Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 2. С. 220–240
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1485

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

О. Х. Абдуллаев

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Узбекистан, 100125, Ташкент, ВУЗ городок.

Аннотация

Поставлена и исследована нелокальная задача для нагруженного уравнения второго порядка эллиптико-гиперболического типа с интегральным оператором в двусвязной области. Единственность решения доказывается с помощью принципа экстремума для уравнений смешанного типа. Для использования принципа экстремума было показано, что нагруженная часть уравнения тождественно равна нулю. Существование решения задачи доказывается методом интегральных уравнений, при этом используются теория сингулярных интегральных уравнений и интегральные уравнения Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, интегральный оператор, уравнения эллиптико-гиперболического типа, двусвязная область, существование и единственность решения, принцип экстремума, интегральные уравнения.

Первые фундаментальные исследования в теории нагруженных уравнений принадлежат А. М. Нахушеву [1,2]. В этих работах даны наиболее общее определение нагруженного уравнения и подробная классификация нагруженных уравнений: нагруженных дифференциальных, интегральных, интегродифференциальных, функциональных уравнений, а также их многочисленные приложения. За этими исследованиями последовали работы А. М. Нахушева [3], В. А. Елеева и А. В. Дзарахохова [4, 5], В. М. Казиева [6, 7], И. Н. Ланина [8], Б. И. Исломова и Д. М. Курьязова [9, 10], М. И. Рамазанова [11] и К. У. Хубиева [12], посвященные краевым задачам для нагруженных уравнений гиперболического, параболического, эллиптического и смешанного типов второго порядка, в которых были получены интересные результаты.

Образец для цитирования
Абдуллаев О. Х. Нелокальная задача для нагруженного уравнения смешанного типа с интегральным оператором // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 2. С. 220–240. doi: 10.14498/vsgtu1485.

Сведения об авторе
Обиджон Хайруллаевич Абдуллаев (к.ф.-м.н., доц.; obidjon.mth@gmail.com), доцент, каф. дифференциальных уравнений и математической физики.

В работах К. Б. Сабитова и Е. П. Мелишевой [13–15] исследованы разные задачи для нагруженного уравнения смешанного типа в четырехугольных областях. Приведенные публикации позволяют сделать вывод, что вопросы теории нагруженных уравнений являются актуальными, а теория нагруженных уравнений находит свое место в приложениях и быстро развивается. Однако краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа с интегральным оператором дробного порядка в двусвязных областях до сих пор недостаточно исследованы. Отметим, что локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа в двусвязной области были исследованы в работах [16,17], в которых рассматриваются уравнения с двумя линиями изменения типа, при этом в нагруженной части участвует не дифференциальный оператор, а просто след самой функции. В настоящей работе рассматривается уравнение с одной линией изменения типа, у которого в нагруженной части присутствует дифференциальный оператор и используются нелокальные условия более общего вида.

1. Постановка задачи. В конечной двусвязной области Ω, описание которой приводится ниже, рассматривается нагруженное уравнение эллиптико-гиперболического типа

$$u_{xx} + \operatorname{sgn}(y) u_{yy} + \frac{1 - \operatorname{sgn}(y)}{2} \sum_{k=1}^{n} R_k\big(x, u(x,0)\big) = 0 \tag{1}$$

с интегральным оператором

$$R_k\big(x, u(x,0)\big) = \begin{cases} p_k(x) D_{x\,1}^{-\alpha_k} u(x,0), & q \leqslant x \leqslant 1, \\ r_k(x) D_{-1\,x}^{-\beta_k} u(x,0), & -1 \leqslant x \leqslant -q, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} D_{ax}^{-\alpha_k} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha_k}} dt, \\ D_{xb}^{-\beta_k} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\beta_k)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\beta_k}} dt, \end{aligned} \tag{2}$$

β_k, α_k — положительные константы. Область Ω при $y > 0$ ограничена следующими линиями:

$$\sigma_1 :\ x^2 + y^2 = 1, \quad \sigma_2 :\ x^2 + y^2 = q^2,$$

при $y < 0$ — следующими характеристиками уравнения (1):

$$A_j C_1 : x + (-1)^j y = (-1)^{j+1}, \quad B_j C_2 : x + (-1)^j y = (-1)^{j+1} \cdot q,$$

где $0 < q < 1$, $j = 1, 2$; $A_1(1;0)$, $A_2(-1;0)$, $B_1(q;0)$, $B_2(-q;0)$, $C_1(0;-1)$, $C_2(0;-q)$.

Введем следующие обозначения:

$$\theta_1(x) = \frac{x+1}{2} + i \cdot \frac{x-1}{2}, \quad \theta_2(x) = \frac{x-1}{2} - i \cdot \frac{x+1}{2}, \quad i^2 = -1;$$

$$\Omega_0 = \Omega \cap (y > 0), \quad \Delta_1 = \Omega \cap (x + y > q) \cap (y < 0),$$

$$\Delta_2=\Omega\cap(y-x>q)\cap(y<0),\quad D_1=\Omega\cap(-q<x+y<q)\cap(x>0),$$
$$D_2=\Omega\cap(-q<y-x<q)\cap(x<0),$$
$$D_3=\Omega\cap(-1<x+y<-q)\cap(-1<y-x<-q),$$
$$I_{2+j}=\bigl\{x:\,0<(-1)^{j-1}x<q\bigr\},\quad I_j=\Bigl\{x:\frac{q+1}{2}<(-1)^{j-1}x<1\Bigr\},\quad j=1,2.$$

В области Ω для уравнения (1) ставится и исследуется следующая нелокальная задача.

Задача I. *Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:*

1) $u(x,y)\in C(\bar\Omega)$;
2) *$u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области*
$$\Omega\backslash(y-x=\pm q)\backslash(x+y=\pm q),$$
кроме того, $u_y\in C(A_1B_1\cup A_2B_2)$, причем $u_y(x,-0)$ и $u_y(x,+0)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $x\to\pm q$, а при $x\to\pm1$ ограничены;
3) *на линиях изменения типа выполняются условия сопряжения*
$$u_y(x,+0)=\lambda_j(x)u_y(x,-0),\quad (x,0)\in A_jB_j, \tag{3}$$
4) *$u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям*
$$u(x,y)\big|_{\sigma_j}=\varphi_j(x,y),\quad (x,y)\in\overline{\sigma_j}; \tag{4}$$
$$u(x,y)\big|_{B_jC_2}=g_j(x),\quad x\in\overline{I_{2+j}};\quad j=1,2$$

$$\frac{d}{dx}u\bigl(\theta_1(x)\bigr)=a_1(x)u_y(x,0)+b_1(x)u_x(x,0)+ \\ +c_1(x)u(x,0)+d_1(x),\quad x\in(q,1), \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}u\bigl(\theta_2(x)\bigr)=a_2(x)u_y(x,0)+b_2(x)u_x(x,0)+ \\ +c_2(x)u(x,0)+d_2(x),\quad x\in(-1,-q), \tag{6}$$

где $\varphi_j(x,y)$, $\lambda_j(x)$, $g_j(x)$, $a_j(x)$, $b_j(x)$, $c_j(x)$, $d_j(x)$ $(j=1,2)$ и $p_k(x)$, $r_k(x)$ — заданные функции, причем
$$g_1(0)=g_2(0),\quad g_2(-q)=\varphi_2(-q,0),\quad g_1(q)=\varphi_2(q,0).$$

Лемма. *Общее решение уравнения (1) при $y<0$ представимо в виде*
$$u(x,y)=f_1(x+y)-f_2(x-y)+\omega(x), \tag{7}$$
где $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции,
$$\omega(x)=\begin{cases}\omega_1(x), & x\geqslant0,\\ \omega_2(x), & x\leqslant0,\end{cases}$$

причем

$$\omega_1(x) = -\int_x^1 dt \int_t^1 \sum_{k=1}^n p_k(z) D_{z\,1}^{-\alpha_k} u(z,0)dz; \tag{8}$$

$$\omega_2(x) = -\int_{-1}^x dt \int_{-1}^z \sum_{k=1}^n r_k(z) D_{-1\,z}^{-\beta_k} u(z,0)dz. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть функция (7) является решением уравнения (1), тогда, подставив (7) в (1), получим

$$\omega''(x) + \sum_{k=1}^n R_k\big(x, u(x,0)\big) = 0. \tag{10}$$

Очевидно, что функции (8) и (9) соответственно при $x \geqslant 0$ и $x \leqslant 0$ удовлетворяют уравнению (10). Теперь, наоборот, пусть $u(x,y)$ — регулярное решение уравнения (1). Докажем, что функция (7) является общим решением уравнения (1).

