Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 3. С. 389–409
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1511

УДК 517.927:519.624

ОЦЕНКА ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ МАТРИЧНОГО МЕТОДА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. СООБЩЕНИЕ 1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА

В. Н. Маклаков

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Представлено первое сообщение цикла из двух статей, в котором исследованы закономерности изменения порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования в зависимости от используемой степени в разложении в многочлене Тейлора решений краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами с граничными условиями первого рода. Использование многочлена Тейлора второй степени при аппроксимации производных конечными разностями приводит ко второму порядку аппроксимации традиционного метода сеток. В работе при исследовании краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка рассмотрен предложенный ранее метод численного интегрирования, использующий средства матричного исчисления, в котором аппроксимация производных конечными разностями не производилась. Согласно указанному методу, при составлении системы разностных уравнений может быть выбрана произвольная степень многочлена Тейлора. Вычислена невязка и дана оценка порядка аппроксимации метода в зависимости от выбранной степени многочлена Тейлора. Теоретически показано, что для краевой задачи с граничными условиями первого рода порядок аппроксимации метода возрастает с увеличением степени многочлена Тейлора и равен этой степени лишь для ее четных значений. Для нечетных значений степени порядок аппроксимации

Образец для цитирования

Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Сообщение 1. Краевые задачи с граничными условиями первого рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 3. С. 389–409. doi: 10.14498/vsgtu1511.

Сведения об авторе

Владимир Николаевич Маклаков (к.ф.-м.н., доц.; makvo63@yandex.ru), доцент, каф. высшей математики и прикладной информатики.

меньше этой степени на единицу. Теоретические выводы подтверждены численным экспериментом для краевых задач с граничными условиями первого рода.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, краевые задачи, граничные условия первого, второго и третьего рода, порядок аппроксимации, численные методы, многочлены Тейлора.

Введение. Использование конечных разностей для аппроксимации производных в классическом методе сеток численного интегрирования краевых задач для неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (ОДУ2) с переменными коэффициентами с граничными условиями первого рода

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t), \quad x(a) = \widetilde{x}_0, \quad x(b) = \widetilde{x}_n, \tag{1}$$

где $p(t)$, $q(t)$, $f(t)$ — заданные функции, дифференцируемые нужное число раз, $[a, b]$ — область интегрирования, $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{x}_n$ — заданные числа, приводит ко второму порядку аппроксимации [1–6]. Такой же (второй) порядок аппроксимации имеют методы численного интегрирования ряда краевых задач для уравнений в частных производных [4–10]. Второй порядок обусловлен тем, что при аппроксимации производных конечными разностями было удержано всего три члена разложения в ряд Тейлора искомого решения задачи.

Метод, использующий средства матричного исчисления, численного интегрирования разностных краевых задач для неоднородных ОДУ2, позволяющий увеличить количество удержанных членов до произвольного натурального числа в разложении искомой функции в ряд Тейлора, предложен в [11], при этом аппроксимация производных конечными разностями не использовалась. Оценка порядка аппроксимации предложенного в [11] матричного метода интегрирования краевых задач для неоднородных линейных ОДУ2 с граничными условиями первого, второго и третьего рода при различных значениях удержанного числа членов в рядах Тейлора дана в [12].

Исследуем возможность использования матричного метода для численного интегрирования систем неоднородных линейных ОДУ2 с переменными коэффициентами с различными граничными условиями на примере следующей системы для неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{cases} u_1x'' + p_1x' + r_1x + v_1y'' + q_1y' + s_1y = f_1, \\ u_2x'' + p_2x' + r_2x + v_2y'' + q_2y' + s_2y = f_2, \end{cases} \tag{2}$$

где u_j, p_j, r_j, v_j, q_j, s_j, f_j — заданные функции аргумента t, дифференцируемые нужное число раз, $j = 1, 2$ — номер уравнения в системе (2), и поставим целью вычисление порядка аппроксимации.

Далее будем придерживаться принятых в [4] обозначений:

1) D — область интегрирования, ограниченная отрезком $[a, b]$, D_h — узлы сетки, определяемые значениями $t_i = t_0 + ih$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t_0 = a$, $t_n = b$, $h = (b - a)/n$, $n + 1$ — число узлов сетки;
2) $x(t)$, $y(t)$ — непрерывные функции, являющиеся точным решением системы (2) с теми или иными граничными условиями;

3) $[x]_h$, $[y]_h$ — сеточные функции, совпадающие с точным решением в узлах сетки D_h;
4) $x^{(h)}$, $y^{(h)}$ — искомые сеточные функции.

Для краткости примем для любой функции обозначение $\varphi(t_i) = \varphi_i$, где t_i — узел сетки D_h. В дальнейшем опустим индекс h в наименованиях сеточных функций $[x]_h$, $[y]_h$, $x^{(h)}$, $y^{(h)}$.

1. Краевые задачи с граничными условиями первого рода. Рассмотрим систему ОДУ2 (2) с граничными условиями первого рода

$$x_0 = \widetilde{x}_0, \quad y_0 = \widetilde{y}_0, \quad x_n = \widetilde{x}_n, \quad y_n = \widetilde{y}_n, \tag{3}$$

где $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{y}_0$, $\widetilde{x}_n$, $\widetilde{y}_n$ — заданные числа.

В соответствии с матричным методом численного интегрирования выполним следующие преобразования. Для некоторых фиксированных $k \geqslant 2$, k — степень используемого многочлена Тейлора, и номера узла сетки i, $i = 1, 2, \dots, n-1$, запишем следующие многочлены Тейлора для функций $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{cases} x_{i-1} = x_i - hx'_i + \dfrac{h^2}{2!}x''_i - \dfrac{h^3}{3!}x'''_i + \dots + (-1)^k\dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)}, \\ y_{i-1} = y_i - hy'_i + \dfrac{h^2}{2!}y''_i - \dfrac{h^3}{3!}y'''_i + \dots + (-1)^k\dfrac{h^k}{k!}y_i^{(k)}, \\ x_{i+1} = x_i + hx'_i + \dfrac{h^2}{2!}x''_i + \dfrac{h^3}{3!}x'''_i + \dots + \dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)}, \\ y_{i+1} = y_i + hy'_i + \dfrac{h^2}{2!}y''_i + \dfrac{h^3}{3!}y'''_i + \dots + \dfrac{h^k}{k!}y_i^{(k)}, \end{cases} \tag{4}$$

вычислим производные по аргументу t от обеих частей уравнений системы (2) и запишем их в узле t_i в виде

$$\begin{cases} \left(u_{1i}x''_i + p_{1i}x'_i + r_{1i}x_i + v_{1i}y''_i + q_{1i}y'_i + s_{1i}y_i\right)^{(r)} = \left(f_{1i}\right)^{(r)}, \\ \left(u_{2i}x''_i + p_{2i}x'_i + r_{2i}x_i + v_{2i}y''_i + q_{2i}y'_i + s_{2i}y_i\right)^{(r)} = \left(f_{2i}\right)^{(r)}, \end{cases} \tag{5}$$

где $r = 1, 2, \dots, k-2$; здесь и далее в наименованиях функций первый из пары нижних индексов означает номер уравнения в системе (2), второй — номер узла сетки.

Из многочленов Тейлора (4), дифференциальных уравнений системы (2), записанных в узле t_i, и производных (5) составим следующую систему из $2k+2$ уравнений:

$$\begin{cases} x_i - hx'_i + \dfrac{h^2}{2!}x''_i - \dfrac{h^3}{3!}x'''_i + \dots + (-1)^k\dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i-1}, \\ y_i - hy'_i + \dfrac{h^2}{2!}y''_i - \dfrac{h^3}{3!}y'''_i + \dots + (-1)^k\dfrac{h^k}{k!}y_i^{(k)} = y_{i-1}, \\ x_i + hx'_i + \dfrac{h^2}{2!}x''_i + \dfrac{h^3}{3!}x'''_i + \dots + \dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i+1}, \\ y_i + hy'_i + \dfrac{h^2}{2!}y''_i + \dfrac{h^3}{3!}y'''_i + \dots + \dfrac{h^k}{k!}y_i^{(k)} = y_{i+1}, \\ r_{1i}x_i + p_{1i}x'_i + u_{1i}x''_i + s_{1i}y_i + q_{1i}y'_i + v_{1i}y''_i = f_{1i}, \\ r_{2i}x_i + p_{2i}x'_i + u_{2i}x''_i + s_{2i}y_i + q_{2i}y'_i + v_{2i}y''_i = f_{2i}, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} r'_{1i}x_i + (r_{1i}+p'_{1i})x'_i + (p_{1i}+u'_{1i})x''_i + u_{1i}x'''_i + \\ \qquad +s'_{1i}y_i + (s_{1i}+q'_{1i})y'_i + (q_{1i}+v'_{1i})y''_i + v_{1i}y'''_i = f'_{1i}, \\ r'_{2i}x_i + (r_{2i}+p'_{2i})x'_i + (p_{2i}+u'_{2i})x''_i + u_{2i}x'''_i + \\ \qquad +s'_{2i}y_i + (s_{2i}+q'_{2i})y'_i + (q_{2i}+v'_{2i})y''_i + v_{2i}y'''_i = f'_{2i}, \\ \qquad \vdots \\ r^{(k-2)}_{1i}x_i + \dots + u_{1i}x^{(k)}_i + s^{(k-2)}_{1i}y_i + \dots + v_{1i}y^{(k)}_i = f^{(k-2)}_{1i}, \\ r^{(k-2)}_{2i}x_i + \dots + u_{2i}x^{(k)}_i + s^{(k-2)}_{2i}y_i + \dots + v_{2i}y^{(k)}_i = f^{(k-2)}_{2i}. \end{cases}$$

