Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 3. С. 410–422
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1491

УДК 517.956.2

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ШВАРЦА ДЛЯ J-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ОДИНАКОВЫМ ЖОРДАНОВЫМ БАЗИСОМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТИ МАТРИЦЫ J

В. Г. Николаев

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,
Россия, 173003, Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 41.

Аннотация

Изучена граничная задача Шварца для J-аналитических функций. Они представляют собой решения линейной комплексной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Рассмотрен тот случай, когда действительная и мнимая части матрицы J приводятся к треугольному виду одним и тем же комплексным преобразованием. В основной теореме доказан критерий для собственных чисел матрицы J, при выполнении которого в плоских областях, ограниченных контуром Ляпунова, решение задачи Шварца существует и единственно. Так же получена равносильная форма данного критерия, которая во многих случаях более удобна для проверки. При доказательстве теоремы используются известные факты о граничных свойствах λ-голоморфных функций. Само доказательство основано на методе прямой и обратной редукции задачи Шварца к задаче Дирихле для вещественных эллиптических систем в частных производных второго порядка. Построены примеры матриц, для которых указанный критерий выполнен.

Ключевые слова: задача Шварца, λ-голоморфная функция, контур Ляпунова, жорданова форма, жорданов базис, характеристическое уравнение, эллиптическая система, задача Дирихле.

Введение. Обобщением понятия голоморфных функций являются функции, аналитические по Дуглису (A. Douglis) [1–3].

Определение 1 [1]. Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ не имеет вещественных собственных чисел. Аналитической по Дуглису (или J-аналитической с матрицей J) называется комплексная n-вектор-функция $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$, для которой в области $D \subset \mathbb{R}^2$ выполнено уравнение

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad z \in D. \tag{1}$$

Образец для цитирования
Николаев В. Г. О решениях задачи Шварца для J-аналитических функций с одинаковым жордановым базисом действительной и мнимой части матрицы J // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 3. С. 410–422. doi: 10.14498/vsgtu1491.

Сведения об авторе
Владимир Геннадьевич Николаев (к.ф.-м.н.; vg14@inbox.ru), доцент, каф. алгебры и геометрии.

Определение 2. В скалярном случае при $J = \lambda$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ функцию $f_\lambda(z) \in C^1(D)$, для которой в области $D \subset \mathbb{R}^2$ выполнено уравнение

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = 0, \quad z \in D, \tag{2}$$

назовем λ-голоморфной в области D.

При $\lambda = i$ функции (2) совпадают с обычными голоморфными.

Определение 3. Будем говорить, что функция $\phi(z)$ соответствует матрице J, если выполнено уравнение (1).

Как показано в [2], комплексная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (1) является эллиптической. Рассмотрим для системы (1) следующую граничную задачу Шварца [1,2].

Задача Шварца. *Пусть конечная односвязная область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена гладким контуром Γ. Требуется найти J-аналитическую с матрицей J в области D функцию $\phi(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in C(\overline{D})$, которая удовлетворяет краевому условию*

$$\operatorname{Re}\phi(z)\big|_\Gamma = \varphi(z), \tag{3}$$

где вещественная граничная вектор-функция $\varphi(z) = \big(\varphi_1, \dots, \varphi_n\big) \in C(\Gamma)$ задана.

При $\varphi \equiv 0$ будем говорить об *однородной задаче* Шварца. Очевидными решениями последней служат постоянные векторы $\phi = i\overline{c}$, $\overline{c} \in \mathbb{R}^n$, которые принято называть *тривиальными решениями.*

Отметим, что задача Шварца (3) равносильна краевым задачам для многих видов эллиптических систем дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядков [3–9]. Эти системы, в свою очередь, имеют широкое применение в теории упругости [10–13], поэтому изучение задачи Шварца имеет как чисто теоретический, так и прикладной интерес.

Как известно, при $n = 1$ *однородная* задача (3) имеет только тривиальные решения при любом типе границы Γ области D. *Неоднородную* задачу Шварца удобно рассматривать [2] в областях, ограниченных контуром Ляпунова. Поэтому приведем следующее известное

Определение 4 [14]. Гладкая кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ называется кривой Ляпунова, если существуют такие два вещественных числа $a > 0$ и b, $0 < b \leqslant 1$, что для любых двух точек $z_1, z_2 \in \Gamma$ выполняется условие Ляпунова

$$|\theta| < a \cdot |z_1 - z_2|^b,$$

где θ — угол между касательными или нормалями к Γ в точках z_1, z_2.

Примерами кривых Ляпунова могут служить окружность и эллипс.

При $n = 1$ имеет место следующая теорема существования и единственности решения неоднородной задачи Шварца.