Нетрудно проверить, что функции (8) и (9) являются частными решениями уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} + \sum_{k=1}^n R_k\big(x, u(x,0)\big) = 0$$

соответственно при $x \geqslant 0$ и $x \leqslant 0$, а функция $f_1(x+y) - f_2(x-y)$ является общим решением уравнения $u_{xx} - u_{yy} = 0$.

Следовательно, функция (7) является общим решением уравнения (1). □

2. Единственность решения задачи I. В силу (7) и (8), (9) утверждаем, что решение задачи Коши для уравнения (1) в области Δ_j $(j = 1,2)$, удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \tau_j(x), \quad x \in \overline{A_j B_j}$$

и

$$u_y(x,-0) = \nu_j^-(x), \quad x \in A_j B_j,$$

имеет следующий вид:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\big(\tau_1(x+y) + \tau_1(x-y)\big) - \frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y} \nu_1^-(t)dt +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{x+y}^1 dt \int_t^1 \sum_{k=1}^n p_k(z) D_{z\,1}^{-\alpha_k} \tau_1(z)dz + \frac{1}{2}\int_{x-y}^1 dt \int_t^1 \sum_{k=1}^n p_k(z) D_{z\,1}^{-\alpha_k} \tau_1(z)dz -$$
$$- \int_x^1 dt \int_t^1 \sum_{k=1}^n p_k(z) D_{z\,1}^{-\alpha_k} u(z,0)dz,$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\big(\tau_2(x+y) + \tau_2(x-y)\big) - \frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y} \nu_2^-(t)dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-1}^{x+y}dt\int_{-1}^{t}\sum_{k=1}^{n}r_k(z)D_{-1\,z}^{-\beta_k}\tau_2(z)dz+\frac{1}{2}\int_{-1}^{x-y}dt\int_{-1}^{t}\sum_{k=1}^{n}r_k(z)D_{-1\,z}^{-\beta_k}\tau_2(z)dz-$$
$$-\int_{-1}^{x}dt\int_{-1}^{z}\sum_{k=1}^{n}r_k(z)D_{-1\,z}^{-\beta_k}u(z,0)dz.$$

Отсюда, учитывая, что

$$u\big(\theta_1(x)\big)=\frac{1}{2}\big(\tau_1(x)+\tau_1(1)\big)-\frac{1}{2}\int_{x}^{1}\nu_1^-(t)dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x}^{1}dt\int_{t}^{1}\sum_{k=1}^{n}p_k(z)D_{z\,1}^{-\alpha_k}\tau_1(z)dz-$$
$$-\int_{(x+1)/2}^{1}dt\int_{t}^{1}\sum_{k=1}^{n}p_k(z)D_{z\,1}^{-\alpha_k}u(z,0)dz,$$

$$u\big(\theta_2(x)\big)=\frac{1}{2}\big(\tau_2(-1)+\tau_2(x)\big)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\nu_2^-(t)dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}dt\int_{-1}^{t}\sum_{k=1}^{n}r_k(z)D_{-1\,z}^{-\beta_k}\tau_2(z)dz-$$
$$-\int_{-1}^{(x-1)/2}dt\int_{-1}^{t}\sum_{k=1}^{n}r_k(z)D_{-1\,z}^{-\beta_k}u(z,0)dz,$$

в силу условий (5) и (6) получим

$$\frac{1}{2}\tau_1'(x)+\frac{1}{2}\nu_1^-(x)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{x}^{1}p_k(z)D_{z1}^{-\alpha_k}\tau_1(z)dz+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{(x+1)/2}^{1}p_k(z)D_{z1}^{-\alpha_k}\tau_1(z)dz=$$
$$=a_1(x)\nu_1^-(x)+b_1(x)\tau_1'(x)+c_1(x)\tau_1(x)+d_1(x),$$

$$\frac{1}{2}\tau_2'(x)-\frac{1}{2}\nu_2^-(x)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{-1}^{x}r_k(z)D_{-1\,z}^{-\beta_k}\tau_2(z)dz-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{-1}^{(x-1)/2}r_k(z)D_{-1\,z}^{-\beta_k}\tau_2(z)dz=$$
$$=a_2(x)\nu_2^-(x)+b_2(x)\tau_2'(x)+c_2(x)\tau_2(x)+d_2(x).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\big(2a_1(x)-1\big)\nu_1^-(x) &= \\ &= \big(1-2b_1(x)\big)\tau_1'(x)-2c_1(x)\tau_1(x)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_x^1 p_k(z)D_{z\,1}^{-\alpha_k}\tau_1(z)dz+ \\ &+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{(x+1)/2}^1 p_k(z)D_{z\,1}^{-\alpha_k}\tau_1(z)dz-2d_1(x),\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\big(2a_2(x)+1\big)\nu_2^-(x) &= \\ &= \big(1-2b_2(x)\big)\tau_2'(x)-2c_2(x)\tau_2(x)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{-1}^x r_k(z)D_{-1\,z}^{-\beta_k}\tau_2(z)dz- \\ &-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{-1}^{(x-1)/2} r_k(z)D_{-1\,z}^{-\beta_k}\tau_2(z)dz-2d_2(x).\end{aligned} \tag{12}$$

Теорема 1. *Если β_k, $\alpha_k>0$ и выполнены условия*

$$2a_j(x)+(-1)^j>0,\quad c_j(x)\leqslant 0,\quad \lambda_j(x)>0,\quad j=1,2; \tag{13}$$

$$p_k(x)>0,\quad r_k(x)>0,\quad k=1,2,\dots,n, \tag{14}$$

то решение $u(x,y)$ задачи I *единственно.*

Доказательство. Известно, что если решение однородной задачи (т. е. решение однородного уравнения с однородными условиями) является тождественным нулем, то решение соответствующей неоднородной задачи единственно. Следовательно, достаточно показать, что решение $u(x,y)$ задачи I является тождественным нулем при $\varphi_j(x,y)\equiv d_j(x)\equiv 0$.

В силу принципа экстремума для эллиптических уравнений решение $u(x,y)$ уравнения (1) достигает своих экстремальных значений лишь на границе области $\bar\Omega_0$, т. е. на $\bar\sigma_1\cup\bar\sigma_1\cup\overline{A_1B_1}\cup\overline{A_2B_2}$.

Пусть $\varphi_j(x,y)\equiv 0$, тогда учитывая, что $u(x,y)\in C(\bar\Omega)$, имеем

$$\tau_1(1)=\varphi_1(1,0)=0\quad \text{и}\quad \tau_1(q)=\varphi_2(q,0)=0.$$

Далее предположим, что функция $\tau_1(x)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке интервала $(q,1)$, т. е. предположим, что x_i $(i=\overline{1,m})$ — нули функции $\tau_1(x)$.

Рассмотрим отрезок $[x_1,x_2]\subset\overline{A_1B_1}$. Так как $\tau_1(x_1)=\tau_1(x_2)=0$, функция $\tau_1(x)>0$ или $\tau_1(x)<0$ для всех $x\in(x_1,x_2)$.

Предположим $\tau_1(x)>0$ $(\tau_1(x)<0)$, тогда можно показать, что внутри этого интервала функция $\tau_1(x)$ не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума). Действительно, если в точке $x_0\in(x_1,x_2)$ функция $\tau_1(x)$ достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума), то из (11) при $d_1(x)\equiv 0$ получим

$$\begin{gathered}\big(2a_1(x_0)-1\big)\nu_1^-(x_0)=-2c_1(x_0)\tau_1(x_0)+\\ +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\bigg(\int_{(x_0+1)/2}^{1}p_k(z)D_{z\,1}^{-\alpha_k}\tau_1(z)dz-\int_{x_0}^{1}p_k(z)D_{z\,1}^{-\alpha_k}\tau_1(z)dz\bigg).\end{gathered}$$

Отсюда, учитывая, что $D_{x\,1}^{-\alpha_k}\tau_1(x)>0$ $(D_{x\,1}^{-\alpha_k}\tau_1(x)<0)$ при $\tau_1(x)>0$ $(\tau_1(x)<0)$, в силу (13) (при $j=1$), (14) получим, что $\nu_1^-(x_0)\geqslant 0$ $\big(\nu_1^-(x_0)\leqslant 0\big)$, а это в силу (3) (учитывая, что $\lambda_j(x)>0$) противоречит известному принципу Заремба—Жиро [19], согласно которому в точке положительного максимума (отрицательного минимума) должно выполняться условие $\nu_1(x_0)<0$ $(\nu_1(x_0)>0)$. Следовательно, $\tau_1(x)$ не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) в точке $x_0\in(x_1,x_2)$.

Таким образом,

$$\tau_1(x)=0\quad\forall x\in[x_1,x_2]. \tag{15}$$

Аналогично вышеизложенным методом доказывается, что $\tau_1(x)$ не достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума и в других интервалах, т. е.

$$\tau_1(x)=0. \tag{16}$$

Если $x_1=q$, т. е.

$$\tau(x_1)=\tau_1(q)=\varphi_2(q,0)=0,$$

то из (15) и (16) следует, что $\tau_1(x)=0$ $\forall x\in A_1B_1$, а при $x_1\neq q$ функция $\tau_1(x)$ не может иметь экстремума в интервале (q,x_1), т. е. функция $\tau_1(x)$ либо знакопостоянна в (q,x_1), либо $\tau_1(x)=0$ $\forall x\in[q,x_1]$.

Предположим, что функция $\tau_1(x)$ знакопостоянна в $(q,\,x_1)$, тогда, принимая во внимание, что $\tau_1(x_1)=\tau_1(q)=0$, заключаем, что

$$\tau_1(x)=0\quad\forall x\in[q,x_1]. \tag{17}$$

Точно так же, если $x_m=1$, т. е.

$$\tau_1(x_m)=\tau_1(1)=\varphi_1(1,0)=0,$$

то из (15) и (16) следует, что $\tau_1(x)=0$ $\forall x\in A_1B_1$, а при $x_m\neq 1$ функция $\tau_1(x)$ не может иметь экстремума в интервале $(x_m,1)$, т. е. функция $\tau_1(x)$ либо знакопостоянна в $x_m\neq 1$, либо $\tau_1(x)=0$ $\forall x\in[x_m,1]$.

Предположим, что функция $\tau_1(x)$ знакопостоянна в $(x_m,1)$, тогда, принимая во внимание, что

$$\tau_1(x_m)=\tau_1(1)=0,$$

заключаем, что

$$\tau_1(x)=0\quad\forall x\in[x_m,1]. \tag{18}$$

В силу (16) и (17), (18) имеем $\tau_1(x)=0$ $\forall x\in[q,1]$. Аналогичным образом доказывается, что $\tau_2(x)=0$ $\forall x\in A_2B_2$.

Таким образом, показано, что $\tau_j(x)\equiv 0$ $\forall x\in\overline{A_jB_j}$ при $\varphi_j(x,y)\equiv d_j(x)\equiv 0$ $(j=1,2)$. Кроме этого, показано, что решение $u(x,y)$ не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) в интервалах (A_1,B_1)

и (A_2, B_2). Следовательно, учитывая, что $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}_0\right)$, на основании краевых условий (4) при $\varphi_j(x,y) \equiv 0$ $(j=1,2)$ имеем, что $u(x,y) \equiv 0$ в замкнутой области $\overline{\Omega}_0$.

В силу того, что $\tau_1(x) \equiv \tau_2(x) \equiv 0$, из функциональных соотношений (11) и (12) получим, что $\nu_1(x) \equiv \nu_2(x) \equiv 0$. Следовательно, решение задачи Коши для уравнения (1) в области Δ_j тождественно равно нулю, т. е. $u(x,y) \equiv 0$ в областях Δ_j. В силу единственности решения задачи Гурса имеем, что $u(x,y) \equiv 0$ в областях D_j $(j=1,2,3)$. Таким образом, $u(x,y) \equiv 0$ в области $\overline{\Omega}$ и тем самым доказана единственность решения задачи I. □

3. Существование решения задачи I.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1 и условия*

$$\varphi_j(x,y) = (xy)^{\gamma}\overline{\varphi_j}(x,y), \quad \overline{\varphi_j}(x,y) \in C\left(\overline{\sigma_j}\right), \ \ 2 < \gamma < 3, \tag{19}$$

$$a_j(x),\ b_j(x),\ c_j(x),\ d_j(x),\ \lambda_j(x) \in C\left(\overline{I_j}\right) \cap C^2\left(I_j\right), \tag{20}$$

то решение задачи I существует.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются следующие соотношения, которые получаются из (11) и (12) в силу (2):

$$\begin{gathered}\big(1-2b_1(x)\big)\tau_1'(x) - 2c_1(x)\tau_1(x) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_x^1 p_k(z)dz\int_z^1 (t-z)^{\alpha_k-1}\tau_1(t)dt = \big(2a_1(x)-1\big)\nu_1^-(x) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{(x+1)/2}^1 p_k(z)dz\int_z^1 (t-z)^{\alpha_k-1}\tau_1(t)dt + 2d_1(x),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\big(1-2b_2(x)\big)\tau_2'(x) - 2c_2(x)\tau_2(x) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\beta_k)}\int_{-1}^x r_k(z)dz\int_{-1}^z (z-t)^{\beta_k-1}\tau_2(t)dt = \big(2a_2(x)+1\big)\nu_2^-(x) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\beta_k)}\int_{-1}^{(x-1)/2} r_k(z)dz\int_{-1}^z (z-t)^{\beta_k-1}\tau_2(t)dt + 2d_2(x),\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}\big(1-2b_1(x)\big)\tau_1'(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha_k)}\int_x^1 p_k(z)dz\int_z^1 (t-z)^{\alpha_k}\tau_1'(t)dt - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha_k)}\int_{(x+1)/2}^1 p_k(z)dz\int_z^1 (t-z)^{\alpha_k}\tau_1'(t)dt + 2c_1(x)\int_x^1 \tau_1'(t)dt = \\ = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\tau_1(1)}{\Gamma(1+\alpha_k)}\int_x^1 p_k(z)(1-z)^{\alpha_k}dz - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\tau_1(1)}{\Gamma(1+\alpha_k)}\int_{(x+1)/2}^1 (1-z)^{\alpha_k}p_k(z)dz +\end{gathered}$$

$$+ 2c_1(x)\tau_1(1) + 2d_1(x) + \big(2a_1(x) - 1\big)\nu_1^-(x), \quad (21)$$

$$\big(1 - 2b_2(x)\big)\tau_2'(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(1+\beta_k)}\int_{-1}^{x} r_k(z)dz\int_{-1}^{z}(z-t)^{\beta_k}\tau_2'(t)dt-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(1+\beta_k)}\int_{-1}^{(x-1)/2} r_k(z)dz\int_{-1}^{z}(z-t)^{\beta_k}\tau_2'(t)dt - 2c_2(x)\int_{-1}^{x}\tau_2'(t)dt =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\tau_2(-1)}{\Gamma(1+\beta_k)}\int_{-1}^{(x-1)/2}(z+1)^{\beta_k} r_k(z)dz-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\tau_2(-1)}{\Gamma(1+\beta_k)}\int_{-1}^{x} r_k(z)(z+1)^{\beta_k}dz-$$
$$- 2c_2(x)\tau_2(-1) + \big(2a_2(x) + 1\big)\nu_2^-(x) + 2d_2(x). \quad (22)$$

4. Основные функциональные соотношения. При исследовании существования решения поставленной задачи рассматриваются следующие случаи.

`Случай A.` Пусть $b_j(x) \neq -1/2$, тогда из (21) и (22) получим интегральные уравнения Вольтерры второго рода относительно $\tau_j'(x)$:

$$\tau_1'(x) + \int_{x}^{1}\tau_1'(t)K_{11}(x,t)dt+$$
$$+ \int_{(x+1)/2}^{1}\tau_1'(t)K_{12}(x,t)dt = f_1(x), \quad q \leqslant x \leqslant 1, \quad (23)$$

$$\tau_2'(x) + \int_{-1}^{x}\tau_2'(t)K_{21}(x,t)dt+$$
$$+ \int_{-1}^{(x-1)/2}\tau_2'(t)K_{22}(x,t)dt = f_2(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant -q, \quad (24)$$

где

$$K_{11}(x,t) = \frac{2c_1(x)}{1-2b_1(x)} + \frac{1}{2\,(1-2b_1(x))}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha_k)}\int_{x}^{t}(t-z)^{\alpha_k}p_k(z)dz, \quad (25)$$

$$K_{12}(x,t) = -\frac{1}{2\,(1-2b_1(x))}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha_k)}\int_{(x+1)/2}^{t}(t-z)^{\alpha_k}p_k(z)dz, \quad (26)$$

$$K_{21}(x,t) = \frac{2c_2(x)}{2b_2(x)-1} + \frac{1}{2\,(1-2b_2(x))}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(1+\beta_k)}\int_{t}^{x}(z-t)^{\beta_k}r_k(z)dz, \quad (27)$$

$$K_{22}(x,t) = -\frac{1}{2\,(1-2b_2(x))}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(1+\beta_k)}\int_{t}^{(x-1)/2}(z-t)^{\beta_k}r_k(z)dz, \quad (28)$$

$$f_1(x)=\frac{2a_1(x)-1}{1-2b_1(x)}\nu_1^-(x)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_1(1,0)}{\Gamma(1+\alpha_k)}\int_{(x+1)/2}^{1}\frac{p_k(z)(1-z)^{\alpha_k}}{1-2b_1(x)}dz+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_1(1,0)}{\Gamma(1+\alpha_k)}\int_{x}^{1}\frac{p_k(z)(1-z)^{\alpha_k}}{1-2b_1(x)}dz+\frac{2(d_1(x)+c_1(x)\varphi_1(1,0))}{1-2b_1(x)},\quad(29)$$

$$f_2(x)=\frac{2a_2(x)+1}{1-2b_2(x)}\nu_2^-(x)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_1(-1,0)}{\Gamma(1+\beta_k)}\int_{-1}^{(x-1)/2}\frac{r_k(z)(1+z)^{\beta_k}}{1-2b_2(x)}dz-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_1(-1,0)}{\Gamma(1+\beta_k)}\int_{-1}^{x}\frac{r_k(z)(1+z)^{\beta_k}}{1-2b_2(x)}dz+\frac{2(d_2(x)-c_2(x)\varphi_1(-1,0))}{1-2b_2(x)}.\quad(30)$$

Учитывая, что $b_j(x)\neq 1/2$, в силу (19), (20) из (25), (26), (27) и (28) получим

$$|K_{1j}(x,t)|\leqslant c_1,\quad |K_{2j}(x,t)|\leqslant c_2,\quad j=1,2.$$

Учитывая класс функций $\nu_j^-(x)$, в силу (19), (20) из (29) и (30) получим (см. [18])

$$|f_j(x)|\leqslant \mathrm{const}\cdot\big(x+(-1)^j q\big)^{-\varepsilon},\quad 0\leqslant\varepsilon<1,\quad j=1,2.$$

Заметим, что интегральные уравнения (23) и (24) можно переписать в следующем виде:

$$\tau_1'(x)+\int_x^1\tau_1'(t)K_1(x,t)dt=f_1(x),$$
$$\tau_2'(x)+\int_{-1}^x\tau_2'(t)K_2(x,t)dt=f_2(x),$$

где

$$K_1(x,t)=\begin{cases}K_{11}(x,t), & x\leqslant t\leqslant(x+1)/2,\\ K_{11}(x,t)+K_{12}(x,t), & (x+1)/2\leqslant t\leqslant 1;\end{cases}$$

$$K_2(x,t)=\begin{cases}K_{22}(x,t), & (x-1)/2\leqslant t\leqslant x;\\ K_{21}(x,t)+K_{22}(x,t), & -1\leqslant t\leqslant(x-1)/2.\end{cases}$$

Разрешая интегральные уравнения (23) и (24) методом последовательных приближений, находим

$$\tau_1'(x)=\frac{2a_1(x)-1}{1-2b_1(x)}\nu_1^-(x)+\int_x^1\frac{2a_1(t)-1}{1-2b_1(t)}\Re_{11}(x,t)\nu_1^-(t)dt+$$
$$+\int_{(x+1)/2}^1\frac{2a_1(t)-1}{1-2b_1(t)}\Re_{12}(x,t)\nu_1^-(t)dt+F_{11}(x),\quad(31)$$

$$\tau_2'(x)=\frac{2a_2(x)+1}{1-2b_2(x)}\nu_2^-(x)+\int_{-1}^x\frac{2a_2(t)+1}{1-2b_2(t)}\Re_{21}(x,t)\nu_2^-(x)dt+$$

$$+\int_{-1}^{(x-1)/2}\frac{2a_2(t)+1}{1-2b_2(t)}\Re_{22}(x,t)\nu_2^-(x)dt+F_{12}(x), \quad (32)$$

где $F_{11}(x)$ и $F_{12}(x)$ — известные функции, которые зависят от заданных функций $\varphi_j(x,y)$, $g_j(x)$, $a_j(x)$, $b_j(x)$, $c_j(x)$, $d_j(x)$ $(j=1,2)$ и $p_k(x)$, $r_k(x)$, а $\Re_{1j}(x,t)$ и $\Re_{2j}(x,t)$ — резольвенты ядер $K_{1j}(x,t)$ и $K_{1j}(x,t)$ соответственно, причем

$$|\Re_{\sigma j}(x,t)|\leqslant \text{const}, \quad -1\leqslant(-1)^\sigma t\leqslant(-1)^\sigma x\leqslant -q, \quad \sigma=1,2;\ j=1,2;$$

$$|F_{1j}(x)|\leqslant \text{const}, \quad -1\leqslant(-1)^j x\leqslant -q, \quad j=1,2.$$

`Случай B.` Пусть $b_j(x)\equiv -1/2$ и $c_j(x)\neq 0$ $(j=1,2)$, тогда из (11) и (12) получим интегральные уравнения Вольтерры второго рода относительно $\tau_j(x)$:

$$\tau_1(x)+\int_x^1\bar{K}_{11}(x,t)\tau_1(t)dt+\int_{(x+1)/2}^1\bar{K}_{12}(x,t)\tau_1(t)dt=$$
$$=\frac{1-2a_1(x)}{2c_1(x)}\nu_1^-(x)-\frac{d_1(x)}{c_1(x)}, \quad (33)$$

$$\tau_2(x)+\int_{-1}^x\bar{K}_{21}(x,t)\tau_2(t)dt+\int_{-1}^{(x-1)/2}\bar{K}_{22}(x,t)\tau_2(t)dt=$$
$$=-\frac{2a_2(x)+1}{c_2(x)}\nu_2^-(x)-\frac{d_2(x)}{c_2(x)}, \quad (34)$$

где

$$\bar{K}_{11}(x,t)=\int_x^t\sum_{k=1}^n\frac{(t-z)^{\alpha_k-1}}{4c_1(x)\Gamma(\alpha_k)}p_k(z)dz,$$

$$\bar{K}_{12}(x,t)=-\int_{(x+1)/2}^t\sum_{k=1}^n\frac{(t-z)^{\alpha_k-1}}{4c_1(x)\Gamma(\alpha_k)}p_k(z)dz,$$

$$\bar{K}_{21}(x,y)=-\int_t^x\sum_{k=1}^n\frac{(z-t)^{\beta_k-1}}{4c_2(x)\Gamma(\beta_k)}r_k(z)dz,$$

$$\bar{K}_{22}(x,t)=\int_t^{(x-1)/2}\sum_{k=1}^n\frac{(z-t)^{\beta_k-1}}{4c_2(x)\Gamma(\beta_k)}r_k(z)dz,$$

причём

$$|\bar{K}_{\sigma j}(x,t)|\leqslant \text{const}, \quad -1\leqslant(-1)^\sigma t\leqslant(-1)^\sigma x\leqslant -q, \quad \sigma=1,2.$$

Разрешая интегральные уравнения (33) и (34), находим $\tau_j(x)$:

$$\tau_1(x)=\frac{1-2a_1(x)}{2c_1(x)}\nu_1^-(x)+\int_x^1\frac{1-2a_1(t)}{2c_1(t)}\bar{\Re}_{11}(x,t)\nu_1^-(t)dt+$$

$$+\int_{(x+1)/2}^{1}\frac{1-2a_1(t)}{2c_1(t)}\bar{\Re}_{12}(x,t)\nu_1^-(t)dt+F_{21}(x), \quad (35)$$

$$\tau_2(x)=-\frac{2a_2(x)+1}{c_2(x)}\nu_2^-(x)+\int_{-1}^{x}\frac{2a_2(t)+1}{c_2(t)}\bar{\Re}_{21}(x,t)\nu_2^-(x)dt+$$
$$+\int_{-1}^{(x-1)/2}\frac{2a_2(t)+1}{c_2(t)}\bar{\Re}_{22}(x,t)\nu_2^-(x)dt+F_{22}(x), \quad (36)$$

где $F_{21}(x)$ и $F_{22}(x)$ — известные функции, которые зависят от заданных функций, а $\bar{\Re}_{1j}(x,t)$ и $\bar{\Re}_{2j}(x,t)$ — резольвенты ядер $\bar{K}_{1j}(x,t)$ и $\bar{K}_{2j}(x,t)$ соответственно, причем

$$|\bar{\Re}_{1j}(x,t)|\leqslant \text{const}, \quad |\bar{\Re}_{2j}(x,t)|\leqslant \text{const}, \quad |F_{2j}(x)|\leqslant \text{const}, \quad j=1,2.$$

`Случай C.` Пусть $b_j(x)\equiv -1/2$ и $c_j(x)\equiv 0$ $(j=1,2)$, тогда из (11) и (12) получим

$$\nu_1^-(x)=\int_{(x+1)/2}^{1}\tau_1(t)dt\int_{(x+1)/2}^{t}\sum_{k=1}^{n}\frac{(t-z)^{\alpha_k-1}}{2\Gamma(\alpha_k)\,(2a_1(x)-1)}p_k(z)dz-$$
$$-\int_{x}^{1}\tau_1(t)dt\int_{x}^{t}\sum_{k=1}^{n}\frac{(t-z)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)\,(2a_1(x)-1)}p_k(z)dz-\frac{2d_1(x)}{2a_1(x)-1},$$

$$\nu_2^-(x)=\int_{-1}^{x}\tau_2(t)dt\int_{t}^{x}\sum_{k=1}^{n}\frac{(z-t)^{\beta_k-1}}{2(2a_2(x)+1)\Gamma(\beta_k)}r_k(z)dz-$$
$$-\int_{-1}^{(x-1)/2}\tau_2(t)dt\int_{t}^{(x-1)/2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(z-t)^{\beta_k-1}}{2(2a_2(x)+1)\Gamma(\beta_k)}r_k(z)dz-\frac{2d_2(x)}{2a_2(x)+1}.$$

Заметим, что решение задачи Неймана для уравнения (1) в области Ω_0 с краевыми условиями (4) и

$$u_y(x,+0)=\nu_1^+(x), \quad (x,0)\in A_1B_1,$$
$$u_y(x,+0)=\nu_2^+(x), \quad (x,0)\in A_2B_2$$

единственно и представимо в виде [18]:

$$u(x,y)=\int_{\sigma_1}\varphi_1(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,y)dS-\int_{\sigma_2}\varphi_2(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,y)dS+$$
$$-\int_{q}^{1}\nu_1^+(t)G(t,0;x,y)dt+\int_{-1}^{-q}\nu_2^+(t)G(t,0;x,y)dt, \quad (37)$$

где

$$G(\xi,\eta;x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\theta_1\left(\frac{\ln v+\ln\overline{\mu}}{2\pi ir}\right)\theta_1\left(\frac{\ln\overline{v}+\ln\overline{\mu}}{2\pi ir}\right)}{\theta_1\left(\frac{\ln v-\ln\mu}{2\pi ir}\right)\theta_1\left(\frac{\ln\overline{v}-\ln\mu}{2\pi ir}\right)}\right|$$

— функция Грина задачи Неймана для уравнения $u_{xx}+u_{yy}=0$ в области Ω_0 [18]. Здесь $v=\xi+i\eta$, $\overline{v}=\xi-i\eta$, $\mu=x+iy$, $\overline{\mu}=x-iy$, $r=\frac{1}{\pi i}\ln q$, $i^2=-1$, $\theta_1(\xi)$ — тета-функция. Из (37) при $y=0$ находим функциональные соотношения между $\tau_1^+(x)$ и $\nu_1^+(x)$ на интервалах A_1B_1 и A_2B_2, принесенные из области Ω_0:

$$\tau_1^+(x)=F_1(x)-\int_q^1\nu_1^+(t)G(t,0;x,0)dt+ \\ +\int_{-1}^{-q}\nu_2^+(t)G(t,0;x,0)dt,\quad q\leqslant x\leqslant 1,\qquad(38)$$

$$\tau_2^+(x)=F_1(x)-\int_q^1\nu_1^+(t)G(t,0;x,0)dt+ \\ +\int_{-1}^{-q}\nu_2^+(t)G(t,0;x,0)dt,\quad -1\leqslant x\leqslant -q.\qquad(39)$$

Здесь

$$F_j(x)=\int_{\sigma_1}\varphi_1(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,0)dS-\int_{\sigma_2}\varphi_2(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,0)dS.$$

5. Исследование интегральных уравнений. В случае A дифференцированием (38) и (39) по x получим

$$\tau_j'(x)=\int_{-1}^{-q}\nu_2^+(t)\frac{\partial G(t,0;x,0)}{\partial x}dt-\int_q^1\nu_1^+(t)\frac{\partial G(t,0;x,0)}{\partial x}dt+F_j'(x).\qquad(40)$$

Исключая $\tau_j'(x)$ $(j=1,2)$ из соотношений (31), (32) и (40) с учетом условия сопряжения (3), получим систему интегральных уравнений

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{2a_1(x)-1}{1-2b_1(x)}\nu_1^-(x)+\frac{1}{\pi}\int_q^1\nu_1^-(t)K_1(x,t)dt+ \\ &+\int_x^1\frac{2a_1(t)-1}{1-2b_1(t)}\Re_{11}(x,t)\nu_1^-(t)dt+\int_{(x+1)/2}^1\frac{2a_1(t)-1}{1-2b_1(t)}\Re_{12}(x,t)\nu_1^-(t)dt= \\ &\qquad=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-q}\nu_2^-(t)K_2(x,t)dt+F_1'(x)-F_{11}(x), \\ &\frac{2a_2(x)+1}{1-2b_2(x)}\nu_2^-(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-q}\nu_2^-(t)K_2(x,t)dt+ \\ &+\int_{-1}^x\frac{2a_2(t)+1}{1-2b_2(t)}\Re_{21}(x,t)\nu_2^-(t)dt+\int_{-1}^{(x-1)/2}\frac{2a_2(t)+1}{1-2b_2(t)}\Re_{22}(x,t)\nu_2^-(t)dt= \\ &\qquad=-\frac{1}{\pi}\int_q^1\nu_1^-(t)K_1(x,t)dt+F_2'(x)-F_{12}(x),\end{aligned}\right.\qquad(41)$$

где

$$K_j(x,t) = \frac{2\ln|t|}{x\lambda_j(t)\ln q} + \frac{1}{\pi\lambda_j(t)}\Big(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx}\Big) +$$
$$+ \frac{1}{\pi\lambda_j(t)}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{q^{2n}}{t-q^{2n}x} - \frac{q^{2n}t}{1-q^{2n}tx} - \frac{q^{-2n}t}{1-q^{-2n}tx} + \frac{q^{-2n}}{t-q^{2n}x}\Big).$$

Учитывая (13), систему (41) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\nu_1^-(x) + \int_q^1 K_{31}(x,t)\nu_1^-(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-q}\nu_2^-(t)K_2(x,t)dt + F_1^*(x),\\ &\nu_2^-(t) + \int_{-1}^{-q} K_{32}(x,t)\nu_2^-(t)dt = -\frac{1}{\pi}\int_q^1 \nu_1^-(t)K_1(x,t)dt + F_2^*(x), \end{aligned} \tag{42}$$

где

$$F_1^*(x) = \frac{1-2b_1(x)}{2a_1(x)-1}\left(F_1'(x) - F_{11}(x)\right),$$

$$F_2^*(x) = \frac{1-2b_2(x)}{2a_2(x)+1}\left(F_2'(x) - F_{12}(x)\right);$$

$$K_{31}(x,t) = \begin{cases} \frac{1-2b_1(x)}{2a_1(x)-1}\Big(\frac{2a_1(t)-1}{1-2b_1(t)}\big(\Re_{11}(x,t) + \Re_{12}(x,t)\big) + \\ \qquad\qquad + \frac{1}{\pi}K_1(x,t)\Big), & (x+1)/2 \leqslant t \leqslant 1;\\ \frac{1-2b_1(x)}{2a_1(x)-1}\Big(\frac{2a_1(t)-1}{1-2b_1(t)}\Re_{11}(x,t) + \frac{1}{\pi}K_1(x,t)\Big), & x \leqslant t \leqslant (x+1)/2;\\ \frac{1}{\pi}\frac{1-2b_1(x)}{2a_1(x)-1}K_1(x,t), & q \leqslant t \leqslant x; \end{cases}$$

$$K_{32}(x,t) = \begin{cases} \frac{1-2b_2(x)}{2a_2(x)+1}\Big(\frac{2a_2(t)+1}{1-2b_2(t)}\big(\Re_{21}(x,t) + \Re_{22}(x,t)\big) - \\ \qquad\qquad - \frac{1}{\pi}K_2(x,t)\Big), & -1 \leqslant t \leqslant (x-1)/2;\\ \frac{1-2b_2(x)}{2a_2(x)+1}\Big(\frac{2a_1(t)+1}{1-2b_2(t)}\Re_{21}(x,t) - K_2(x,t)\Big), & (x-1)/2 \leqslant t \leqslant x;\\ \frac{-1}{\pi}\frac{1-2b_2(x)}{2a_1(x)+1}\cdot K_2(x,t), & x \leqslant t \leqslant -q. \end{cases}$$

Заметим, что каждое уравнение системы (42) является сингулярным интегральным уравнением нормального типа, индекс которого равен нулю. Точно так же, как и в работах [17, 18], эта система известным методом Карлемана—Векуа [20] сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, разрешимость которой следует из единственности решения задачи I.

Разрешая первое уравнение системы (42), находим

$$\nu_1^-(x) = F_1^*(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-q}\nu_2^-(t)K_2(x,t)dt +$$
$$+ \int_q^1\left(F_1^*(t) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-q}\nu_2^-(z)K_2(t,z)dz\right)\Re_{31}(x,t)dt,$$

т.е.

$$\nu_1^-(x) = F_1^*(x) + \int_q^1 F_1^*(t)\Re_{31}(x,t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-q}\nu_2^-(z)K_2^*(x,z)dz, \tag{43}$$

где $\Re_{31}(x,t)$ — резольвента ядра $K_{31}(x,t)$, а

$$K_2^*(x,t) = K_2(x,t) + \int_q^1 K_2(x,t)R_{31}(x,t)dt,$$

причем

$$|\Re_{31}(x,t)| \leqslant \text{const}, \quad |K_2^*(x,t)| \leqslant \text{const}.$$

Подставляя найденные значение $\nu_1(x)$, т. е. (43) во второе уравнение системы (42), получим интегральное уравнение относительно $\nu_2^-(x)$:

$$\nu_2^-(x) + \int_{-1}^{-q} \nu_2^-(t)K_2^*(x,t)dt = \bar{F}_2^*(x),$$

где

$$\bar{F}_2^*(x) = F_2^*(x) - \frac{1}{\pi}\int_q^1 F_1^*(t)K_1(x,t)dt - \frac{1}{\pi}\int_q^1 K_1(x,t)dt\int_q^1 F_1^*(z)\Re_{31}(t,z)dz,$$

$$K_1^*(x,z) = K_{32}(x,z) + \frac{1}{\pi^2}\int_q^1 K_1(x,t)K_2^*(t,z)dt,$$

причем

$$|\bar{F}_2^*(x)| \leqslant \text{const}, \quad |K_1^*(x,t)| \leqslant \text{const}.$$

После того как найдены $\nu_j^-(x)$, из (31), (32) и (3) находим $\tau_j(x)$ и $\nu_j^+(x)$. Следовательно, решение задачи I можно восстановить в области Ω_0 как решение задачи Неймана (37), в областях Δ_j $(j = 1,2)$ — как решение задачи Коши—Гурса, а в областях D_j $(j = 1,2,3)$ — как решение задачи Гурса [18]. Итак, для случая A теорема 2 доказана.

В случае B исключим $\tau_j(x)$ из (35), (36), (38) и (39) с учетом условия сопряжения:

$$\begin{aligned}
&\frac{1-2a_1(x)}{2c_1(x)}\nu_1^-(x) + \frac{1}{\pi}\int_q^1 \nu_1^-(t)\tilde{K}_1(x,t)dt + \\
&+\int_x^1 \frac{1-2a_1(t)}{2c_1(t)}\bar{\Re}_{11}(x,t)\nu_1^-(t)dt + \int_{(x+1)/2}^1 \frac{1-2a_1(t)}{2c_1(t)}\bar{\Re}_{12}(x,t)\nu_1^-(t)dt = \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-q}\nu_2^-(t)\tilde{K}_2(x,t)dt + F_1(x) - F_{21}(x),\\
&\frac{2a_2(x)+1}{c_2(x)}\nu_2^-(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-q}\nu_2^-(t)\tilde{K}_2(x,t)dt - \\
&-\int_{-1}^{x}\frac{2a_2(t)+1}{c_2(t)}\bar{\Re}_{21}(x,t)\nu_2^-(x)dt - \int_{-1}^{(x-1)/2}\frac{2a_2(t)+1}{c_2(t)}\bar{\Re}_{22}(x,t)\nu_2^-(x)dt = \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{\pi}\int_q^1 \nu_1^-(t)\tilde{K}_1(x,t)dt + F_{22}(x) - F_2(x).
\end{aligned} \tag{44}$$

Здесь

$$\tilde{K}_j(x,t) = \frac{G(x,0;t,0)}{\lambda_j(t)} = \frac{\ln x \ln t}{\lambda_j(t)\ln q} + \\ + \frac{1}{\pi\lambda_j(t)}\left(\ln\left|\frac{1-tx}{t-x}\right| + \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|\frac{1-q^{2n}tx}{t-q^{2n}x}\cdot\frac{q^{2n}-tx}{q^{2n}t-x}\right|\right).$$

Как и в случае A, учитывая, что

$$2a_j(x) + (-1)^j > 0,$$

систему (44) перепишем в виде

$$\begin{aligned} &\nu_1^-(x) + \int_q^1 K_{41}(x,t)\nu_1^-(t)dt = \\ &\qquad = \frac{1}{\pi}\frac{2c_1(x)}{1-2a_1(x)}\int_{-1}^{-q}\nu_2^-(t)\tilde{K}_2(x,t)dt + F_3^*(x), \\ &\nu_2^-(t) + \int_{-1}^{-q} K_{42}(x,t)\nu_2^-(t)dt = \\ &\qquad = \frac{1}{\pi}\frac{2c_2(x)}{1+2a_2(x)}\int_q^1\nu_1^-(t)\tilde{K}_1(x,t)dt + F_4^*(x), \end{aligned} \tag{45}$$

где

$$F_3^*(x) = \frac{2c_1(x)}{1-2a_1(x)}\big(F_1(x) - F_{11}(x)\big),$$

$$F_4^*(x) = \frac{2c_2(x)}{2a_2(x)+1}\big(F_{22}(x) - F_2(x)\big);$$

$$K_{41}(x,t) = \begin{cases} \frac{2c_1(x)}{1-2a_1(x)}\Big(\frac{1-2a_1(t)}{2c_1(t)}\big(\bar{\Re}_{11}(x,t) + \bar{\Re}_{12}(x,t)\big) + \\ \qquad\qquad + \frac{1}{\pi}\tilde{K}_1(x,t)\Big), & (x+1)/2 \leqslant t \leqslant 1; \\ \frac{2c_1(x)}{1-2a_1(x)}\Big(\frac{1-2a_1(t)}{2c_1(t)}\Re_{11}(x,t) + \frac{1}{\pi}\tilde{K}_1(x,t)\Big), & x \leqslant t \leqslant (x+1)/2; \\ \frac{1}{\pi}\frac{2c_1(x)}{1-2a_1(x)}\tilde{K}_1(x,t), & q \leqslant t \leqslant x; \end{cases}$$

$$K_{42}(x,t) = \begin{cases} \frac{2c_2(x)}{1+2a_2(x)}\Big(\frac{1}{\pi}\tilde{K}_2(x,t) - \\ \qquad - \frac{1+2a_2(t)}{2c_2(t)}\big(\bar{\Re}_{21}(x,t) + \bar{\Re}_{22}(x,t)\big)\Big), & -1 \leqslant t \leqslant (x-1)/2; \\ \frac{2c_2(x)}{1+2a_2(x)}\Big(\frac{1}{\pi}\tilde{K}_2(x,t) - \frac{1+2a_2(t)}{2c_2(t)}\bar{\Re}_{21}(x,t)\Big), & (x-1)/2 \leqslant t \leqslant x; \\ \frac{1}{\pi}\frac{2c_2(x)}{1+2a_2(x)}\tilde{K}_1(x,t), & x \leqslant t \leqslant -q. \end{cases}$$

Очевидно, что система (45) является системой интегральных уравнений Фредгольма второго рода, разрешимость которой следует из единственности решения задачи I. Теорема 2 далее доказывается, как в случае A.

В случае C подставим (11), (12) в (38) и (39) соответственно и с учетом условия (3) получим

$$\tau_j(x)=\int_q^1\tau_1(z)dz\int_q^z\lambda_1(t)G(t,0;x,0)dt\int_t^z\sum_{k=1}^n\frac{(z-s)^{\alpha_k-1}}{2\Gamma(\alpha_k)\left(2a_1(z)-1\right)}p_k(s)ds-$$
$$-\int_{(q+1)/2}^1\tau_1(z)dz\int_q^{2z-1}\lambda_1(t)G(t,0;x,0)dt\times$$
$$\times\int_{(t+1)/2}^z\sum_{k=1}^n\frac{(z-s)^{\alpha_k-1}}{2\Gamma(\alpha_k)\left(2a_1(z)-1\right)}p_k(s)ds+$$
$$+\int_{-1}^{-q}\tau_2(z)dz\int_z^{-q}\lambda_2(t)G(t,0;x,0)dt\int_z^t\sum_{k=1}^n\frac{(s-z)^{\beta_k-1}}{2(2a_2(t)+1)\Gamma(\beta_k)}r_k(s)ds-$$
$$-\int_{-1}^{-(q+1)/2}\tau_2(z)dz\int_{2z+1}^{-q}\lambda_2(t)G(t,0;x,0)dt\times$$
$$\times\int_z^{(t-1)/2}\sum_{k=1}^n\frac{(s-z)^{\beta_k-1}}{2(2a_2(t)+1)\Gamma(\beta_k)}r_k(s)ds+\tilde F_j(x).$$

Далее после некоторых упрощений получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно $\tau_j(x)$:

$$\begin{aligned}\tau_1(x)&=\int_q^1\tau_1(z)K_{51}(x,z)dz+\\&\qquad+\int_{-1}^{-q}\tau_2(z)K_{52}(x,z)dz+\tilde F_1(x),\quad q\leqslant x\leqslant 1,\\\tau_2(x)&=\int_{-1}^{-q}\tau_2(z)K_{52}(x,z)dz+\\&\qquad+\int_q^1\tau_1(z)K_{51}(x,z)dz+\tilde F_2(x),\quad -1\leqslant x\leqslant -q.\end{aligned}\tag{46}$$

Здесь

$$K_{51}(x,z)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{2\Gamma(\alpha_k)}\int_q^z\frac{G(t,0;x,0)}{2a_1(t)-1}\lambda_1(t)dt\int_t^z(z-s)^{\alpha_k-1}p_k(s)ds-\\-\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{2\Gamma(\beta_k)}\int_q^{2z-1}\frac{G(t,0;x,0)}{2a_1(t)-1}\lambda_1(t)dt\int_{(t+1)/2}^z(z-s)^{\alpha_k-1}p_k(s)ds,\\\hfill(1+q)/2\leqslant t\leqslant 1;\\\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{2\Gamma(\alpha_k)}\int_q^z\frac{G(t,0;x,0)}{2a_1(t)-1}\lambda_1(t)dt\int_t^z(z-s)^{\alpha_k-1}p_k(s)ds,\\\hfill q\leqslant t\leqslant(1+q)/2;\end{cases}$$

$$K_{52}(x,z)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{2\Gamma(\beta_k)}\int_z^{-q}\frac{G(t,0;x,0)}{2a_2(t)+1}\lambda_2(t)dt\int_z^t(s-z)^{\beta_k-1}r_k(s)ds-\\-\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{2\Gamma(\beta_k)}\int_{2z+1}^{-q}\frac{G(t,0;x,0)}{2a_2(t)+1}\lambda_2(t)dt\int_z^{(t-1)/2}(s-z)^{\beta_k-1}r_k(s)ds,\\\hfill -1\leqslant t\leqslant-(1+q)/2;\\\int_z^{-q}\lambda_2(t)G(t,0;x,0)dt\int_z^t\sum\limits_{k=1}^n\frac{(s-z)^{\beta_k-1}}{2(2a_2(t)+1)\Gamma(\beta_k)}r_k(s)ds,\\\hfill -(1+q)/2\leqslant t\leqslant-q;\end{cases}$$

$$\tilde{F}_1(x) = F_1(x) + \int_q^1 \frac{2d_1(t)}{2a_1(t)-1} G(t,0;x,0)dt - \\ - \int_{-1}^{-q} \frac{2d_2(t)}{2a_2(t)+1} G(t,0;x,0)dt, \quad q \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\tilde{F}_2(x) = F_2(x) + \int_q^1 \frac{2d_1(t)}{2a_1(t)-1} G(t,0;x,0)dt - \\ - \int_{-1}^{-q} \frac{2d_2(t)}{2a_2(t)+1} G(t,0;x,0)dt, \quad -1 \leqslant x \leqslant -q.$$

причем

$$|K_{5j}(x,z)| \leqslant \mathrm{const}, \quad |\tilde{F}_j(x)| \leqslant \mathrm{const}, \quad (j=1,2).$$

Разрешая систему (46), однозначно определим $\tau_j(x)$, следовательно, из функциональных соотношений (11), (12) с учетом (3) находим $\nu_j^-(x)$ и $\nu_j^+(x)$. Далее, как и в случаях A и B, однозначно восстанавливается решение задачи I в каждой подобласти.

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

ORCID
Обиджон Хайруллаевич Абдуллаев: http://orcid.org/0000-0001-8503-1268

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // *Диффер. уравн.*, 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108.
2. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // *Диффер. уравн.*, 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
3. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применения.* М.: Наука, 2012. 233 с.
4. Елеев В. А. О некоторых краевых задачах для смешанно-нагруженных уравнений второго и третьего порядка // *Диффер. уравн.*, 1994. Т. 30, № 2. С. 230–236.
5. Дзарахохов А. В., Елеев В. А. Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения третьего порядка // *Владикавк. матем. журн.*, 2004. Т. 6, № 3. С. 36–46.
6. Казиев В. М. О задаче Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // *Диффер. уравн.*, 1978. Т. 14, № 1. С. 181–184.
7. Казиев В. М. Задача Гурса для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения // *Диффер. уравн.*, 1981. Т. 17, № 2. С. 313–319.
8. Ланин И. Н. Краевая задача для одного нагруженного гиперболо-параболического уравнения третьего порядка // *Диффер. уравн.*, 1981. Т. 17, № 1. С. 97–106.
9. Исломов Б. И., Курьязов Д. М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка // *ДАН РУз*, 1996. № 1–2. С. 3–6.
10. Курьязов Д. М. Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // *УзМЖ*, 1999. № 5. С. 40–46.
11. Рамазанов М. И. О нелокальной задаче для нагруженного гиперболо-эллиптического уравнения в прямоугольной области // *Математический журнал. Алматы*, 2002. Т. 2, № 4. С. 75–81, http://www.math.kz/images/journal/2002-4/Ramazanov.pdf.
12. Хубиев К. У. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2005. Т. 7, № 2. С. 74–77.

13. Сабитов К. Б., Мелишева Е. П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2013. №7. С. 62–76.
14. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // *Изв. вузов. Матем.*, 2015. №6. С. 31–42.
15. Мелишева Е. П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2010. №6(80). С. 39–47.
16. Abdullayev O. Kh. About a method of research of the non-local problem for the loaded mixed type equation in double-connected domain // *Bulletin KRASEC. Phys. & Math. Sci.*, 2014. vol. 9, no. 2. pp. 3–12. doi: 10.18454/2313-0156-2014-9-2-3-12.
17. Абдуллаев О. Х. Краевая задача для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа в двусвязной области // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2014. №1(8). С. 33–48. doi: 10.18454/2079-6641-2014-8-1-33-48.
18. Исломов Б. И., Абдуллаев О. Х. Краевая задача типа задачи Бицадзе для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа в двусвязной области // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2004. Т. 7, №1. С. 42–46.
19. Бицадзе А. В. *Краевые задачи эллиптических уравнений второго порядка*. М.: Наука, 1966. 203 с.
20. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*. М.: Наука, 1968. 513 с.

Поступила в редакцию 10/III/2016;
в окончательном варианте — 25/IV/2016;
принята в печать — 27/V/2016.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 2, pp. 220–240

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1485

MSC: 35M12

A NON-LOCAL PROBLEM FOR A LOADED MIXED-TYPE EQUATION WITH A INTEGRAL OPERATOR

O. Kh. Abdullayev

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
VUZ Gorodok, Tashkent, 100125, Uzbekistan.

Abstract

We study the existence and uniqueness of the solution of non-local boundary value problem for the loaded elliptic-hyperbolic equation

$$u_{xx} + \operatorname{sgn}(y) u_{yy} + \frac{1-\operatorname{sgn}(y)}{2} \sum_{k=1}^{n} R_k(x, u(x,0)) = 0$$

Please cite this article in press as:
Abdullayev O. Kh. A non-local problem for a loaded mixed-type equation with a integral operator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 2, pp. 220–240. doi: 10.14498/vsgtu1485. (In Russian)

Author Details:
Obidjon Kh. Abdullayev (Cand. Phys. & Math. Sci.; obidjon.mth@gmail.com), Associate Professor, Dept. of Differential Equations and Mathematical Physics.

with integral operator

$$R_k\big(x, u(x,0)\big) = \begin{cases} p_k(x) D_{x\,1}^{-\alpha_k} u(x,0), & q \leqslant x \leqslant 1, \\ r_k(x) D_{-1\,x}^{-\beta_k} u(x,0), & -1 \leqslant x \leqslant -q, \end{cases}$$

where

$$D_{ax}^{-\alpha_k} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha_k}} dt,$$
$$D_{xb}^{-\beta_k} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta_k)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\beta_k}} dt,$$

in double-connected domain Ω, bounded with two lines:

$$\sigma_1: \ x^2 + y^2 = 1, \quad \sigma_2: \ x^2 + y^2 = q^2 \quad \text{at } y > 0,$$

and characteristics:

$$A_j C_1: \ x + (-1)^j y = (-1)^{j+1}, \quad B_j C_2: \ x + (-1)^j y = (-1)^{j+1} \cdot q$$

of the considered equation at $y < 0$, where $0 < q < 1$, $j = 1, 2$; $A_1(1;0)$, $A_2(-1;0)$, $B_1(q;0)$, $B_2(-q;0)$, $C_1(0;-1)$, $C_2(0;-q)$, β_k, $\alpha_k > 0$.

Uniqueness of the solution of investigated problem was proved by an extremum principle for the mixed type equations. Thus we need to prove that, the loaded part of the equation is identically equal to zero if considerate problem is homogeneous. Existence of the solution of the problem was proved by a method of the integral equations, thus the theory of the singular integral equations and Fredholm integral equations of the second kind were widely used.

Keywords: loaded equation, integral operator, elliptic-hyperbolic type equations, double-connected domain, existence and uniqueness of solution, extremum principle, integral equations.

ORCID
Obidjon Kh. Abdullayev: http://orcid.org/0000-0001-8503-1268

REFERENCES

1. Nahushev A. M. The Darboux problem for a certain degenerate second order loaded integrodifferential equation, *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 103–108 (In Russian).
2. Nakhushev A. M. Loaded equations and their applications, *Differ. Equations*, 1983, vol. 19, no. 1, pp. 74–81.
3. Nakhushev A. M. *Nagruzhennye uravneniia i ikh primeneniia* [Loaded equations and their applications]. Moscow, Nauka, 2012, 233 pp. (In Russian)
4. Eleev V. A. Some boundary value problems for mixed loaded equations of second and third order, *Differ. Equations*, 1994, vol. 30, no. 2, pp. 210–217.
5. Dzarakhohov A. V., Eleev V. A. On a nonlocal boundary value problem for a third-order loaded equation, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2004, vol. 6, no. 3, pp. 36–46 (In Russian).
6. Kaziev V. M. Darboux's problem for a loaded second-order integrodifferential equation, *Differ. Equations*, 1978, vol. 14, no. 1, pp. 130–133.
7. Kaziev V. M. Goursat's problem for a loaded integrodifferential equation, *Differ. Equations*, 1981, vol. 17, no. 2, pp. 216–220.
8. Lanin I. N. Boundary-value problem for a loaded third-order hyperbolic-parabolic equation, *Differ. Equations*, 1981, vol. 17, no. 1, pp. 66–72.

9. Islamov B. I., Kuryazov D. M. On a boundary value problem for loaded equation of the second order, *Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzb.*, 1996, no. 1–2, pp. 3–6 (In Russian).
10. Kuryazov D. M. A boundary value problem for a loaded equation of mixed type with two lines of degeneracy, *Uzbekskii Matematicheskii Zhurnal*, 1999, no. 5, pp. 40–46 (In Russian).
11. Ramazanov M. I. On a nonlocal problem for a loaded hyperbolic-elliptic equation in a rectangular domain, *Matematicheskii zhurnal. Almaty*, 2002, vol. 2, no. 4, pp. 75–81 (In Russian), http://www.math.kz/images/journal/2002-4/Ramazanov.pdf.
12. Khubiev K. U. On one boundary value problem for a loaded mixed hyperbolic-parabolic type equation, *Doklady Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunarodnoi akademii nauk*, 2005, vol. 7, no. 2, pp. 74–77 (In Russian).
13. Sabitov K. B., Melisheva E. P. The Dirichlet problem for a loaded mixed-type equation in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 7, pp. 53–65. doi: 10.3103/S1066369X13070062.
14. Sabitov K. B. Initial-boundary problem for parabolic-hyperbolic equation with loaded summands, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2015, vol. 59, no. 6, pp. 23–33. doi: 10.3103/S1066369X15060055.
15. Melisheva E. P. Dirichlet problem for loaded equation of Lavrentiev–Bizadze, *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2010, no. 6(80), pp. 39–47 (In Russian).
16. Abdullayev O. Kh. About a method of research of the non-local problem for the loaded mixed type equation in double-connected domain, *Bulletin KRASEC. Phys. & Math. Sci.*, 2014, vol. 9, no. 2, pp. 3–12. doi: 10.18454/2313-0156-2014-9-2-3-12.
17. Abdullayev O. Kh. A boundary value problem for a loaded elliptic-hyperbolic type equation in a double-connected domain, *Vestnik KRAUNTs. Fiz.-mat. nauki* [Bulletin KRASEC. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 1(8), pp. 33–48 (In Russian). doi: 10.18454/2079-6641-2014-8-1-33-48.
18. Islomov B. I., Abdullayev O. Kh. A Boundary value problem of Bitsadze type problem for a third-order elliptic-hyperbolic type equation in a double-connected domain, *Doklady Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunarodnoi akademii nauk*, 2004, vol. 7, no. 1, pp. 42–46 (In Russian).
19. Bitsadze A. V. *Boundary value problems for second order elliptic equations*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 5. Amsterdam, North-Holland Publ., 1968, 211 pp.
20. Muskhelishvili N. I. *Singular integral equations.* Groningen, Wolters-Noordhoff Publ., 1967, 447 pp.

Received 10/III/2016;
received in revised form 25/IV/2016;
accepted 27/V/2016.