Система (6) — система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), имеющая в матричной форме вид

$$A^{ki}W^{ki} = G^{ki},$$

где

$$A^{ki} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h & 0 & \frac{h^2}{2!} & 0 & \dots & (-1)^k\frac{h^k}{k!} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -h & 0 & \frac{h^2}{2!} & \dots & 0 & (-1)^k\frac{h^k}{k!} \\ 1 & 0 & h & 0 & \frac{h^2}{2!} & 0 & \dots & \frac{h^k}{k!} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h & 0 & \frac{h^2}{2!} & \dots & 0 & \frac{h^k}{k!} \\ r_{1i} & s_{1i} & p_{1i} & q_{1i} & u_{1i} & v_{1i} & \dots & 0 & 0 \\ r_{2i} & s_{2i} & p_{2i} & q_{2i} & u_{2i} & v_{2i} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r^{(k-2)}_{1i} & s^{(k-2)}_{1i} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & u_{1i} & v_{1i} \\ r^{(k-2)}_{2i} & s^{(k-2)}_{2i} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & u_{2i} & v_{2i} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$W^{ki} = \left[x_i\ y_i\ x'_i\ y'_i\ x''_i\ y''_i\ \dots\ x^{(k)}_i\ y^{(k)}_i\right]^\top,$$
$$G^{ki} = \left[x_{i-1}\ y_{i-1}\ x_{i+1}\ y_{i+1}\ f_{1i}\ f_{2i}\ \dots\ f^{(k-2)}_{1i}\ f^{(k-2)}_{2i}\right]^\top.$$

Здесь и далее верхний индекс k означает степень используемого многочлена Тейлора, если речь не идет о показателях алгебраических степеней и степенях производных; второй из пары верхних индексов (если он существует) в наименованиях матриц и их элементов означает номер узла сетки. Матрицу A^{ki} будем называть локальной матрицей.

Предполагая существование обратной матрицы $B^{ki} = (A^{ki})^{-1}$ от локальной матрицы (7), запишем матричное равенство $B^{ki}G^{ki} = W^{ki}$, или следующие соотношения в координатной форме:

$$b^{ki}_{11}x_{i-1} + b^{ki}_{12}y_{i-1} + b^{ki}_{13}x_{i+1} + b^{ki}_{14}y_{i+1} + b^{ki}_{15}f_{1i} + b^{ki}_{16}f_{2i} + \dots + \\ + b^{ki}_{1\,(2k+1)}f^{(k-2)}_{1i} + b^{ki}_{1\,(2k+2)}f^{(k-2)}_{2i} = x_i, \tag{8}$$

$$b^{ki}_{21}x_{i-1} + b^{ki}_{22}y_{i-1} + b^{ki}_{23}x_{i+1} + b^{ki}_{24}y_{i+1} + b^{ki}_{25}f_{1i} + b^{ki}_{26}f_{2i} + \dots + \\ + b^{ki}_{2\,(2k+1)}f^{(k-2)}_{1i} + b^{ki}_{2\,(2k+2)}f^{(k-2)}_{2i} = y_i, \tag{9}$$

$$b_{31}^{ki}x_{i-1} + b_{32}^{ki}y_{i-1} + b_{33}^{ki}x_{i+1} + b_{34}^{ki}y_{i+1} + b_{35}^{ki}f_{1i} + b_{36}^{ki}f_{2i} + \dots + \\ + b_{3\,(2k+1)}^{ki}f_{1i}^{(k-2)} + b_{3\,(2k+2)}^{ki}f_{2i}^{(k-2)} = x_i', \quad (10)$$

$$b_{41}^{ki}x_{i-1} + b_{42}^{ki}y_{i-1} + b_{43}^{ki}x_{i+1} + b_{44}^{ki}y_{i+1} + b_{45}^{ki}f_{1i} + b_{46}^{ki}f_{2i} + \dots + \\ + b_{4\,(2k+1)}^{ki}f_{1i}^{(k-2)} + b_{4\,(2k+2)}^{ki}f_{2i}^{(k-2)} = y_i', \quad (11)$$

$$\dots$$

$$b_{(2k+1)\,1}^{ki}x_{i-1} + b_{(2k+1)\,2}^{ki}y_{i-1} + b_{(2k+1)\,3}^{ki}x_{i+1} + b_{(2k+1)\,4}^{ki}y_{i+1} + b_{(2k+1)\,5}^{ki}f_{1i} + \\ + b_{(2k+1)\,6}^{ki}f_{2i} + \dots + b_{(2k+1)\,(2k+1)}^{ki}f_{1i}^{(k-2)} + b_{(2k+1)\,(2k+2)}^{ki}f_{2i}^{(k-2)} = x_i^{(k)}, \quad (12)$$

$$b_{(2k+2)\,1}^{ki}x_{i-1} + b_{(2k+2)\,2}^{ki}y_{i-1} + b_{(2k+2)\,3}^{ki}x_{i+1} + b_{(2k+2)\,4}^{ki}y_{i+1} + b_{(2k+2)\,5}^{ki}f_{1i} + \\ + b_{(2k+2)\,6}^{ki}f_{2i} + \dots + b_{(2k+2)\,(2k+1)}^{ki}f_{1i}^{(k-2)} + b_{(2k+2)\,(2k+2)}^{ki}f_{2i}^{(k-2)} = y_i^{(k)}, \quad (13)$$

где b_{jm}^{ki} — элементы матрицы B^{ki}.

Из соотношений (8), (9), являющихся разностными уравнениями второго порядка для трехточечного шаблона t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, $i = 1, 2, \dots, n-1$, и связывающих значения x_{i-1}, y_{i-1}, x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1} искомых функций, составим, учитывая граничные условия (3), систему

$$\begin{cases} x_1 - b_{13}^{k1}x_2 - b_{14}^{k1}y_2 = b_{11}^{k1}\widetilde{x}_0 + b_{12}^{k1}\widetilde{y}_0 + \\ \qquad + b_{15}^{k1}f_{11} + b_{16}^{k1}f_{21} + \dots + b_{1\,(2k+1)}^{k1}f_{11}^{(k-2)} + b_{1\,(2k+2)}^{k1}f_{21}^{(k-2)}, \\ y_1 - b_{23}^{k1}x_2 - b_{24}^{k1}y_2 = b_{21}^{k1}\widetilde{x}_0 + b_{22}^{k1}\widetilde{y}_0 + \\ \qquad + b_{25}^{k1}f_{11} + b_{26}^{k1}f_{21} + \dots + b_{2\,(2k+1)}^{k1}f_{11}^{(k-2)} + b_{2\,(2k+2)}^{k1}f_{21}^{(k-2)}, \\ \qquad \vdots \\ -b_{11}^{ki}x_{i-1} - b_{12}^{ki}y_{i-1} + x_i - b_{13}^{ki}x_{i+1} - b_{14}^{ki}y_{i+1} = \\ \qquad = b_{15}^{ki}f_{1i} + b_{16}^{ki}f_{2i} + \dots + b_{1\,(2k+1)}^{ki}f_{1i}^{(k-2)} + b_{1\,(2k+2)}^{ki}f_{2i}^{(k-2)}, \\ -b_{21}^{ki}x_{i-1} - b_{22}^{ki}y_{i-1} + y_i - b_{23}^{ki}x_{i+1} - b_{24}^{ki}y_{i+1} = \\ \qquad = b_{25}^{ki}f_{1i} + b_{26}^{ki}f_{2i} + \dots + b_{2\,(2k+1)}^{ki}f_{1i}^{(k-2)} + b_{2\,(2k+2)}^{ki}f_{2i}^{(k-2)}, \\ \qquad \vdots \\ -b_{11}^{k\,(n-1)}x_{n-2} - b_{12}^{k\,(n-1)}y_{n-2} + x_{n-1} = b_{13}^{k\,(n-1)}\widetilde{x}_n + b_{14}^{k\,(n-1)}\widetilde{y}_n + \\ \quad + b_{15}^{k\,(n-1)}f_{1\,(n-1)} + b_{16}^{k\,(n-1)}f_{2\,(n-1)} + \dots + b_{1\,(2k+1)}^{k\,(n-1)}f_{1\,(n-1)}^{(k-2)} + b_{1\,(2k+2)}^{k\,(n-1)}f_{2\,(n-1)}^{(k-2)}, \\ -b_{21}^{k\,(n-1)}x_{n-2} - b_{22}^{k\,(n-1)}y_{n-2} + y_{n-1} = b_{23}^{k\,(n-1)}\widetilde{x}_n + b_{24}^{k\,(n-1)}\widetilde{y}_n + \\ \quad + b_{25}^{k\,(n-1)}f_{1\,(n-1)} + b_{26}^{k\,(n-1)}f_{2\,(n-1)} + \dots + b_{2\,(2k+1)}^{k\,(n-1)}f_{1\,(n-1)}^{(k-2)} + b_{2\,(2k+2)}^{k\,(n-1)}f_{2\,(n-1)}^{(k-2)}. \end{cases} \quad (14)$$