Теорема 1 (Н. И. Мусхелишвили, [14]). *Пусть $\Gamma = \partial D$ — контур Ляпунова, граничная функция $\varphi(z)$ принадлежит классу Гельдера $H^\sigma(\Gamma)$, $0 < \sigma < 1$. Тогда можно построить единственную (с точностью до постоянной) голоморфную в D функцию $f(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ по условию $\operatorname{Re} f(z)\big|_\Gamma = \varphi(z)$.*

Обозначим $\lambda = a+bi$, a, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Как известно, голоморфная функция $f(x,y)$ становится λ-голоморфной $f_\lambda(x',y')$ в результате линейного обратимого преобразования $x = x'+ay'$, $y = by'$. Поэтому теорема 1 справедлива и для λ-голоморфных функций $f_\lambda(z)$.

Однако при $n \geqslant 2$ вопрос существования и единственности решений задачи Шварца уже намного сложнее. В частности, известны примеры нетривиальных решений однородной задачи Шварца [15]. Приведем один из них.

Пример 1. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} 1-2i & 48-8i \\ \frac{1}{2} & 2+8i \end{pmatrix},$$

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} 12x^2+32xy+46y^2-1+(-x^2+22xy+27y^2)\cdot i \\ (3x^2+8xy+30y^2)\cdot \frac{i}{4} \end{pmatrix}.$$

Функция $\phi(z)$ соответствует матрице J, которая имеет разные собственные числа $\lambda = 2+4i$, $\mu = 1+2i$. Как нетрудно видеть, $\operatorname{Re}\phi(z)\big|_\Gamma = 0$ на эллипсе Γ: $12x^2+32xy+46y^2 = 1$.

1. Редукция задачи Шварца к задаче Дирихле для эллиптических систем. Ниже (теорема 4) будет доказан аналог теоремы 1 для вектор-функций, аналитических по Дуглису со специальной матрицей J при $n \geqslant 2$. Прежде чем сформулировать данную теорему, выполним следующее преобразование задачи Шварца.

Обозначим $\phi = u+iv$, где $u = \operatorname{Re}\phi$ и $v = \operatorname{Im}\phi$ — вещественные n-вектор-функции, и подставим матрицу

$$J = A+Bi, \quad A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \det B \neq 0 \tag{4}$$

в уравнение (1). Приравнивая к нулю действительные и мнимые части, получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} - A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} - A\frac{\partial v}{\partial x} - B\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Из системы (5) выразим частные производные функции v:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = B^{-1}A\frac{\partial u}{\partial x} - B^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \left(B+AB^{-1}A\right)\frac{\partial u}{\partial x} - AB^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{6}$$

Из (6) с учетом условия замкнутости имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[B^{-1}A\frac{\partial u}{\partial x} - B^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(B+AB^{-1}A\right)\frac{\partial u}{\partial x} - AB^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right],$$

или

$$B\cdot(B+AB^{-1}A)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - B\cdot(AB^{-1}+B^{-1}A)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{7}$$

В работе [2] показано, что вещественная система (7) будет эллиптической. Как нетрудно видеть, имеет место

Лемма 1. *Если существует решение $\phi = u + iv$ задачи Шварца (3), соответствующее данной матрице $J = A + Bi$, то функция $u(x, y)$ будет решением задачи Дирихле*

$$u(x,y)\big|_{\Gamma} = \varphi(z) \tag{8}$$

для системы (7).

В обратную сторону утверждение леммы 1 не всегда верно. Но в частных случаях приведенная выше редукция уравнения (1) к уравнению (7) обратима — на этом будет основано доказательство основой теоремы 4.

2. Основная теорема. Сначала приведем формулировки двух теорем, которые будут использованы ниже, а также сделаем вспомогательные построения.

Теорема 2 (А. П. Солдатов, [2]). *Пусть $\Gamma = \partial D$ — кривая Ляпунова и пусть $(\operatorname{Im}\lambda)\cdot(\operatorname{Im}\mu) < 0$. Тогда для любой граничной функции $\varphi(z)$ из класса Гельдера $H^{\sigma}(\Gamma)$, $0 < \sigma < 1$, решение задачи*

$$f_{\lambda}(z) + f_{\mu}(z) = \varphi(z), \quad z \in \Gamma$$

в классе функции $f_{\lambda}(z)$, $f_{\mu}(z) \in H^{\sigma}(\overline{D})$ существует и единственно (с точностью до константы).

Теорема 3 (Е. Ю. Панов, [16]). *Пусть $\Gamma = \partial D$ — жорданова кривая. Пусть λ- и μ-голоморфные функции $f_{\lambda}(z)$, $f_{\mu}(z) \in \operatorname{Lip}(\overline{D})$, причем $(\operatorname{Im}\lambda) \times \times (\operatorname{Im}\mu) < 0$ и $f_{\lambda}(z) = f_{\mu}(z)$ на Γ. Тогда $f_{\lambda}(z) = f_{\mu}(z) \equiv \mathrm{const}$.*

Предположим далее, что вещественные матрицы A, B в (4) обладают следующим свойством: для некоторой матрицы $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ матрицы $J_1 = Q^{-1}AQ$ и $J_2 = Q^{-1}BQ$ — *нижне-треугольные.* Матрица Q в частном случае может быть жордановым базисом для A, B (но может им и не быть). Приведем наиболее простой пример таких матриц: $J = \alpha E + Ai$ и $J = A + \alpha iE$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Пусть $\overline{J} = A - Bi$ — сопряжение матрицы $J = A + Bi$ по аналогии с сопряжением комплексного числа. Очевидно, что матрицы

$$\begin{aligned} J' &= Q^{-1}JQ = Q^{-1}AQ + Q^{-1}BQi = J_1 + J_2 i,\\ J'' &= Q^{-1}\overline{J}Q = Q^{-1}AQ - Q^{-1}BQi = J_1 - J_2 i \end{aligned} \tag{9}$$

тоже будут нижне-треугольными.

Обозначим через λ_{1k}, λ_{2k} собственные числа матриц $Q^{-1}JQ$, $Q^{-1}\overline{J}Q$, соответственно, стоящие на k-той строке матриц J', J'' в (9).

Пусть выполнены следующие неравенства:

$$(\operatorname{Im}\lambda_{1k})\cdot(\operatorname{Im}\lambda_{2k}) < 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Прежде чем сформулировать теорему 4, преобразуем систему неравенств (10) к равносильной форме (11). Она не будет использована при доказательстве теоремы 4, но удобна для практических вычислений.

Обозначим через λ_k, μ_k, $k = 1, \ldots, n$, собственные числа матриц J_1, J_2 в (9) соответственно (то есть собственные числа матриц A и B), стоящие на k-той строке. Тогда с учетом (10) имеем:

$$0 > (\operatorname{Im}\lambda_{1k}) \cdot (\operatorname{Im}\lambda_{2k}) = \operatorname{Im}(\lambda_k + i\mu_k) \cdot \operatorname{Im}(\lambda_k - i\mu_k) = \\ = (\operatorname{Im}\lambda_k + \operatorname{Re}\mu_k) \cdot (\operatorname{Im}\lambda_k - \operatorname{Re}\mu_k) = (\operatorname{Im}\lambda_k)^2 - (\operatorname{Re}\mu_k)^2,$$

что равносильно системе неравенств

$$|\operatorname{Im}\lambda_k| < |\operatorname{Re}\mu_k|, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Покажем, что справедлива

Теорема 4. *Пусть матрица $J = A + Bi$, A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, причем матрицы $J_1 = Q^{-1}AQ$ и $J_2 = Q^{-1}BQ$ — нижне-треугольные в некотором базисе Q. Пусть также выполнены неравенства (10), или, что то же, (11). Тогда*

1) *если жордановы формы матриц A, B диагональны, Q — их жорданов базис и $\Gamma = \partial D$ — контур Ляпунова, то для любой граничной вектор-функции $\varphi(z) \in H^\sigma(\Gamma)$, $0 < \sigma < 1$ решение неоднородной задачи Шварца (3) в классе функций $\phi(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ существует и единственно (с точностью до вектор-константы);*
2) *если жордановы формы матриц A, B произвольны и $\Gamma = \partial D$ — жорданова кривая, то решения однородной ($\varphi \equiv 0$) задачи Шварца (3) в классе функций $\phi(z) \in \operatorname{Lip}(\overline{D})$ — только тривиальные, то есть $\phi \equiv i\bar{c}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.*

Таким образом, неравенства (10), (11) можно считать критерием (достаточным условием) существования и единственности решений задачи Шварца для функций, J-аналитических с данным типом матриц.

Доказательство. Покажем сначала, что из (10) вытекает условие $\det B \neq 0$, которое необходимо для применения формулы (7).

$\triangleright$ «От противного»: пусть $\det B = 0$ при выполнении (10). Тогда в (9) матрица J_2 имеет на главной диагонали хотя бы один нуль. Если при этом матрицы J_1, J_2 содержат нуль на одной и той же строке, то $\det J' = \det J = 0$, что противоречит определению матрицы J. Если же на некоторой строке матрица J_2 имеет нуль, а J_1 — ненулевой элемент, то получаем противоречие (10). Следовательно, $\det B \neq 0$. $\triangleleft$

Сделаем в (7) подстановки $A = QJ_1Q^{-1}$, $B = QJ_2Q^{-1}$, тогда (7) примет следующий вид:

$$\left[\, QJ_2^2Q^{-1} + QJ_2Q^{-1}QJ_1Q^{-1}QJ_2^{-1}Q^{-1}QJ_1Q^{-1} \,\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \\ - \left[\, QJ_2Q^{-1}QJ_1Q^{-1}QJ_2^{-1}Q^{-1} + QJ_1Q^{-1} \,\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \\ = Q\left[\, J_2^2 + J_1' \,\right] Q^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2QJ_1''Q^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{12}$$

В (12) символами

$$J_1' = J_2J_1J_2^{-1}J_1, \quad J_1'' = \frac{1}{2}\left(J_2J_1J_2^{-1} + J_1\right)$$

обозначены нижне-треугольные матрицы, которые на соответствующих строках главной диагонали имеют *те же элементы, что и матрицы* J_1^2, J_1 соответственно (но в общем случае не равны им).

Сделаем в нижнюю строку (12) подстановку

$$u = Q \cdot p = Q \cdot (p_1, \ldots, p_n)^\top, \tag{13}$$

где $p_k(z)$, $k = 1, \ldots, n$ — скалярные комплексные функции. Затем умножим (12) слева на Q^{-1}:

$$\left(J_2^2 + J_1'\right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2J_1'' \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \tag{14}$$

Пусть ξ_{1k}, $\xi_{2k} \in \mathbb{C}$ — собственные числа матриц A и B соответственно, стоящие на k-той строке матриц J_1, J_2 в (9). Пусть также $L_k(\cdot)$ — линейные функции своих переменных. Тогда систему (14) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\left(\xi_{11}^2 + \xi_{21}^2\right) \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - 2\xi_{11} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} = 0, \quad k = 1; \\
&\left(\xi_{1k}^2 + \xi_{2k}^2\right) \frac{\partial^2 p_k}{\partial x^2} - 2\xi_{1k} \frac{\partial^2 p_k}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 p_k}{\partial y^2} = \\
&\qquad = L_k\Big(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 p_{k-1}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 p_{k-1}}{\partial x \partial y}\Big), \quad k = 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{15}$$

Для *левой части* каждого из уравнений (15) составим характеристический полином (см. [16])

$$\lambda^2 - 2\xi_{1k}\lambda + \left(\xi_{1k}^2 + \xi_{2k}^2\right) = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

и найдем его корни:

$$\lambda_{1k} = \xi_{1k} + i\,\xi_{2k}, \quad \lambda_{2k} = \xi_{1k} - i\,\xi_{2k}, \quad \xi_{1k}, \xi_{2k} \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

В силу (9) λ_{1k} в (16) будет собственным числом матрицы J, а λ_{2k} — собственным числом матрицы $\overline{J}$, причем оба этих числа стоят в k-той строке матриц J', J'' соответственно.

Как показано в [16], если правая часть уравнения вида (15) *равна нулю* и при этом $\lambda_{1k} \neq \lambda_{2k}$ в (16), то общее решение такого однородного уравнения с учетом обозначений (2) и (16) имеет вид

$$p_k(z) = f_{\lambda_{1k}}(z) + f_{\lambda_{2k}}(z), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

то есть является суммой произвольных λ_{1k}- и λ_{2k}-голоморфных функций (см. определение 2).

С учетом подстановки (13) граничное условие (3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\big(p_1(z), \ldots, p_n(z)\big)^\top\big|_\Gamma = Q^{-1} u(x,y)\big|_\Gamma = \\
&\qquad = Q^{-1} \cdot \big[\operatorname{Re} \phi(z)\big]\big|_\Gamma = Q^{-1} \cdot \big(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\big)^\top.
\end{aligned} \tag{18}$$

Пусть выполнены условия пункта 2) и неравенства (10). Тогда правая часть (18) будет нулевой.

Допустим, что существует нетривиальное решение $\phi_0 = u_0 + iv_0$ однородной задачи Шварца. Тогда в силу (13) функция $p = Q^{-1} \cdot u_0$ тоже непостоянна. Заметим, что с учетом теоремы 3 и формулы (17) для общего решения функция $p_1(z)$ равна константе. Отсюда в (15) функция $L_2(\,\cdot\,) \equiv 0$, то есть в силу (17) и теоремы 3 $p_2(z) \equiv \mathrm{const}$. Применяя далее тривиальную индукцию, получаем, что функция $p(z)$ постоянна, что противоречит сделанному предположению. Это противоречие и *доказывает пункт 2) настоящей теоремы.*

Пусть теперь выполнены условия пункта 1) и неравенства (10). В силу диагональности жордановых форм матриц A, B система (15) будет однородной, то есть все функции $L_k(\cdot)$ равны нулю. Поэтому с учетом формул (10), (17), (18) и теоремы 2 можно однозначно найти две функции $f_{\lambda_{1k}}(z)$, $f_{\lambda_{2k}}(z) \in H^{\sigma}(\overline{D})$, то есть $p_k(z)$, $k = 1, \ldots, n$.

В результате найдена вещественная функция $u = Q \cdot (p_1, \ldots, p_n) \in H^{\sigma}(\overline{D})$, которая есть не что иное, как решение *задачи Дирихле* (8) для вещественной системы (7) с заданной граничной функцией $\varphi(z) \in H^{\sigma}(\Gamma)$.

Для доказательства существования решения *задачи Шварца* нужно восстановить функцию $v = v(x, y)$ по уже известной $u(x, y)$, используя для определенности первую из формул (6). Тогда функция $\phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ будет решением задачи Шварца (3) с той же граничной функцией $\varphi(z)$, причем $\phi(z)$ будет соответствовать данной матрице $J = A + Bi$.

С учетом формул (6), (13), (17) и (2) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = B^{-1}A\,\frac{\partial u}{\partial x} - B^{-1}\,\frac{\partial u}{\partial y} = B^{-1}AQ \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - B^{-1}Q \cdot \frac{\partial p}{\partial y} =$$

$$= B^{-1}AQ \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - B^{-1}Q \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_{\lambda_{11}}}{\partial y} + \dfrac{\partial f_{\lambda_{21}}}{\partial y} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_{\lambda_{1n}}}{\partial y} + \dfrac{\partial f_{\lambda_{2n}}}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= B^{-1}AQ \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_{\lambda_{11}}}{\partial x} + \dfrac{\partial f_{\lambda_{21}}}{\partial x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_{\lambda_{1n}}}{\partial x} + \dfrac{\partial f_{\lambda_{2n}}}{\partial x} \end{pmatrix} - B^{-1}Q \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{11}\dfrac{\partial f_{\lambda_{11}}}{\partial x} + \lambda_{21}\dfrac{\partial f_{\lambda_{21}}}{\partial x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{1n}\dfrac{\partial f_{\lambda_{1n}}}{\partial x} + \lambda_{2n}\dfrac{\partial f_{\lambda_{2n}}}{\partial x} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где в последних скобках производная по y замена на производную по x с учетом определения 2 λ-голоморфной функции.

Левая и правая части (19) представляют собой производные некоторых функций по одной и той же переменной x. Следовательно, эти функции совпадают с точностью до вектор-функция $r = r(y)$, которая зависит только от переменной y:

$$v(x, y) = B^{-1}AQ \cdot \begin{pmatrix} f_{\lambda_{11}} + f_{\lambda_{21}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{\lambda_{1n}} + f_{\lambda_{2n}} \end{pmatrix} - B^{-1}Q \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{11}f_{\lambda_{11}} + \lambda_{21}f_{\lambda_{21}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{1n}f_{\lambda_{1n}} + \lambda_{2n}f_{\lambda_{2n}} \end{pmatrix} + r(y). \tag{20}$$

Функция $\phi = u + iv$, где u, v имеют вид (13) и (20) соответственно, по построению будет решением уравнения (1) при некотором подборе $r(y)$. Функция $r(y)$ определяется с помощью второго уравнения в (6). Чтобы его не использовать, покажем, что $r(y)$ в (20) *постоянна.*

▷ Действительно, $r(y) \in C^1(D)$, так как дифференцируемы функции ϕ и $\phi - ri$. Непосредственная подстановка показывает, что $\phi - ri$ удовлетворяет (1), то есть и функция $r(y)$ будет аналитической по Дуглису, откуда вытекает, что $r(y) \equiv \text{const}$. ◁

В итоге формулы (13) *и* (20) *определяют решение* $\phi = u+iv$ *неоднородной задачи Шварца* (3).

Поскольку все функции, входящие в (20), а также функция $u(x, y)$, непрерывны по Гельдеру в $\overline{D}$, то и $\phi(z) \in H^\sigma(\overline{D})$. Разумеется, те же результаты будут иметь место, если использовать вторую из формул (6).

Единственность полученного решения доказывается аналогично пункту 2). □

3. Построение матриц J, для которых справедлива теорема 4. Обозначим

$$J = P_1(A) + P_2(A)i, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{21}$$

где P_1, P_2 — матричные полиномы с вещественными коэффициентами. Очевидно, что матрицы A, $P_1(A)$, $P_2(A)$, J в (21) имеют общий базис Q, приводящий их к треугольному виду. В качестве Q можно взять жорданов базис матрицы A.

Для матриц (21) нужно проверить выполнение критерия (10) или (11). Какой именно из двух критериев нужно проверять, зависит от формы записи матрицы J. Если $J = (A + Bi)^m$, $m = 2, 3, \ldots$, то удобнее применять (10), а если $J = A + Bi$, то более удобен критерий (11).

Всюду в этом пункте будем обозначать через $\xi_k+i\delta_k$, ξ_k, $\delta_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, собственные числа вещественной матрицы A. Комплексные числа λ_{1k}, λ_{2k} определены перед формулой (10), а λ_k, μ_k — перед формулой (11).

1°. Для матрицы $J^* = \alpha E + Ai$, $\alpha \in \mathbb{R}$ все числа $\xi_k \neq 0$, так как в противном случае матрица J^* будет иметь вещественные собственные числа, что противоречит определению 1. Поэтому

$$|\operatorname{Im} \lambda_k| = 0 < |\operatorname{Re} \mu_k| = |\xi_k| \neq 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

то есть выполнен критерий (11). Таким образом, имеет место

Лемма 2. *Для функций, J-аналитических с матрицами $J^* = \alpha E + Ai$, $\alpha \in \mathbb{R}$, теорема 4 справедлива при любых значениях $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Отметим, что утверждение леммы 2 было доказано в [2]. Однако в [2] более общие случаи не рассматривались и критерий (10), (11) получен не был.

2°. Рассмотрим матрицу $\widetilde{J} = A + \alpha iE$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть выполнено неравенство

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} |\delta_k| < |\alpha|. \tag{22}$$

Тогда

$$|\operatorname{Im} \lambda_k| = |\delta_k| < |\alpha| = |\operatorname{Re} \mu_k|, \quad k = 1, \ldots, n,$$

то есть имеет место формула (11). Следовательно, справедлива

Лемма 3. *Для функций, J-аналитических с матрицами $\widetilde{J} = A + \alpha i E$, $\alpha \in \mathbb{R}$, справедлива теорема 4, если верно неравенство (22).*

3°. Рассмотрим матрицу $J^{*2} = (\alpha E + Ai)^2$. Здесь

$$\begin{aligned}\lambda_{1k} =& \big(\alpha + (\xi_k + i\delta_k)i\big)^2 = (\alpha - \delta_k + \xi_k i)^2,\\ \lambda_{2k} =& \big(\alpha - (\xi_k + i\delta_k)i\big)^2 = (\alpha + \delta_k - \xi_k i)^2.\end{aligned}$$

Проверим выполнение критерия (10):

$$(\operatorname{Im}\lambda_{1k}) \cdot (\operatorname{Im}\lambda_{2k}) = -2\xi_k(\alpha - \delta_k) \cdot 2\xi_k(\alpha + \delta_k) = -4\xi_k^2\big(\alpha^2 - \delta_k^2\big) < 0,$$

если $\xi_k \neq 0$ и верно (22). В итоге доказана

Лемма 4. *Для функций, J-аналитических с матрицами*

$$J^{*2} = (\alpha E + Ai)^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \xi_k \neq 0,$$

справедлива теорема 4, если имеет место неравенство (22).

4. Матрицы J, отличные от (21), для которых выполнен критерий (11). Пусть J_1^*, J_2^* — блочно-диагональные матрицы размера $l \times l$, блоками которых являются жордановы клетки (в общем случае комплексные). Пусть $\widetilde{J}_1$, $\widetilde{J}_2$ — блочно-диагональные матрицы размера $(n-2l) \times (n-2l)$, состоящие из вещественных жордановых клеток. В обеих случаях жордановы клетки могут быть одномерными. Пусть матрица $Q^* \in \mathbb{C}^{n \times l}$, а $\widetilde{Q}$ — вещественная матрица размера $n \times (n-2l)$. Образуем матрицу J по следующему правилу:

$$\begin{aligned}J_1 = \operatorname{diag}\big(\, J_1^*, \overline{J_1^*}, \widetilde{J}_1\,\big), \quad J_2 = \operatorname{diag}\big(\, J_2^*, \overline{J_2^*}, \widetilde{J}_2\,\big), \quad Q =& \big(\, Q^*, \overline{Q^*}, \widetilde{Q}\,\big),\\ A = QJ_1Q^{-1}, \quad B = QJ_2Q^{-1}, \quad J = A + Bi.&\end{aligned} \tag{23}$$

Покажем, что матрицы A, B в (23) — вещественные.

▷ Действительно, $\overline{Q^{-1}} = \big(\overline{Q}\big)^{-1}$, что вытекает из алгоритма построения обратной матрицы. Поэтому

$$\overline{A} = \overline{QJ_1Q^{-1}} = \overline{Q} \cdot \overline{J_1} \cdot \overline{Q^{-1}} = \overline{Q} \cdot \overline{J_1} \cdot \big(\overline{Q}\big)^{-1}. \tag{24}$$

Как известно, жорданов базис Q и жорданова форма J_1 матрицы A определены с точностью до перестановки жордановых клеток в J_1 и соответствующих им столбцов матрицы Q. Из (23) следует, что операция сопряжения матриц Q и J_1 как раз и производит такую перестановку. Следовательно, $\overline{Q}$ и $\overline{J}_1$ в (24) определяют ту же самую матрицу A, то есть $\overline{A} = A$. Аналогично доказывается равенство $\overline{B} = B$. ◁

Таким образом, формулы (23) описывают альтернативный (21) способ построения матриц J из условий теоремы 4.

Имеет место очевидное следствие из теоремы 4, а именно

Лемма 5. *Пусть λ_k, μ_k, $k = 1, \ldots, n$ — собственные числа матриц J_1, J_2 (23) соответственно, стоящие на k-той строке. Пусть выполнен критерий*

(11). *Тогда для функций, J-аналитических с матрицами J (23), справедлива теорема* 4.

Очевидно, что применение критерия (10) для матриц вида (23) затруднительно. В заключение приведем следующий пример, иллюстрирующий лемму 5.

Пример 2. Пусть числа λ, μ, η имеют ненулевые комплексные части; векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^4$. Положим

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\eta} \end{pmatrix}, \quad Q = \big(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\big). \tag{25}$$

Матрицы (25) имеют вид (23), причем J_1, J_2 — диагональны. Поэтому для функций, J-аналитических с матрицами

$$J = A + Bi = QJ_1Q^{-1} + QJ_2Q^{-1}i,$$

справедливы утверждения леммы 5 и теоремы 4, если

$$|\operatorname{Im}\lambda| < \min\big\{|\operatorname{Re}\mu|,\ |\operatorname{Re}\eta|\big\},$$

то есть если выполнен критерий (11).

Заключение. Критерий существования и единственности решений задачи Шварца (10), (11) довольно прост для проверки и может быть применен к различным матрицам вида (21) и (23). Поскольку задача Шварца, как было отмечено выше, равносильна задаче Дирихле для многих типов эллиптических систем второго порядка в частных производных, то неравенства (10), (11) применимы и для изучения этой задачи.

Декларация о финансовых и других взаимоотношениях. Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания (проект 1.857.2014/К). Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена автором. Автор не получал гонорар за статью.

ORCID
Владимир Геннадьевич Николаев: http://orcid.org/0000-0003-0274-5826

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Солдатов А. П. Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису // *Совр. математика и ее приложения*, 2010. Т. 67, Уравнения с частными производными. С. 99–102.
2. Николаев В. Г., Солдатов А. П. О решении задачи Шварца для J-аналитических функций в областях, ограниченных контуром Ляпунова // *Диффер. уравн.*, 2015. № 7. С. 965–969.
3. Солдатов А. П. Интегральное представление функций, аналитических по Дуглису // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2008. № 8/1(67). С. 225–234.
4. Солдатов А. П. Гипераналитические функции и их приложения // *Совр. математика и ее приложения*, 2004. Т. 15, Теория функций. С. 142–199.
5. Солдатов А. П. Пространство Харди решений эллиптических систем первого порядка // *Докл. РАН*, 2007. Т. 416, № 1. С. 26–30.

6. Солдатов А. П. Эллиптические системы высокого порядка // *Диффер. уравн.*, 1989. Т. 25, № 1. С. 136–142.
7. Бицадзе А. В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // *УМН*, 1948. Т. 3, № 6(28). С. 211–212.
8. Бицадзе А. В. *Основы теории аналитических функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1972. 347 с.
9. Бицадзе А. В. *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.* М.: Наука, 1966. 298 с.
10. Боярский Б. В. Теория обобщенного аналитического вектора // *Annales Polonici Mathematici*, 1965. Т. 17, № 3. С. 281–320, https://eudml.org/doc/265098.
11. Векуа И. Н. *Обобщенные аналитические функции.* М.: Наука, 1988. 328 с.
12. Жура Н. А. Краевые задачи типа Бицадзе–Самарского для эллиптических в смысле Дуглиса–Ниренберга систем // *Диффер. уравн.*, 1992. Т. 28, № 1. С. 81–91.
13. Жура Н. А. Общая краевая задача для эллиптических в смысле Дуглиса–Ниренберга систем в областях с гладкой границей // *Изв. РАН*, 1994. № 1. С. 22–44.
14. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* М.: Наука, 1968. 511 с.
15. Николаев В. Г. О некоторых свойствах J-аналитических функций // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2013. № 3(104). С. 25–32.
16. Николаев В. Г., Панов Е. Ю. Результаты о совпадении λ- и μ-голоморфных функций на границе области и их приложения к краевым задачам / *Проблемы математического анализа*: Межвузовский международный сборник, Вып. 74; ред. Н. Н. Уральцева. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2013. С. 123–132.

Поступила в редакцию 14/IV/2016;
в окончательном варианте — 22/V/2016;
принята в печать — 27/V/2016.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 410–422

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1491

MSC: 35J25, 35J56

ON DECISIONS OF SCHWARTZ' PROBLEM FOR J-ANALYTIC FUNCTIONS WITH THE SAME JORDAN BASIS OF REAL AND IMAGINARY PARTS OF J-MATRIX

V. G. Nikolaev

Novgorod State University after Yaroslav the Wise,
41, Bol'shaya St. Petersburgskaya st., Novgorod the Great, 173003, Russian Federation.

Abstract

Boundary Schwartz' problem for J-analytic functions was studied within this scientific work. These functions are solutions of linear complex system of partial differential equations of the first order. It was considered, that the real and imaginary parts of J-matrix are put into triangular form by means of one and the same complex transformation. The main theorem proved a criterion for eigenvalues of J-matrix. Shall this criterion be fulfilled within the complex plane within the boundaries defined by Lyapunov line, there is a decision on Schwartz' problem and it is the only one. The equal form of this criterion was found, which in many cases is more convenient for check. While proving the theorem, known facts about boundary properties of l-holomorphic functions are applied. The proof itself is based on the method of direct and reverse reduction of Schwarz' problem to Dirichlet's problem for real valued elliptic systems of partial differential equations of the second order. Examples of matrices are given, whereby the specified criterion is fulfilled.

Keywords: Schwartz' problem, l-holomorphic function, Lyapunov line, Jordan form, Jordan basis, characteristic equation, elliptic system, Dirichlet's problem.

Declaration of Financial and Other Relationships. This work was supported by the Ministry of education and science of the Russian Federation within the framework of the base part of the state task (Project 1.857.2014/K). The author is absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. The author has approved the final version of manuscript. The author has not received any fee for the article.

ORCID
Vladimir G. Nikolaev: http://orcid.org/0000-0003-0274-5826

Please cite this article in press as:
Nikolaev V. G. On decisions of Schwartz' problem for J-analytic functions with the same Jordan basis of real and imaginary parts of J-matrix, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 410–422. doi: 10.14498/vsgtu1491. (In Russian)

Author Details:
Vladimir G. Nikolaev (Cand. Phys. & Math. Sci.; vg14@inbox.ru), Associate Professor, Dept. of Algebra and Geometry.

REFERENCES

1. Soldatov A. P. The Schwarz problem for Douglis analytic functions, *J. Math. Sci.*, 2011, vol. 173, no. 2, pp. 221–224. doi: 10.1007/s10958-011-0244-7.
2. Nikolaev V. G., Soldatov A. P. On the solution of the Schwarz problem for J-analytic functions in a domain bounded by a Lyapunov contour, *Differ. Equ.*, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 962–966. doi: 10.1134/S0012266115070150.
3. Soldatov A. P. Integral representation of Douglis analytic functions, *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2008, no. 8/1(67), pp. 225–234 (In Russian).
4. Soldatov A. P. Hyperanalytic functions and their applications, *Sovr. Mat. Pril.*, 2004, vol. 15, pp. 142–199 (In Russian).
5. Soldatov A. P. The Hardy space of solutions to first-order elliptic systems, *Doklady Mathematics*, 2007, vol. 76, no. 2, pp. 660–664. doi: 10.1134/S1064562407050067.
6. Soldatov A. P. High-order elliptic systems, *Differ. Equ.*, 1989, vol. 25, no. 1, pp. 109–115.
7. Bitsadze A. V. On the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for elliptic partial differential equations, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1948, vol. 3, no. 6(28), pp. 211–212 (In Russian).
8. Bizadse A. W. *Grundlagen der Theorie analytischer Funktionen*, I. Abteilung, Band 23, Mathematische Lehrbücher und Monographien. Berlin, Akademie-Verlag, 1973, 186 pp. (In German)
9. Bitsadze A. V. *Boundary value problems for second order elliptic equations*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 5. Amsterdam, North-Holland Publ. Company, 1968, 211 pp.
10. Boyarskii B. V. The theory of generalized analytic vector, *Annales Polonici Mathematici*, 1965, vol. 17, no. 3, pp. 281–320 (In Russian), https://eudml.org/doc/265098.
11. Vekua I. N. *Generalized analytic functions*, International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, vol. 25. Oxford, Pergamon Press, 1962, xxvi+668 pp.
12. Zhura N. A. Bitsadze-Samarskij type boundary-value problems for Douglis-Nirenberg elliptical systems, *Differ. Equ.*, 1992, vol. 28, no. 1, pp. 79–88.
13. Zhura N. A. A general boundary value problem for systems elliptic in the Douglis- Nirenberg sense in domains with smooth boundary, *Russ. Acad. Sci., Izv., Math.*, 1995, vol. 44, no. 1, pp. 21–42. doi: 10.1070/IM1995v044n01ABEH001584.
14. Muskhelishvili N. I. *Singular integral equations*. Groningen, Wolters-Noordhoff Publ., 1967, 447 pp.
15. Nikolaev V. G. On some properties of J-analytical functions, *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2013, no. 3(104), pp. 25–32 (In Russian).
16. Nikolaev V. G., Panov E. Yu. On coincidence of λ- and μ-holomorphic functions on the boundary of a domain and applications to elliptic boundary value problems, *Problemy matematicheskogo analiza* [Problems of mathematical analysis], Issue 74; eds. N. N. Ural'tseva. Novosibirsk, