambda, t)$ задаётся рядом) связано с непреодолимыми математическими трудностями. В связи с этим разработан итерационный численный метод нахождения этих параметров.

Для получения нулевого приближения функция $\text{Exp}(\alpha, 1; \lambda, t)$ раскладывается в ряд, в котором используются лишь первые два члена и применяется метод наименьших квадратов к полученной линейной регрессионной модели. Дальнейшее уточнение параметров α , E_0 и λ (а значит, и η) осуществляется методом координатного спуска.

В результате первичной обработки каждой кривой вязкоупругого деформирования при всех пяти напряжениях σ_0 и в времени от 0 до 12 часов найде-

Рис. 1. Экспериментальная (сплошная линия) и расчетная по модели (38) (штриховая линия) кривые вязкоупругого деформирования поливинилхлоридного пластика при напряжении $\sigma_0 = 6.288$ МПа с последующей разгрузкой

[Figure 1. Experimental (solid line) and calculated by the model (38) (dashed line) viscoelastic creep curves of the flexible PVC at the stress $\sigma_0 = 6.288$ MPa with subsequent unloading]



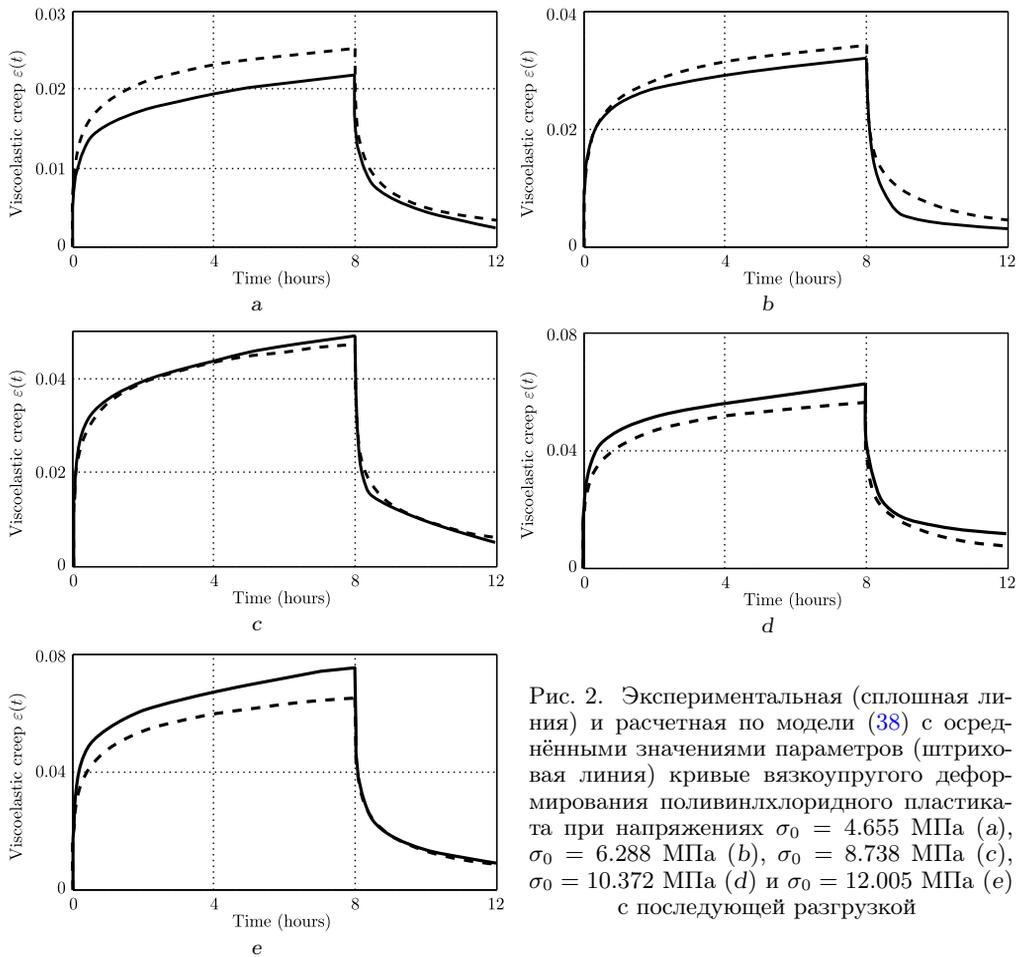


Рис. 2. Экспериментальная (сплошная линия) и расчетная по модели (38) с осреднёнными значениями параметров (штриховая линия) кривые вязкоупругого деформирования поливинилхлоридного пластика при напряжениях $\sigma_0 = 4.655$ МПа (a), $\sigma_0 = 6.288$ МПа (b), $\sigma_0 = 8.738$ МПа (c), $\sigma_0 = 10.372$ МПа (d) и $\sigma_0 = 12.005$ МПа (e) с последующей разгрузкой

[Figure 2. Experimental (solid line) and calculated by the model (38) with averaged values of parameters (dashed line) viscoelastic creep curves of the flexible PVC at the stresses $\sigma_0 = 4.655$ МПа (a), $\sigma_0 = 6.288$ МПа (b), $\sigma_0 = 8.738$ МПа (c), $\sigma_0 = 10.372$ МПа (d), and $\sigma_0 = 12.005$ МПа (e) with subsequent unloading]

Значения параметров аппроксимации (38) и погрешности [The values of the approximation parameters for Eq. (38) and measure of inaccuracy]

σ_0 , МПа	α	E_0 , МПа	η	Δ_1 , %	$\bar{\alpha}$	\bar{E}_0 , МПа	$\bar{\eta}$	Δ_2 , %
4.655	0.355	145.525	190.067	3.102	0.3846	137.155	140.191	18.580
6.288	0.326	133.601	158.793	5.078				8.892
8.738	0.394	140.194	128.956	3.768				4.841
10.372	0.318	97.571	158.840	4.163				4.841
12.005	0.400	127.962	113.856	3.700				12.273

ны значения параметров модели (35), которые приведены в таблице. В колонке Δ_1 приведены отклонения теоретической зависимости $\varepsilon(t_k)$, вычисленной по формуле (38) при каждом значении σ_0 с найденными параметрами α , E_0 и η , от экспериментальных данных $\tilde{\varepsilon}(t_k)$:

$$\Delta = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\tilde{\varepsilon}(t_k) - \varepsilon(t_k))^2 / \sum_{k=1}^n (\tilde{\varepsilon}(t_k))^2} \cdot 100 \%. \quad (52)$$

Здесь t_k — точки дискретизации времени, n — множество точек дискретизации.

В качестве примера на рис. 1 штриховой линией приведена расчётная зависимость для вязкоупругой деформации $\varepsilon(t)$, вычисленная по формуле (38) при $\sigma_0 = 6.288$ МПа с параметрами из второй строки таблицы. Вычисленное по формуле (52) отклонение расчётных данных вязкоупругой деформации от экспериментальных значений в этом случае имеет величину $\Delta_1 = 5.078$ %. Аналогичный расчёт выполнен и для других уровней напряжения, полученные значения параметров α , E_0 , η и величины Δ_1 приведены в таблице.

Из результатов, представленных в таблице, следует, что имеется существенный разброс относительно значений параметров α , E_0 и η . Поэтому для построения модели (35) выполнено осреднение величин α , E_0 и η по пяти реализациям (для всех пяти уровней напряжения σ_0) и получены значения усреднённых параметров $\bar{\alpha}$, \bar{E}_0 , $\bar{\eta}$, приведённые в таблице.

На рис. 2 штриховыми линиями показаны расчётные значения вязкоупругой деформации для всех пяти уровней напряжения, построенных при усреднённых значениях параметров. В этом случае погрешность отклонения расчётных значений от экспериментальных для каждого уровня напряжений, вычисленная по формуле (52), приведена в таблице в колонке Δ_2 . Средняя погрешность Δ_2 по всем пяти реализациям составляет величину 11 %. Отметим, что для вычислений дробной экспоненциальной функции $\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t)$ использовался «Автоматизированный исследовательский комплекс «MitLef».¹

Анализ данных расчёта для дробной модели (35) и экспериментальных данных свидетельствует, что, по всей видимости, кривые стационарной вязкоупругости поливинилхлоридного пластиката обладают слабой нелинейностью связи «напряжение – деформация», а это не заложено в модель (35). Поэтому дальнейшее уточнение дробных аналогов модели Фойхта применительно к моделированию реологического деформирования поливинилхлоридного пластиката связано с введением нелинейности, но это не являлось целью настоящей работы.

Резюме. В работе рассмотрены математические модели наследственно упругого тела: модель Скотт-Блэра–Герасимова, дробные аналоги моделей Фойхта, Максвелла, Кельвина и Зенера. Показан переход от структурных реологических моделей к математическим моделям наследственно упругого тела на основе гипотезы В. Вольтерры (7) с использованием в определяющем соотношении ядра Абелевского типа и применения оператора дробного дифференцирования Римана–Лиувилля с началом в нуле. Найдены явные решения задачи ползучести для перечисленных дробных дифференциальных уравнений и обоснована корректность постановки задачи Коши при использовании дробной производной Римана–Лиувилля. Отмечено, что многие ав-

торы применяют иные виды дробных производных (Грюнвальда—Летникова, Лиувилля, Капуто), упрощающих постановку и решение начальных задач соответствующих интегро-дифференциальных уравнений, но искажающих суть моделируемых реальных физических процессов.

Показано, что в предельном переходе при устремлении параметра дробности α к единице решения задач ползучести для дробных аналогов реологических моделей переходят в хорошо известные решения для классических реологических моделей. Сформулированы и обоснованы теоремы о существовании и асимптотических свойствах найденных решений задач ползучести на основе дробных моделей.

В качестве иллюстрации приведён пример построения феноменологической модели поливинилхлоридного пластика на основе дробной модели Фойхта (40). Разработана и реализована методика идентификации параметров этой модели. Приведены расчётные данные для деформации ползучести в режиме «нагрузка – разгрузка». Наблюдается удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных данных.

ORCIDs

Евгений Николаевич Огородников: <http://orcid.org/0000-0002-5889-0590>

Владимир Павлович Радченко: <http://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

Луиза Гадильевна Унгарова: <http://orcid.org/0000-0001-5388-8101>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Работнов Ю. Н. *Механика деформируемого твёрдого тела*. М.: Наука, 1988. 712 с.
3. Малинин Н. Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
4. Работнов Ю. Н. *Элементы наследственной механики твёрдых тел*. М.: Наука., 1977. 384 с.
5. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
6. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
7. Uchaikin V. V. Heredity and Nonlocality / *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers*. vol. 1, Background and Theory. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2013. pp. 3–58. doi: [10.1007/978-3-642-33911-0_1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-33911-0_1); doi: [10.1007/978-3-642-33911-0](https://doi.org/10.1007/978-3-642-33911-0).
8. Volterra V. Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità // *Rend. Acc. Naz. Lincei*, 1909. vol. 18. pp. 295–301.
9. Вольтерра В. *Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1982. 304 с.
10. Boltzmann L. Theorie der elastischen Nachwirkung (Theory of elastic after effects) // *Wien. Ber.*, 1874. vol. 70. pp. 275–306 Boltzman L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung (On the elastic after effect) // *Pogg. Ann.* (2), 1878. vol. 5. pp. 430–432 Boltzman L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung / *Wissenschaftliche Abhandlungen*. vol. 2 / Cambridge Library Collection; ed. Friedrich Hasenöhl. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. pp. 318–320. doi: [10.1017/CB09781139381437.015](https://doi.org/10.1017/CB09781139381437.015).
11. Duffing G. Elastizität und Reibung beim Riementrieb (Elasticity and friction of the belt drive) // *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*, 1931. vol. 2, no. 3. pp. 99–104. doi: [10.1007/BF02578795](https://doi.org/10.1007/BF02578795).
12. Gemant A. A Method of Analyzing Experimental Results Obtained from Elasto-Viscous Bodies // *J. Appl. Phys.*, 1936. vol. 7. pp. 311–317. doi: [10.1063/1.1745400](https://doi.org/10.1063/1.1745400).
13. Бронский А. П. Явление последействия в твёрдом теле // *ПММ*, 1941. Т. 5, № 1. С. 31–56.
14. Слонимский Г. Л. О законах деформации реальных материалов // *ЖТФ*, 1939. Т. 9, № 20. С. 1791–1799.

15. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях пространственного деформирования не вполне упругих и вязкопластических тел // *Изв. АН СССР, ОТН*, 1945. №3. С. 250–260.
16. Ржаницын А. Р. *Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени*. М.: Гостехиздат, 1949. 248 с.
17. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // *ПММ*, 1948. Т. 12, №1. С. 53–62.
18. Булгаков И. И. *Ползучесть полимерных материалов*. М.: Наука, 1973. 288 с.
19. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications / Mathematics in Science and Engineering*. vol.198. San Diego: Academic Press, 1999. xxiv+340 pp.
20. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations / North-Holland Mathematics Studies*. vol. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006. xx+523 pp.
21. Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models*. Hackensack, NJ: World Scientific, 2010, xx+347 pp. doi: [10.1142/9781848163300](https://doi.org/10.1142/9781848163300).
22. Самко С. Г. Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
23. Gemant A. On fractional differentials // *Philos. Mag., VII. Ser.*, 1938. vol. 25. pp. 540–549.
24. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Некоторые специальные функции в решении задачи Коши для одного дробного осцилляционного уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. №1(18). С. 276–279. doi: [10.14498/vsgtu685](https://doi.org/10.14498/vsgtu685).
25. Джрбашян М. М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*. М.: Наука, 1966. 672 с.
26. Огородников Е. Н. Радченко В. П., Яшагин Н. С. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. №1(22). С. 255–268. doi: [10.14498/vsgtu932](https://doi.org/10.14498/vsgtu932).
27. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. О некоторых свойствах операторов с функциями типа Миттаг–Леффлера в ядрах / *Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием (1–4 июня 2009 г.)*. Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2009. С. 181–188.
28. Абусайтова Л. Г., Огородников Е. Н. О некоторых специальных функциях, связанных с функцией Миттаг–Леффлера, их свойствах и применении / *Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики*: Материалы X Школы молодых ученых. Нальчик: КБНЦ РАН, 2012. С. 13–15.
29. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional Calculus. Integral and Differential Equations of Fractional Order / *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / CISM Courses and Lectures*, 378. Wien: Springer, 1997. pp. 223–276. doi: [10.1007/978-3-7091-2664-6_5](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2664-6_5).
30. Koeller R. C. Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity // *J. Appl. Mech.*, 1984. vol. 51, no. 2. pp. 299–307. doi: [10.1115/1.3167616](https://doi.org/10.1115/1.3167616).
31. Carpinteri A., Cornetti P., Sapora A. Nonlocal elasticity: an approach based on fractional calculus // *Meccanica*, 2014. vol.49, no.11. pp. 2551–2569. doi: [10.1007/s11012-014-0044-5](https://doi.org/10.1007/s11012-014-0044-5).
32. Bagley R. L., Torvic P. J. A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity // *J. Rheol.*, 1983. vol. 27, no. 3. pp. 201–210. doi: [10.1122/1.549724](https://doi.org/10.1122/1.549724).
33. Bagley R. L., Torvic P. J. Fractional calculus — A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures // *AIAA Journal*, 1984. vol. 21, no. 5. pp. 741–748. doi: [10.2514/3.8142](https://doi.org/10.2514/3.8142).

34. Lewandowski R., Chorażyczewski B. Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers // *Computers and Structures*, 2009. vol. 88, no. 1–2. pp. 1–17. doi: [10.1016/j.compstruc.2009.09.001](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.09.001).
35. Caputo M., Mainardi F. Linear models of dissipation in anelastic solids // *La Rivista del Nuovo Cimento*, 1971. vol. 1, no. 2. pp. 161–198. doi: [10.1007/bf02820620](https://doi.org/10.1007/bf02820620).
36. Caputo M., Mainardi F. A new dissipation model based on memory mechanism // *Pure and Applied Geophysics*, 1971. vol. 91, no. 1. pp. 134–147. doi: [10.1007/bf00879562](https://doi.org/10.1007/bf00879562).
37. Scott Blair G. W. The role of psychophysics in rheology // *Journal of Colloid Science*, 1947. vol. 2, no. 1. pp. 21–32. doi: [10.1016/0095-8522\(47\)90007-x](https://doi.org/10.1016/0095-8522(47)90007-x).
38. Scott Blair G. W. *A survey of general and applied rheology*. London: Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd., 1949. xvi+314 pp.
39. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // *ПММ*, 1948. Т. 12, № 3. С. 251–260.
40. Barrett J. H. Differential equations of non-integer order // *Canad. J. Math.*, 1954. vol. 6. pp. 529–541. doi: [10.4153/cjm-1954-058-2](https://doi.org/10.4153/cjm-1954-058-2).
41. Огородников Е. Н., Абусаитова Л. Г. Определяющие соотношения и начальные задачи для вязкоупругих сред с дробными операторами Римана–Лиувилля / *Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела*, Ч. 2. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. С. 105–107.
42. Абусаитова Л. Г., Огородников Е. Н. Математическое моделирование вязкоупругих сред с памятью и задача параметрической идентификации дробных реологических моделей / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 40–41.
43. Унгарова Л. Г. Явные решения задачи о ползучести для некоторых нелинейных реологических моделей наследственно-упругого тела / *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*: сборник докладов. Казань, 2015. С. 3843–3845.
44. Радченко В. П., Голудин Е. П. Феноменологическая стохастическая модель изотермической ползучести поливинилхлоридного пластика // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 1(16). С. 45–52. doi: [10.14498/vsgtu571](https://doi.org/10.14498/vsgtu571).

Поступила в редакцию 05/XI/2015;
в окончательном варианте — 19/II/2016;
принята в печать — 26/II/2016.

MSC: 74D10; 26A33

MATHEMATICAL MODELING OF HEREDITARY ELASTICALLY DEFORMABLE BODY ON THE BASIS OF STRUCTURAL MODELS AND FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION RIEMANN–LIOUVILLE APPARATUS

E. N. Ogorodnikov, V. P. Radchenko, L. G. Ungarova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The standard one-dimensional generalized model of a viscoelastic body and some of its special cases—Voigt, Maxwell, Kelvin and Zener models are considered. Based on the V. Volterra hypothesis of hereditary elastically deformable solid body and the method of structural modeling the fractional analogues of classical rheological models listed above are introduced. It is shown that if an initial V. Volterra constitutive relation uses the Abel-type kernel, the fractional derivatives arising in constitutive relations will be the Riemann–Liouville derivatives on the interval. It is noted that in many works deal with mathematical models of hereditary elastic bodies, the authors use some fractional derivatives, convenient for the integral transforms, for example, the Riemann–Liouville derivatives on the whole real number line or Caputo derivatives. The explicit solutions of initial value problems for the model fractional differential equations are not given. The correctness of the Cauchy problem is shown for some linear combinations of functions of stress and strain for constitutive relations in differential form with Riemann–Liouville fractional derivatives. Explicit solutions of the problem of creep at constant stress in steps of loading and unloading are found. The continuous dependence of the solutions on the model fractional parameter is proved, in the sense that these solutions transform into a well-known solutions for classical rheological models when $\alpha \rightarrow 1$. We note the persistence of instantaneous elastic deformation in the loading and unloading process for fractional Maxwell, Kelvin and Zener models. The theorems on the existence and asymptotic properties of the solutions of creep problem are presented and

© 2016 Samara State Technical University.

Please cite this article in press as:

Ogorodnikov E. N., Radchenko V. P., Ungarova L. G. Mathematical modeling of hereditary elastically deformable body on the basis of structural models and fractional integro-differentiation Riemann–Liouville apparatus, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 167–194. doi: [10.14498/vsgtu1456](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1456). (In Russian)

Authors Details:

Eugeniy N. Ogorodnikov (Cand. Phys. & Math. Sci.; eugen.ogo@gmail.com; Corresponding Author), Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.

Vladimir P. Radchenko (Dr. Phys. & Math. Sci.; radch@samgtu.ru), Head of Dept., Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.

Luiza G. Ungarova (algluiza@gmail.com), Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.

proved. The computer system identifying the parameters of the fractional mathematical model of the viscoelastic body is developed, the accuracy of the approximations for experimental data and visualization solutions of creep problems is evaluated. Test data with constant tensile stresses of polyvinyl chloride tube were used for experimental verification of the proposed models. The results of the calculated data based on the fractional analog of Voigt model are presented. There is a satisfactory agreement between the calculated and experimental data.

Keywords: structural models, rheological models, viscoelasticity, creep, fractional calculus, the operators of Riemann–Liouville fractional integration and differentiation, fractional integral and differential equations, parametric identification, experimental data, Mittag–Leffler type function.

ORCID*s*

Eugeniy N. Ogorodnikov: <http://orcid.org/0000-0002-5889-0590>

Vladimir P. Radchenko: <http://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

Luiza G. Ungarova: <http://orcid.org/0000-0001-5388-8101>

REFERENCES

1. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.
2. Rabotnov Yu. N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable rigid body]. Moscow, Nauka, 1988, 712 pp. (In Russian)
3. Malinin N. N. *Prikladnaia teoriia plastichnosti i polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1975, 400 pp. (In Russian)
4. *Elements of hereditary solid mechanics*, Mir Publ., 1980, 388 pp.
5. Nakhushiev A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 pp. (In Russian)
6. Nakhushiev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow, Vysshiaia shkola, 1995, 301 pp. (In Russian)
7. Uchaikin V. V. Heredity and Nonlocality, *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers*, vol. 1, Background and Theory. Berlin, Springer Berlin Heidelberg, 2013, pp. 3–58. doi: [10.1007/978-3-642-33911-0_1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-33911-0_1); doi: [10.1007/978-3-642-33911-0](https://doi.org/10.1007/978-3-642-33911-0).
8. Volterra V. Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, 1909, vol. 18, pp. 295–301.
9. Volterra V. *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. New York, Dover Publ., Inc., 1959, 226 pp.
10. Boltzmann L. Theorie der elastischen Nachwirkung (Theory of elastic after effects), *Wien. Ber.*, 1874, vol. 70, pp. 275–306; Boltzman L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung (On the elastic after effect), *Pogg. Ann.* (2), 1878, vol. 5, pp. 430–432; Boltzman L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, vol. 2, Cambridge Library Collection; ed. Friedrich Hasenöhr. Cambridge, Cambridge University Press, 2012, pp. 318–320. doi: [10.1017/CB09781139381437.015](https://doi.org/10.1017/CB09781139381437.015).
11. Duffing G. Elastizität und Reibung beim Riemetrieb (Elasticity and friction of the belt drive), *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*, 1931, vol. 2, no. 3, pp. 99–104. doi: [10.1007/BF02578795](https://doi.org/10.1007/BF02578795).
12. Gemant A. A Method of Analyzing Experimental Results Obtained from Elasto-Viscous Bodies, *J. Appl. Phys.*, 1936, vol. 7, pp. 311–317. doi: [10.1063/1.1745400](https://doi.org/10.1063/1.1745400).
13. Bronskij A. P. Residual effect in rigid bodies, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1941, vol. 5, no. 1, pp. 31–56 (In Russian).
14. Slonimsky G. L. On the laws of deformation of real materials. I. The theories of Maxwell and Boltzmann, *Acta physicochim. URSS*, 1940, vol. 12, pp. 99–128.

15. Ishlinsky A. Yu. On equations of spatial deformation of not completely elastic and elastoplastic bodies, *Izv. AN SSSR, OTN*, 1945, no. 3, pp. 250–260 (In Russian).
16. Rzhansitsyn A. R. *Nekotorye voprosy mekhaniki sistem, deformiruiushchikhsia vo vremeni* [Some Problems in the Mechanics of Time-Deformable Systems]. Moscow, Gostekhizdat, 1949, 248 pp. (In Russian)
17. Rabotnov Yu. N. Equilibrium of an elastic medium with after-effect, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2014, vol. 17, no. 3, pp. 684–696. doi: [10.2478/s13540-014-0193-1](https://doi.org/10.2478/s13540-014-0193-1).
18. Bulgakov I. I. *Polzuchest' polimernykh materialov* [Creep of Polymer Materials]. Moscow, Nauka, 1973, 288 pp.
19. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego, Academic Press, 1999, xxiv+340 pp.
20. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xx+523 pp.
21. Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models*. Hackensack, NJ, World Scientific, 2010, xx+347 pp. doi: [10.1142/9781848163300](https://doi.org/10.1142/9781848163300).
22. Samko S. G. Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)
23. Gemant A. On fractional differentials, *Philos. Mag., VII. Ser.*, 1938, vol. 25, pp. 540–549.
24. Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S. Some Special Functions in the Solution To Cauchy Problem for a Fractional Oscillating Equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2009, no. 1(18), pp. 276–279 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu685](https://doi.org/10.14498/vsgtu685).
25. Dzhrbashyan M. M. *Integral'nye preobrazovaniia i predstavleniia funktsii v kompleksnoi oblasti* [Integral Transforms and Representation of Functions in Complex Domain]. Moscow, Nauka, 1966, 672 pp. (In Russian)
26. Ogorodnikov E. N., Radchenko V. P., Yashagin N. S. Rheological model of viscoelastic body with memory and differential equations of fractional oscillator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2011, no. 1(22), pp. 255–268 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu932](https://doi.org/10.14498/vsgtu932).
27. Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S. On some properties of operators with Mittag-Leffler type functions in kernels, *Proceedings of the Sixth All-Russian Scientific Conference with international participation* (1–4 June 2009). Part 3, Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara, Samara State Technical Univ., 2009, pp. 181–188 (In Russian).
28. Abusaitova L. G., Ogorodnikov E. N. Some special functions associated with the Mittag-Leffler function, their properties, and applications, *Nelokal'nye kraevye zadachi i problemy sovremennogo analiza i informatiki* [Non-local boundary value problems and problems of modern analysis and informatics]. Nal'chik, 2012, pp. 13–15 (In Russian).
29. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional Calculus. Integral and Differential Equations of Fractional Order, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, CISM Courses and Lectures, 378. Wien, Springer, 1997, pp. 223–276. doi: [10.1007/978-3-7091-2664-6_5](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2664-6_5).
30. Koeller R. C. Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity, *J. Appl. Mech.*, 1984, vol. 51, no. 2, pp. 299–307. doi: [10.1115/1.3167616](https://doi.org/10.1115/1.3167616).
31. Carpinteri A., Cornetti P., Sapora A. Nonlocal elasticity: an approach based on fractional calculus, *Meccanica*, 2014, vol. 49, no. 11, pp. 2551–2569. doi: [10.1007/s11012-014-0044-5](https://doi.org/10.1007/s11012-014-0044-5).
32. Bagley R. L., Torvic P. J. A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity, *J. Rheol.*, 1983, vol. 27, no. 3, pp. 201–210. doi: [10.1122/1.549724](https://doi.org/10.1122/1.549724).
33. Bagley R. L., Torvic P. J. Fractional calculus — A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures, *AIAA Journal*, 1984, vol. 21, no. 5, pp. 741–748. doi: [10.2514/3.8142](https://doi.org/10.2514/3.8142).

34. Lewandowski R., Chorążyczewski B. Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers, *Computers and Structures*, 2009, vol. 88, no. 1–2, pp. 1–17. doi: [10.1016/j.compstruc.2009.09.001](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.09.001).
35. Caputo M., Mainardi F. Linear models of dissipation in anelastic solids, *La Rivista del Nuovo Cimento*, 1971, vol. 1, no. 2, pp. 161–198. doi: [10.1007/bf02820620](https://doi.org/10.1007/bf02820620).
36. Caputo M., Mainardi F. A new dissipation model based on memory mechanism, *Pure and Applied Geophysics*, 1971, vol. 91, no. 1, pp. 134–147. doi: [10.1007/bf00879562](https://doi.org/10.1007/bf00879562).
37. Scott Blair G. W. The role of psychophysics in rheology, *Journal of Colloid Science*, 1947, vol. 2, no. 1, pp. 21–32. doi: [10.1016/0095-8522\(47\)90007-x](https://doi.org/10.1016/0095-8522(47)90007-x).
38. Scott Blair G. W. *A survey of general and applied rheology*. London, Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd., 1949, xvi+314 pp.
39. Gerasimov A. N. A generalization of linear laws of deformation and its application to internal friction problem, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1948, vol. 12, no. 3, pp. 251–260 (In Russian).
40. Barrett J. H. Differential equations of non-integer order, *Canad. J. Math.*, 1954, vol. 6, pp. 529–541. doi: [10.4153/cjm-1954-058-2](https://doi.org/10.4153/cjm-1954-058-2).
41. Ogorodnikov E. N., Abusaitova L. G. Relations definition, and initial problem for viscoelastic media with fractional Riemann–Liouville operators, *The VIII All-Russian Conference on Mechanics Mechanics of Deformable Solids*, Book of Abstracts and Conference Materials, Part 2. Cheboksary, Chuvash State Pedagogical Univ., 2014, pp. 105–107 (In Russian).
42. Abusaitova L. G., Ogorodnikov E. N. Mathematical modeling of viscoelastic fluids with memory and the problem of parametric identification of fractional rheological models, *The 4nd International Conference “Mathematical Physics and its Applications”*, Book of Abstracts and Conference Materials; ред. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, С. 40–41 (In Russian).
43. Ungarova L. G. Explicit solutions of the creep problem for some non-linear rheological models of hereditary elastic body, *The XI All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics*, Abstracts Book. Kazan’, 2015, pp. 3843–3845 (In Russian).
44. Radchenko V. P., Goludin E. P. Phenomenological stochastic isothermal creep model for an polivinyлchloride elastron, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2008, no. 1(16), pp. 45–52 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu571](https://doi.org/10.14498/vsgtu571).

Received 05/XI/2015;
 received in revised form 19/II/2016;
 accepted 26/II/2016.