Отметим, что в центральном узле шаблона уравнения системы (14) с нечетными номерами содержат искомые значения x_i, с четными номерами — значения y_i.

Система (14) является СЛАУ, имеющей блочную трехдиагональную матрицу, решение которой позволяет найти метод матричной прогонки [5,13], что дает возможность вычислить искомые значения x_i, y_i во внутренних узлах сетки t_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Производные $x_i^{(r)}$, $y_i^{(r)}$, $r = 1, 2, \ldots, k$, во внутренних узлах сетки найдем по формулам (10)–(13) с использованием найденных значений x_i, y_i.

Фактически СЛАУ (14) есть запись в развернутом виде разностной краевой задачи для системы двух разностных уравнений второго порядка с граничными условиями первого рода для отыскания вектор-функции $z_i = [x_i\ y_i]^\top$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, удовлетворяющей следующим равенствам [4, 14]:

$$\sum_{j=-1}^{1} B_j^{ki} z_{i+j} = g^{ki}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \lambda_0 z_0 = \widetilde{z}_0, \lambda_n z_n = \widetilde{z}_n, \tag{15}$$

где

$$B_{-1}^{ki} = \begin{bmatrix} -b_{11}^{ki} & -b_{12}^{ki} \\ -b_{21}^{ki} & -b_{22}^{ki} \end{bmatrix}, \quad B_0^{ki} = \lambda_0 = \lambda_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1^{ki} = \begin{bmatrix} -b_{13}^{ki} & -b_{14}^{ki} \\ -b_{23}^{ki} & -b_{24}^{ki} \end{bmatrix},$$

$$g^{ki} = \begin{bmatrix} g_{1i} \\ g_{2i} \end{bmatrix} = C^{ki} F^{ki}, \quad C^{ki} = \begin{pmatrix} b_{15}^{ki} & b_{16}^{ki} & b_{17}^{ki} & b_{18}^{ki} & \ldots & b_{1\,(2k+1)}^{ki} & b_{1\,(2k+2)}^{ki} \\ b_{25}^{ki} & b_{26}^{ki} & b_{27}^{ki} & b_{28}^{ki} & \ldots & b_{2\,(2k+1)}^{i} & b_{2\,(2k+2)}^{ki} \end{pmatrix},$$

$$F^{ki} = \left[f_{1i}\ f_{2i}\ f'_{1i}\ f'_{2i}\ \ldots\ f_{1i}^{(k-2)}\ f_{2i}^{(k-2)} \right]^\top, \quad \widetilde{z}_0 = [\widetilde{x}_0\ \widetilde{y}_0]^\top, \quad \widetilde{z}_n = [\widetilde{x}_n\ \widetilde{y}_n]^\top.$$

2. Предварительные оценки. При некоторых фиксированных номере $k \geqslant 2$ и номере i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, запишем следующие ряды Тейлора для функции $x(t)$:

$$x_{i-1} = x_i - h x'_i + \frac{h^2}{2!} x''_i - \frac{h^3}{3!} x'''_i + \cdots =$$
$$= \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \frac{h^m}{m!} x_i^{(m)} + \sum_{m=k+1}^{\infty} (-1)^m \frac{h^m}{m!} x_i^{(m)} = P_{x,i-1}^k + R_{x,i-1}^k,$$

$$x_{i+1} = x_i + h x'_i + \frac{h^2}{2!} x''_i + \frac{h^3}{3!} x'''_i + \cdots =$$
$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{h^m}{m!} x_i^{(m)} + \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{h^m}{m!} x_i^{(m)} = P_{x,i+1}^k + R_{x,i+1}^k,$$

где

$$R_{x,i-1}^k, R_{x,i+1}^k = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} x^{(k+1)}(\xi_i) = O(h^{k+1}), \quad \xi_i \in (t_i, t_{i+1})$$

— дополнительные члены разложений в ряд Тейлора в форме Лагранжа [15].

Из двух последних точных равенств найдем

$$R^k_{x,i+1} - R^k_{x,i-1} = \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{h^m}{m!}\, x_i^{(m)} - \sum_{m=k+1}^{\infty} (-1)^m \frac{h^m}{m!}\, x_i^{(m)} = \\ = \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{h^m}{m!}\, x_i^{(m)} \left(1 - (-1)^m\right) \quad (16)$$

и, аналогично,

$$R^k_{x,i+1} + R^k_{x,i-1} = \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{h^m}{m!}\, x_i^{(m)} + \sum_{m=k+1}^{\infty} (-1)^m \frac{h^m}{m!}\, x_i^{(m)} = \\ = \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{h^m}{m!}\, x_i^{(m)} \left(1 + (-1)^m\right). \quad (17)$$

Из равенств (16), (17) для четного k имеем

$$R^k_{x,i+1} - R^k_{x,i-1} = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\, x_i^{(k+1)} (1+1) + \\ + \frac{h^{k+2}}{(k+2)!}\, x_i^{(k+2)} (1-1) + \dots = O(h^{k+1}), \quad (18)$$

$$R^k_{x,i+1} + R^k_{x,i-1} = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\, x_i^{(k+1)} (1-1) + \\ + \frac{h^{k+2}}{(k+2)!}\, x_i^{(k+2)} (1+1) + \dots = O(h^{k+2}) \quad (19)$$

и для нечетного k —

$$R^k_{x,i+1} - R^k_{x,i-1} = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\, x_i^{(k+1)} (1-1) + \\ + \frac{h^{k+2}}{(k+2)!}\, x_i^{(k+2)} (1+1) + \dots = O(h^{k+2}), \quad (20)$$

$$R^k_{x,i+1} + R^k_{x,i-1} = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\, x_i^{(k+1)} (1+1) + \\ + \frac{h^{k+2}}{(k+2)!}\, x_i^{(k+2)} (1-1) + \dots = O(h^{k+1}). \quad (21)$$

Замена в равенствах (18)–(21) x на y даст аналогичные оценки для дополнительных членов $R^k_{y,i-1}$, $R^k_{y,i+1}$.

3. Оценка порядка аппроксимации разностной краевой задачи с граничными условиями первого рода. Соответствующую дифференциальной краевой задаче (1) разностную краевую задачу будем обозначать, по аналогии с [4], в компактной символической форме как

$$L_h^k x = f_h^k.$$

При исследовании дифференциальной краевой задачи (1) для одного уравнения сеточная функция x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, являющаяся решением разностной краевой задачи, при подстановке в уравнения этой разностной краевой задачи обратит их в верные равенства. В [4] показано, что подстановка в уравнения задачи сеточной функции $[x_i]$, отличающейся от x_i, приведет к некоторому отличию от верных равенств. Эти отличия и характеризует невязка δf_h^k [4]. Иными словами, подстановка $[x]$ в

$$L_h^k x = f_h^k$$

приведет к

$$L_h^k[x] = f_h^k + \delta f_h^k.$$

В работе [4] в качестве оценки величины невязки принята норма

$$\|\delta f_h^k\| = \max\bigl(|\delta f_h^{k0}|, |\delta f_h^{kn}|, |\delta f_h^{ki}|\bigr), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где первые две компоненты характеризуют меру отличий в граничных узлах сетки D_h, оставшиеся — во внутренних узлах.

Согласно [4, 6] разностная краевая задача (14) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу (1) на точном решении x, если $\|\delta f_h^k\| \to 0$ при $h \to 0$. Если при этом имеет место неравенство

$$\|\delta f_h^k\| \leqslant C h^k,$$

где $C > 0, k > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от h, то говорят, что имеет место аппроксимация порядка k относительно величины h.

Вычислим порядок аппроксимации рассматриваемой краевой задачи.

СЛАУ (14), или, что то же самое, разностную краевую задачу (15) запишем, по аналогии с [4], в компактной символической форме как

$$L_h^k z = f_h^k, \tag{22}$$

или, в дальнейшем для краткости, как L_h^k, где

$$L_h^k z \equiv L_h^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} -\dfrac{b_{11}^{ki}}{b_{15}^{ki}} x_{i-1} - \dfrac{b_{12}^{ki}}{b_{15}^{ki}} y_{i-1} + \dfrac{x_i}{b_{15}^{ki}} - \dfrac{b_{13}^{ki}}{b_{15}^{ki}} x_{i+1} - \dfrac{b_{14}^{ki}}{b_{15}^{ki}} y_{i+1}, \\ -\dfrac{b_{21}^{ki}}{b_{26}^{ki}} x_{i-1} - \dfrac{b_{22}^{ki}}{b_{26}^{ki}} y_{i-1} + \dfrac{y_i}{b_{26}^{ki}} - \dfrac{b_{23}^{ki}}{b_{26}^{ki}} x_{i+1} - \dfrac{b_{24}^{ki}}{b_{26}^{ki}} y_{i+1}, \\ x_0, \\ y_0, \\ x_n, \\ y_n, \end{cases}$$

$$f_h^k = \begin{cases} f_{1i} + \dfrac{b_{16}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f_{2i} + \dfrac{b_{17}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f'_{1i} + \dfrac{b_{18}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f'_{2i} + \dots + \dfrac{b_{1\,(2k+1)}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f_{1i}^{(k-2)} + \dfrac{b_{1\,(2k+2)}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f_{2i}^{(k-2)}, \\ \dfrac{b_{25}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f_{1i} + f_{2i} + \dfrac{b_{27}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f'_{1i} + \dfrac{b_{28}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f'_{2i} + \dots + \dfrac{b_{2\,(2k+1)}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f_{1i}^{(k-2)} + \dfrac{b_{2\,(2k+2)}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f_{2i}^{(k-2)}, \\ \widetilde{x}_0, \\ \widetilde{y}_0, \\ \widetilde{x}_n, \\ \widetilde{y}_n, \end{cases}$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Как будет показано ниже, выбор того или иного знаменателя (b_{15}^{ki} или b_{26}^{ki}) в двух первых равенствах задачи (22) не является существенным при оценке порядка аппроксимации.

Для задачи (22) обобщение приведенного выше определения порядка аппроксимации запишем в форме

$$L_h^k[z] = f_h^k + \delta f_h^k, \tag{23}$$

где

$$\delta f_h^k = \left[\delta f_{1h}^k \ \delta f_{2h}^k\right]^\top;$$

δf_{1h}^k, δf_{2h}^k — величины невязок в узлах сетки D_h, появление которых обусловлено соответственно первым и вторым уравнениями задачи (22). Итоговую норму невязку задачи в соответствии с [4] определим как

$$\|\delta f_h^k\| = \max\bigl(\|\delta f_{1h}^k\|, \|\delta f_{2h}^k\|\bigr). \tag{24}$$

При фиксированных k, i, $i = 1, 2, \dots, n-1$, имеем точные равенства

$$\begin{cases} [x_i] - h[x'_i] + \dfrac{h^2}{2!}[x''_i] - \dfrac{h^3}{3!}[x'''_i] + \dots + (-1)^k \dfrac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i-1}] - R_{x,i-1}^k, \\ [y_i] - h[y'_i] + \dfrac{h^2}{2!}[y''_i] - \dfrac{h^3}{3!}[y'''_i] + \dots + (-1)^k \dfrac{h^k}{k!}[y_i^{(k)}] = [y_{i-1}] - R_{y,i-1}^k, \\ [x_i] + h[x'_i] + \dfrac{h^2}{2!}[x''_i] + \dfrac{h^3}{3!}[x'''_i] + \dots + \dfrac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i+1}] - R_{x,i+1}^k, \\ [y_i] + h[y'_i] + \dfrac{h^2}{2!}[y''_i] + \dfrac{h^3}{3!}[y'''_i] + \dots + \dfrac{h^k}{k!}[y_i^{(k)}] = [y_{i+1}] - R_{y,i+1}^k. \end{cases} \tag{25}$$

Составим СЛАУ, в которую внесем равенства (25), дифференциальные уравнения системы (2), записанные в узле t_i, и точные равенства (5). В итоге получим

$$
\begin{cases}
[x_i] - h[x_i'] + \dfrac{h^2}{2!}[x_i''] - \dfrac{h^3}{3!}[x_i'''] + \dots + (-1)^k \dfrac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i-1}] - R^k_{x,i-1},\\
[y_i] - h[y_i'] + \dfrac{h^2}{2!}[y_i''] - \dfrac{h^3}{3!}[y_i'''] + \dots + (-1)^k \dfrac{h^k}{k!}[y_i^{(k)}] = [y_{i-1}] - R^k_{y,i-1},\\
[x_i] + h[x_i'] + \dfrac{h^2}{2!}[x_i''] + \dfrac{h^3}{3!}[x_i'''] + \dots + \dfrac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i+1}] - R^k_{x,i+1},\\
[y_i] + h[y_i'] + \dfrac{h^2}{2!}[y_i''] + \dfrac{h^3}{3!}[y_i'''] + \dots + \dfrac{h^k}{k!}[y_i^{(k)}] = [y_{i+1}] - R^k_{y,i+1},\\
r_{1i}[x_i] + p_{1i}[x_i'] + u_{1i}[x_i''] + s_{1i}[y_i] + q_{1i}[y_i'] + v_{1i}[y''] = f_{1i},\\
r_{2i}[x_i] + p_{2i}[x_i'] + u_{2i}[x_i''] + s_{2i}[y_i] + q_{2i}[y_i'] + v_{2i}[y_i''] = f_{2i},\\
r_{1i}'[x_i] + (r_{1i} + p_{1i}')[x_i'] + (p_{1i} + u_{1i}')[x_i''] + u_{1i}[x_i''']+\\
\qquad + s_{1i}'[y_i] + (s_{1i} + q_{1i}')[y_i'] + (q_{1i} + v_{1i}')[y_i''] + v_{1i}[y_i'''] = f_{1i}',\\
r_{2i}'[x_i] + (r_{2i} + p_{2i}')[x_i'] + (p_{2i} + u_{2i}')[x_i''] + u_{2i}[x_i''']+\\
\qquad + s_{2i}'[y_i] + (s_{2i} + q_{2i}')[y_i'] + (q_{2i} + v_{2i}')[y_i''] + v_{2i}[y_i'''] = f_{2i}',\\
\qquad \vdots\\
r_{1i}^{(k-2)}[x_i] + \dots + u_{1i}[x_i^{(k)}] + s_{1i}^{(k-2)}[y_i] + \dots + v_{1i}[y_i^{(k)}] = f_{1i}^{(k-2)},\\
r_{2i}^{(k-2)}[x_i] + \dots + u_{2i}[x_i^{(k)}] + s_{2i}^{(k-2)}[y_i] + \dots + v_{2i}[y_i^{(k)}] = f_{2i}^{(k-2)}.
\end{cases}
\tag{26}
$$

В матричной форме система (26) имеет вид

$$A^{ki}[W^{ki}] = [G^{ki}]$$

, где

$$
[W^{ki}] = \begin{bmatrix} [x_i] \\ [y_i] \\ [x_i'] \\ [y_i'] \\ [x_i''] \\ [y_i''] \\ [x_i'''] \\ [y_i'''] \\ \dots \\ [x_i^{(k)}] \\ [y_i^{(k)}] \end{bmatrix}, \qquad
[G^{ki}] = \begin{bmatrix} [x_{i-1}] - R^k_{x,i-1} \\ [y_{i-1}] - R^k_{y,i-1} \\ [x_{i+1}] - R^k_{x,i+1} \\ [y_{i+1}] - R^k_{y,i+1} \\ f_{1i} \\ f_{2i} \\ f_{1i}' \\ f_{2i}' \\ \dots \\ f_{1i}^{(k-2)} \\ f_{2i}^{(k-2)} \end{bmatrix},
$$

а матрица A^{ki} определяется формулой (7).

В предположении существования обратной матрицы $B^{ki} = (A^{ki})^{-1}$ от матрицы A^{ki} найдем

$$B^{ki}[G^{ki}] = [W^{ki}].$$

Выпишем первые два уравнения последнего матричного равенства:

$$b_{11}^{ki}([x_{i-1}] - R_{x,i-1}^k) + b_{12}^{ki}([y_{i-1}] - R_{y,i-1}^k) + b_{13}^{ki}([x_{i+1}] - R_{x,i+1}^k) +$$
$$+ b_{14}^{ki}([y_{i+1}] - R_{y,i+1}^k) + b_{15}^{ki} f_{1i} + b_{16}^{ki} f_{2i} + b_{17}^{ki} f'_{1i} + b_{18}^{ki} f'_{2i} +$$
$$+ \dots + b_{1\,(2k+1)}^{ki} f_{1i}^{(k-2)} + b_{1\,(2k+2)}^{ki} f_{2i}^{(k-2)} = [x_i],$$

$$b_{21}^{ki}([x_{i-1}] - R_{x,i-1}^k) + b_{22}^{ki}([y_{i-1}] - R_{y,i-1}^k) + b_{23}^{ki}([x_{i+1}] - R_{x,i+1}^k) +$$
$$+ b_{24}^{ki}([y_{i+1}] - R_{y,i+1}^k) + b_{25}^{ki} f_{1i} + b_{26}^{ki} f_{2i} + b_{27}^{ki} f'_{1i} + b_{28}^{ki} f'_{2i} +$$
$$+ \dots + b_{2\,(2k+1)}^{ki} f_{1i}^{(k-2)} + b_{2\,(2k+2)}^{ki} f_{2i}^{(k-2)} = [y_i],$$

где b_{jm}^{ki} — элементы матрицы B^{ki} в узле t_i, или, после преобразований,

$$- \frac{b_{11}^{ki}}{b_{15}^{ki}}[x_{i-1}] - \frac{b_{12}^{ki}}{b_{15}^{ki}}[y_{i-1}] + \frac{[x_i]}{b_{15}^{ki}} - \frac{b_{13}^{ki}}{b_{15}^{ki}}[x_{i+1}] - \frac{b_{14}^{ki}}{b_{15}^{ki}}[y_{i+1}] = f_{1i} +$$
$$+ \frac{b_{16}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f_{2i} + \frac{b_{17}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f'_{1i} + \frac{b_{18}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f'_{2i} + \dots + \frac{b_{1\,(2k+1)}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f_{1i}^{(k-2)} + \frac{b_{1\,(2k+2)}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f_{2i}^{(k-2)} -$$
$$- \frac{b_{11}^{ki} R_{x,i-1}^k + b_{13}^{ki} R_{x,i+1}^k}{b_{15}^{ki}} - \frac{b_{12}^{ki} R_{y,i-1}^k + b_{14}^{ki} R_{y,i+1}^k}{b_{15}^{ki}}, \quad (27)$$

$$- \frac{b_{21}^{ki}}{b_{26}^{ki}}[x_{i-1}] - \frac{b_{22}^{ki}}{b_{26}^{ki}}[y_{i-1}] + \frac{[y_i]}{b_{26}^{ki}} - \frac{b_{23}^{ki}}{b_{26}^{ki}}[x_{i+1}] - \frac{b_{24}^{ki}}{b_{26}^{ki}}[y_{i+1}] = \frac{b_{25}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f_{1i} +$$
$$+ f_{2i} + \frac{b_{27}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f'_{1i} + \frac{b_{28}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f'_{2i} + \dots + \frac{b_{2\,(2k+1)}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f_{1i}^{(k-2)} + \frac{b_{2\,(2k+2)}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f_{2i}^{(k-2)} -$$
$$- \frac{b_{21}^{ki} R_{x,i-1}^k + b_{23}^{ki} R_{x,i+1}^k}{b_{26}^{ki}} - \frac{b_{22}^{ki} R_{y,i-1}^k + b_{24}^{ki} R_{y,i+1}^k}{b_{26}^{ki}}. \quad (28)$$

Отбрасывание двух последних дробей в составленной из уравнений (27), (28) во внутренних узлах сетки D_h системе, что равносильно переходу от точного решения $[x_i]$, $[y_i]$ к искомому приближенному x_i, y_i, приведет эту систему к разностной краевой задаче (22). Следовательно, в соответствии с (23) две последние дроби в уравнениях (27), (28) характеризуют величину невязки в узлах t_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$; в итоге для рассматриваемой задачи имеем

$$\delta f_{1h}^{ki} = - \frac{b_{11}^{ki} R_{x,i-1}^k + b_{13}^{ki} R_{x,i+1}^k}{b_{15}^{ki}} - \frac{b_{12}^{ki} R_{y,i-1}^k + b_{14}^{ki} R_{y,i+1}^k}{b_{15}^{ki}}, \quad (29)$$

$$\delta f_{2h}^{ki} = - \frac{b_{21}^{ki} R_{x,i-1}^k + b_{23}^{ki} R_{x,i+1}^k}{b_{26}^{ki}} - \frac{b_{22}^{ki} R_{y,i-1}^k + b_{24}^{ki} R_{y,i+1}^k}{b_{26}^{ki}}. \quad (30)$$

Первое слагаемое в равенствах (29), (30) характеризует величину невязки, появление которой обусловлено функцией x, второе — функцией y.

Для краевой задачи с граничными условиями первого рода величины невязок в граничных узлах сетки обращаются в нуль в силу того, что два первых уравнения задачи (22) при $i = 1, n-1$ содержат заданные значения $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{y}_0$, $\widetilde{x}_n$, $\widetilde{y}_n$ искомых функций.

Исследуем невязки δf_{1h}^{ki} и δf_{2h}^{ki} во внутренних узлах сетки D_h.

В узле t_i введем компактные обозначения для определителей второго порядка, например

$$U_iV_i = \begin{vmatrix} u_{1i} & v_{1i} \\ u_{2i} & v_{2i} \end{vmatrix}, \tag{31}$$

где, очевидно, $U_iV_i = -V_iU_i$. В дальнейшем будем опускать индекс i в обозначениях определителей вида (31).

Непосредственными вычислениями можно для любого $k \geqslant 3$ убедиться в справедливости оценки

$$M_{11}^{ki} \approx (UV)^{k-2}\, M_{11}^{2i}, \tag{32}$$

где M_{11}^{ki} — алгебраическое дополнение элемента a_{11}^{ki} транспонированной локальной матрицы A^{ki}. Отсутствие в настоящей работе полного вывода формулы (32) обусловлено лишь громоздкостью выкладок. Для краевых задач для одного ОДУ2 полный вывод формулы (32) дан в [12]. Тем не менее рассмотрим частный случай при $k = 3$, опуская индекс i — номер узла сетки. Воспользуемся в дальнейшем известными свойствами определителя [16]. Имеем, пренебрегая старшими степенями, следующее:

$$M_{11}^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & s_1 & s_2 & s_1' & s_2' \\ 0 & h & 0 & p_1 & p_2 & \widetilde{p}_1 & \widetilde{p}_2 \\ -h & 0 & h & q_1 & q_2 & \widetilde{q}_1 & \widetilde{q}_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & 0 & u_1 & u_2 & \widetilde{u}_1 & \widetilde{u}_2 \\ \frac{h^2}{2} & 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 & \widetilde{v}_1 & \widetilde{v}_2 \\ 0 & \frac{h^3}{3!} & 0 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ -\frac{h^3}{3!} & 0 & \frac{h^3}{3!} & 0 & 0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \frac{h^3}{3!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & s_1 & s_2 & s_1' & s_2' \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 & \widetilde{p}_1 & \widetilde{p}_2 \\ -h & h & q_1 & q_2 & \widetilde{q}_1 & \widetilde{q}_2 \\ 0 & 0 & u_1 & u_2 & \widetilde{u}_1 & \widetilde{u}_2 \\ \frac{h^2}{2} & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 & \widetilde{v}_1 & \widetilde{v}_2 \\ -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & 0 & 0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} +$$

$$+\, u_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & s_1 & s_2 & s_2' \\ 0 & h & 0 & p_1 & p_2 & \widetilde{p}_2 \\ -h & 0 & h & q_1 & q_2 & \widetilde{q}_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & 0 & u_1 & u_2 & \widetilde{u}_2 \\ \frac{h^2}{2} & 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 & \widetilde{v}_2 \\ -\frac{h^3}{3!} & 0 & \frac{h^3}{3!} & 0 & 0 & v_2 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & s_1 & s_2 & s_1' \\ 0 & h & 0 & p_1 & p_2 & \widetilde{p}_1 \\ -h & 0 & h & q_1 & q_2 & \widetilde{q}_1 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & 0 & u_1 & u_2 & \widetilde{u}_1 \\ \frac{h^2}{2} & 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 & \widetilde{v}_1 \\ -\frac{h^3}{3!} & 0 & \frac{h^3}{3!} & 0 & 0 & v_1 \end{vmatrix} =$$

$$= c_3\, h^6 + O\left(h^7\right) + u_1\, \left(d_3\, h^4 + O\left(h^5\right) + v_2\, M_{11}^2\right) -$$

$$-\, u_2\, \left(g_3\, h^4 + O\left(h^5\right) + v_1\, M_{11}^2\right) \approx (u_1v_2 - u_2v_1)\, M_{11}^2 = UV\, M_{11}^2,$$

где $\widetilde{p}_j$, $\widetilde{q}_j$, $\widetilde{u}_j$, $\widetilde{v}_j$, $j = 1, 2,$ — функции от p_j, q_j, u_j, v_j и их первых производных, c_3, d_3, g_3 — не зависящие от h величины.

Формулы, аналогичные (32), имеют место, по крайней мере, для первых шести элементов первой и второй строк матрицы $(A^{ki})^\top$; на основании чего и очевидных равенств

$$\frac{b_{1j}^{ki}}{b_{15}^{ki}} = \frac{M_{1j}^k}{M_{15}^k}, \quad \frac{b_{2j}^{ki}}{b_{26}^{ki}} = \frac{M_{2j}^k}{M_{26}^k}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

следуют оценки

$$\frac{b_{1j}^{ki}}{b_{15}^{ki}} \approx \frac{M_{1j}^2}{M_{15}^2}, \quad \frac{b_{2j}^{ki}}{b_{26}^{ki}} \approx \frac{M_{2j}^2}{M_{26}^2}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{33}$$

Невязка (29) с учетом соотношений (33) примет вид

$$\delta f_{1h}^{ki} \approx -\frac{M_{11}^2 R_{x,i-1}^k + M_{13}^2 R_{x,i+1}^k}{M_{15}^2} - \frac{M_{12}^2 R_{y,i-1}^k + M_{14}^2 R_{y,i+1}^k}{M_{15}^2}. \tag{34}$$

Вычислим оценки первых пяти алгебраических дополнений первой строки матрицы $\left(A^{2i}\right)^\top$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Имеем, пренебрегая старшими степенями, следующее:

$$M_{11}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & s_1 & s_2 \\ 0 & h & 0 & p_1 & p_2 \\ -h & 0 & h & q_1 & q_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & 0 & u_1 & u_2 \\ \frac{h^2}{2} & 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} = -2\,h^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & s_1 & s_2 \\ 1 & 0 & p_1 & p_2 \\ \frac{h}{2} & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\,h^2 \left(-\begin{vmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ 0 & u_1 & u_2 \\ \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} + \frac{h}{2} \begin{vmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ 0 & p_1 & p_2 \\ \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -2\,h^2 \Big(-UV - \frac{h^2}{2}\,SU + \frac{h}{2}\,\Big(PV + \frac{h^2}{2}\,SP\Big)\Big) =$$

$$= 2\,h^2 \Big(UV - \frac{h}{2} PV + \frac{h^2}{2} SU - \frac{h^3}{4} SP\Big) \approx h^2\,(2\,UV - h\,PV)\,, \tag{35}$$

где были использованы обозначения определителей, аналогичные введенным формулой (31),

$$M_{13}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & s_1 & s_2 \\ -h & 0 & 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & -h & h & q_1 & q_2 \\ \frac{h^2}{2} & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,h^2 \Big(UV + \frac{h}{2} PV + \frac{h^2}{2} SU + \frac{h^3}{4} SP\Big) \approx h^2\,(2\,UV + h\,PV)\,, \tag{36}$$

$$M_{12}^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & s_1 & s_2 \\ -h & h & 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & h & q_1 & q_2 \\ \frac{h^2}{2} & \frac{h^2}{2} & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} = -h^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & s_1 & s_2 \\ 0 & h & q_1 & q_2 \\ 1 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -h^3 \begin{vmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ h & q_1 & q_2 \\ \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} = h^3 \Big(-QV + h\, SV - \frac{h^2}{2}\, SQ \Big) \approx h^3 \left(-QV + h\, SV \right), \quad (37)$$

$$M_{14}^2 = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & s_1 & s_2 \\ -h & 0 & h & p_1 & p_2 \\ 0 & -h & 0 & q_1 & q_2 \\ \frac{h^2}{2} & 0 & \frac{h^2}{2} & u_1 & u_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & 0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \approx h^3 \left(QV + h\, SV \right), \quad (38)$$

$$M_{15}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & s_2 \\ -h & 0 & h & 0 & p_2 \\ 0 & -h & 0 & h & q_2 \\ \frac{h^2}{2} & 0 & \frac{h^2}{2} & 0 & u_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & 0 & \frac{h^2}{2} & v_2 \end{vmatrix} = -4\, h^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & s_2 \\ 1 & 0 & h & q_2 \\ 0 & \frac{h}{2} & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{2} & v_2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2\, h^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & s_2 \\ 1 & 0 & u_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & v_2 \end{vmatrix} = 2\, h^4 \Big(-v_2 + s_2\, \frac{h^2}{2} \Big) \approx -2\, h^4\, v_2. \quad (39)$$

С учетом оценок (35)–(39) величину невязки (34), появление которой обусловлено первым уравнением задачи (22), на точном решении $[x_i]$, $[y_i]$ во внутренних узлах t_i сетки D_h задачи L_h^k запишем как

$$\delta f_{1h}^{ki} \approx - \frac{h^2 \big((2\, UV - h\, PV)\, R_{x,i-1}^k + (2\, UV + h\, PV)\, R_{x,i+1}^k \big)}{-2\, h^4\, v_2} -$$
$$- \frac{h^3 \big((-QV + h\, SV)\, R_{y,i-1}^k + (QV + h\, SV)\, R_{y,i+1}^k \big)}{-2\, h^4\, v_2} =$$
$$= \frac{2\, UV (R_{x,i+1}^k + R_{x,i-1}^k) + h\, PV (R_{x,i+1}^k - R_{x,i-1}^k)}{2\, h^2\, v_2} +$$
$$+ \frac{QV (R_{y,i+1}^k - R_{y,i-1}^k) + h\, SV (R_{y,i+1}^k + R_{y,i-1}^k)}{2\, h\, v_2} \quad (40)$$

для произвольного $k \geqslant 2$.

Из оценки (40) для четного k с учетом (18), (19) имеем

$$\delta f_{1h}^{ki} \approx \frac{2\, UV\, O(h^{k+2}) + h\, PV\, O(h^{k+1})}{2\, h^2\, v_2} + \frac{QV\, O(h^{k+1}) + h\, SV\, O(h^{k+2})}{2\, h\, v_2} =$$
$$= O(h^k) + O(h^k) + O(h^k) + O(h^{k+2}) = O(h^k), \quad (41)$$

а для нечетного k с учетом (20), (21) имеем

$$\delta f_{1h}^{ki} \approx \frac{2\, UV\, O(h^{k+1}) + h\, PV\, O(h^{k+2})}{2\, h^2\, v_2} + \frac{QV\, O(h^{k+2}) + h\, SV\, O(h^{k+1})}{2\, h\, v_2} =$$

$$= O(h^{k-1}) + O(h^{k+1}) + O(h^{k+1}) + O(h^{k+1}) = O(h^{k-1}) \quad (42)$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Исследование невязки (30) дало схожий результат:

$$\delta f_{2h}^{ki} \approx O(h^k) \quad (43)$$

для четного k и

$$\delta f_{2h}^{ki} \approx O(h^{k-1}) \quad (44)$$

для нечетного k.

Из оценки (41) следует, что при четном k вклады функций x, y в величину невязки δf_{1h}^{ki} сравнимы между собой, тогда как оценка (42) показывает, что при нечетном k обусловленная функцией x составляющая невязки как имеющая более низкий порядок играет главенствующую роль по сравнению с составляющей, обусловленной функцией y. Практически аналогичной оказалась ситуация с невязкой δf_{2h}^{ki} с тем лишь отличием, что при нечетном k главенствующую роль во вкладе в величину невязки играет функция y.

В итоге в соответствии с (24) норму невязки в равенстве (23) запишем для четного k с учетом (41), (43) как

$$\|\delta f_h^k\| = \max \begin{cases} \|\delta f_{1h}^k\| \\ \|\delta f_{2h}^k\| \end{cases} = \max \begin{cases} \max\left(|\delta f_{1h}^{k0}|, |\delta f_{1h}^{k1}|, \ldots, |\delta f_{1h}^{kn}|\right) \\ \max\left(|\delta f_{2h}^{k0}|, |\delta f_{2h}^{k1}|, \ldots, |\delta f_{2h}^{kn}|\right) \end{cases} =$$

$$= \max \begin{cases} O(h^k) \\ O(h^k) \end{cases} = O(h^k), \quad (45)$$

и для нечетного k с учетом (42), (44) как

$$\|\delta f_h^k\| = O(h^{k-1}). \quad (46)$$

Анализ норм невязок (45), (46) показывает, что задачи L_h^{2m}, L_h^{2m+1}, где m — натуральное число, имеют одинаковый порядок аппроксимации. Следовательно, на практике для уменьшения объема вычислений следует использовать задачи L_h^k с четными значениями k. Действительно, число арифметических операций только для нахождения обратной матрицы от матрицы размерности n методом Гаусса вычисляется по формуле $\frac{8}{3}n^3 - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} - 1$ [17]. Вывод о правомерности выбора четного значения k ниже будет подтвержден численным экспериментом.

Значение алгебраического дополнения $M_{26}^2 \approx -2h^4 u_1$ имеет, как следует из (39), одинаковый порядок малости с алгебраическим дополнением M_{15}^2, что свидетельствует о несущественной роли в использовании M_{15}^2 или M_{26}^2 или, что то же самое, в использовании b_{15}^{ki} или b_{26}^{ki} при вычислении невязок по формулам (29), (30).

4. Оценка погрешностей. При выполнении численного эксперимента в качестве суммарной оценки относительных погрешностей использованы следующие нормы:

$$D_x^k = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} (x_i - [x_i])^2}}{\sum_{i=0}^{n} \big|[x_i]\big|} \cdot 100\,\%, \quad D_y^k = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} (y_i - [y_i])^2}}{\sum_{i=0}^{n} \big|[y_i]\big|} \cdot 100\,\%, \quad (47)$$

которые можно трактовать как некий аналог коэффициента вариации в статистике, характеризующий меру разброса в процентах [18], а в качестве максимальной оценки абсолютных погрешностей:

$$E_x^k = \max\bigl|x_i - [x_i]\bigr|, \quad E_y^k = \max\bigl|y_i - [y_i]\bigr|, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{48}$$

В качестве примера использована имеющая аналитическое решение система нелинейных ОДУ2 вида (2)

$$\begin{cases} x'' - tx' - \dfrac{t^2+2}{t^2}x - ty'' = 2t\cos t, \\ \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{x}{t} + y'' + \dfrac{t^2-4}{2t^2}y = -2t\sin t \end{cases} \tag{49}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} x(2\pi) = 0, \quad y(2\pi) = 4\pi^2, \\ x(3\pi) = 0, \quad y(3\pi) = -9\pi^2. \end{cases} \tag{50}$$

В вычислениях использовались следующие параметры сетки: $n = 15$, $h = 0.20944$. Результаты численного эксперимента для краевой задачи (49) с граничными условиями (50) приведены в табл. 1, 2.

В табл. 2 нормы $D_{x'}^k$, $D_{y'}^k$, $E_{x'}^k$, $E_{y'}^k$ для производных $x'(t)$, $y'(t)$ характеризуют суммарные оценки относительных погрешностей. Максимальные оценки абсолютных погрешностей, соответственно, вычислены по формулам (47), (48), в которых значения функций заменены на значения своих первых производных, найденных по формулам (10), (11), во внутренних узлах области интегрирования; найденных при вычисленных $x_1^{(j)}$, $y_1^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, по (10)–(13) при $i = 1$ по формулам

$$x_0' = x_1' - hx_1'' + \frac{h^2}{2!}x_1''' - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}x_1^{(k)}, \tag{51}$$

$$y_0' = y_1' - hy_1'' + \frac{h^2}{2!}y_1''' - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}y_1^{(k)} \tag{52}$$

в левой границе $t_0 = a$; найденных x_n', y_n' по аналогичным (51), (52) разложениям в правой границе $t_n = b$.

Таблица 1

Значения погрешностей для решения краевой задачи (49), (50) [The values of the errors for the solution of the boundary value problem (49), (50)]

k	2	3	4	5	6	7
$D_x^k, \%$	$1.62 \cdot 10^{-1}$	$1.47 \cdot 10^{-1}$	$4.21 \cdot 10^{-4}$	$1.70 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-5}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$
$D_y^k, \%$	$1.21 \cdot 10^{-1}$	$2.13 \cdot 10^{-1}$	$6.96 \cdot 10^{-4}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$9.85 \cdot 10^{-6}$	$1.09 \cdot 10^{-5}$
E_x^k	$3.59 \cdot 10^{-1}$	$3.47 \cdot 10^{-1}$	$1.01 \cdot 10^{-3}$	$4.34 \cdot 10^{-4}$	$3.45 \cdot 10^{-5}$	$3.52 \cdot 10^{-5}$
E_y^k	$2.19 \cdot 10^{-1}$	$3.56 \cdot 10^{-1}$	$1.15 \cdot 10^{-3}$	$7.21 \cdot 10^{-4}$	$1.77 \cdot 10^{-5}$	$1.97 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2

Значения погрешностей для первых производных решения краевой задачи (49), (50)
[The values of the errors for the first derivatives of the boundary value problem (49), (50)]

k	2	3	4	5	6	7
$D^k_{x'}, \%$	$4.53 \cdot 10^{-1}$	$1.98 \cdot 10^{-1}$	$1.31 \cdot 10^{-3}$	$2.80 \cdot 10^{-4}$	$3.78 \cdot 10^{-5}$	$3.86 \cdot 10^{-5}$
$D^k_{y'}, \%$	$3.43 \cdot 10^{-1}$	$1.50 \cdot 10^{-1}$	$1.09 \cdot 10^{-3}$	$2.90 \cdot 10^{-4}$	$2.34 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$
$E^k_{x'}$	$7.32 \cdot 10^{-1}$	$4.07 \cdot 10^{-1}$	$2.27 \cdot 10^{-3}$	$5.09 \cdot 10^{-4}$	$7.09 \cdot 10^{-5}$	$7.08 \cdot 10^{-5}$
$E^k_{y'}$	$8.20 \cdot 10^{-1}$	$3.90 \cdot 10^{-1}$	$2.57 \cdot 10^{-3}$	$6.94 \cdot 10^{-4}$	$5.66 \cdot 10^{-5}$	$5.88 \cdot 10^{-5}$

Практически аналогичный характер изменения погрешностей (динамика и абсолютные значения) имел место для ряда систем ОДУ2, в частности для системы

$$\begin{cases} (1+t)x'' + 2x + ty'' - 2y = 2\sin 2t, \\ x'' + 2x - 2ty' = 2(1+t^2)\sin 2t \end{cases}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} x(2\pi) = 0, \quad y(2\pi) = 2\pi, \\ x(3\pi) = 0, \quad y(3\pi) = 3\pi. \end{cases}$$

Анализ данных табл. 1, 2 свидетельствует, что суммарные относительные D^k_x, D^k_y, $D^k_{x'}$, $D^k_{y'}$ и максимальные абсолютные E^k_x, E^k_y, $E^k_{x'}$, $E^k_{y'}$ погрешности задач L^{2m}_h и L^{2m+1}_h, имеющих одинаковый порядок аппроксимации, различаются незначительно для любого натурального $m = 1, 2, 3$.

Выводы.

1. Теоретически выявлены закономерности между порядком аппроксимации матричного метода и степенью k используемого многочлена Тейлора в разностных краевых задачах для систем линейных ОДУ2 с граничными условиями первого рода. Установлено, что порядок аппроксимации разностных краевых задач L^{2m}_h и L^{2m+1}_h совпадает и равен $2m$ для натурального числа m.
2. При четном k вклады функций x, y в величины невязок δf^{ki}_{1h}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, сравнимы между собой; при нечетном k обусловленные функцией x составляющие невязок как имеющие более низкий порядок играют главенствующую роль по сравнению с составляющими, обусловленными функцией y. Практически аналогичной оказалась ситуация с невязками δf^{ki}_{2h} с тем лишь отличием, что при нечетном k главенствующую роль во вклады в величины невязок играет функция y.

Декларация о финансовых и других взаимоотношениях. Исследование не имело спонсорской поддержки. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена автором. Автор не получал гонорар за статью.

ORCID
Владимир Николаевич Маклаков: http://orcid.org/0000-0003-1644-7424

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Keller H. B. Accurate Difference Methods for Nonlinear Two-point Boundary Value Problems // *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974. vol. 11, no. 2. pp. 305–320. doi: 10.1137/0711028.

2. Lentini M., Pereyra V. A Variable Order Finite Difference Method for Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems // *Mathematics of Computation*, 1974. vol. 28, no. 128. pp. 981–1003. doi: 10.2307/2005360.
3. Keller H. B. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations: Survey and Some Resent Results on Difference Methods / *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. New York: Academic Press, 1975. pp. 27–88. doi: 10.1016/b978-0-12-068660-5.50007-7.
4. Годунов С. К., Рябенький В. С. *Разностные схемы*. М.: Наука, 1977. 439 с.
5. Формалеев В. Ф., Ревизников Д. Л. *Численные методы*. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
6. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1977. 656 с.
7. Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы*. М.: Наука, 1973. 432 с.
8. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем*. М.: Наука, 1973. 416 с.
9. Boutayeb A., Chetouani A. Global extrapolations of numerical methods for solving a parabolic problem with non local boundary conditions // *International Journal of Computer Mathematics*, 2003. vol. 80, no. 6. pp. 789–797. doi: 10.1080/0020716021000039209.
10. Boutayeb A., Chetouani A. A Numerical Comparison of Different Methods Applied to the Solution of Problems with Non Local Boundary Conditions // *Applied Mathematical Sciences*, 2007. vol. 1, no. 44. pp. 2173–2185, http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password41-44-2007/boutayebAMS41-44-2007.pdf.
11. Радченко В. П., Усов А. А. Модификация сеточных методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на основе тейлоровских разложений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 60–65. doi: 10.14498/vsgtu646.
12. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 36. С. 143–160. doi: 10.14498/vsgtu1364.
13. Самарский А. А., Николаев Е. С. *Методы решения сеточных уравнений*. М.: Наука, 1978. 592 с.
14. Рябенький В. С. Необходимые и достаточные условия хорошей обусловленности краевых задач для систем обыкновенных разностных уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1964. Т. 4, № 2. С. 242–255.
15. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
16. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры*. М.: Наука, 1975. 431 с.
17. Турчак Л. И. *Основы численных методов*. М.: Наука, 1987. 320 с.
18. Закс Л. *Статистическое оценивание*. М.: Статистика, 1976. 598 с.

Поступила в редакцию 15/VII/2016;
в окончательном варианте — 27/VIII/2016;
принята в печать — 16/IX/2016.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 389–409

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1511

MSC: 34B99

THE EVALUATION OF THE ORDER OF APPROXIMATION OF THE MATRIX METHOD FOR NUMERICAL INTEGRATION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF LINEAR NON-HOMOGENEOUS ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER WITH VARIABLE COEFFICIENTS. MESSAGE 1. BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH BOUNDARY CONDITIONS OF THE FIRST KIND

V. N. Maklakov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

We present the first message of the cycle from two articles where the rearrangement of the order of approximation of the matrix method of numerical integration depending on the degree in the Taylor's polynomial expansion of solutions of boundary value problems for systems of ordinary differential equations of the second order with variable coefficients with boundary conditions of the first kind were investigated. The Taylor polynomial of the second degree use at the approximation of derivatives by finite differences leads to the second order of approximation of the traditional method of nets. In the study of boundary value problems for systems of ordinary differential equations of the second order we offer the previously proposed method of numerical integration with the use of matrix calculus where the approximation of derivatives by finite differences was not performed. According to this method a certain degree of Taylor polynomial can be selected for the construction of the difference equations system. The disparity is calculated and the order of the method of approximation is assessed depending on the chosen degree of Taylor polynomial. It is theoretically shown that for the boundary value problem with boundary conditions of the first kind the order of approximation method increases with the degree of the Taylor polynomial and is equal to this degree only for its even values. For odd values of the degree the order of approximation is less by one. The theoretical conclusions are confirmed by a numerical experiment for boundary value problems with boundary conditions of the first kind.

Please cite this article in press as:
Maklakov V. N. The evaluation of the order of approximation of the matrix method for numerical integration of the boundary value problems for systems of linear non-homogeneous ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. Message 1. Boundary value problems with boundary conditions of the first kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 389–409. doi: 10.14498/vsgtu1511. (In Russian)

Author Details:
Vladimir N. Maklakov (Cand. Phys. & Math. Sci.; makvo63@yandex.ru), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics and Applied Informatics.

Keywords: ordinary differential equations, ordinary differential equation systems, boundary value problems, boundary conditions of the first, second and third kind, order of approximation, numerical methods, Taylor polynomials.

Declaration of Financial and Other Relationships. The research has not had any sponsorship. The author is absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. The author has approved the final version of manuscript. The author has not received any fee for the article.

ORCID
Vladimir N. Maklakov: http://orcid.org/0000-0003-1644-7424

REFERENCES

1. Keller H. B. Accurate Difference Methods for Nonlinear Two-point Boundary Value Problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974, vol. 11, no. 2, pp. 305–320. doi: 10.1137/0711028.
2. Lentini M., Pereyra V. A Variable Order Finite Difference Method for Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems, *Mathematics of Computation*, 1974, vol. 28, no. 128, pp. 981–1003. doi: 10.2307/2005360.
3. Keller H. B. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations: Survey and Some Resent Results on Difference Methods, *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations.* New York, Academic Press, 1975, pp. 27–88. doi: 10.1016/b978-0-12-068660-5.50007-7.
4. Godunov S. K., Ryaben'kii V. S. *Raznostnye skhemy* [Difference Scheme]. Moscow, Nauka, 1977, 439 pp. (In Russian)
5. Formaleev V. F., Reviznikov D. L. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 400 pp. (In Russian)
6. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977, 656 pp. (In Russian)
7. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, Nauka, 1973, 432 pp. (In Russian)
8. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* [The stability of difference schemes]. Moscow, Nauka, 1973, 416 pp. (In Russian)
9. Boutayeb A., Chetouani A. Global extrapolations of numerical methods for solving a parabolic problem with non local boundary conditions, *International Journal of Computer Mathematics*, 2003, vol. 80, no. 6, pp. 789–797. doi: 10.1080/0020716021000039209.
10. Boutayeb A., Chetouani A. A Numerical Comparison of Different Methods Applied to the Solution of Problems with Non Local Boundary Conditions, *Applied Mathematical Sciences*, 2007, vol. 1, no. 44, pp. 2173–2185, http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password41-44-2007/boutayebAMS41-44-2007.pdf.
11. Radchenko V. P., Usov A. A. Modified grid method for solving linear differential equation equipped with variable coefficients based on Taylor series, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2008, no. 2(17), pp. 60–65 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu646.
12. Maklakov V. N. Estimation of the Order of the Matrix Method Approximation of Numerical Integration of Boundary-Value Problems for Inhomogeneous Linear Ordinary Differential Equations of the Second Order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 36, pp. 143–160 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1364.
13. Samarskii A. A., Nikolaev E. S. *Metody resheniia setochnykh uravnenii* [Methods for solving grid equations]. Moscow, Nauka, 1978, 592 pp. (In Russian)
14. Ryaben'kii V. S. Necessary and sufficient conditions for good definition of boundary value problems for systems of ordinary difference equations, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1964, vol. 4, no. 2, pp. 43–61. doi: 10.1016/0041-5553(64)90105-3.

15. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniia* [Course of Differential and Integral Calculus], vol. 1. Moscow, Nauka, 1970, 608 pp. (In Russian)
16. Kurosh A. G. *Kurs vysshei algebry* [A Course of Higher Algebra]. Moscow, Nauka, 1975, 431 pp. (In Russian)
17. Turchak L. I. *Osnovy chislennykh metodov* [Fundamentals of numerical methods]. Moscow, Nauka, 1987, 320 pp. (In Russian)
18. Zaks L. *Statisticheskoe otsenivanie* [Statistical estimation]. Moscow, Statistika, 1976, 598 pp. (In Russian)

Received 15/VII/2016;
received in revised form 27/VIII/2016;
accepted 16/IX/2016.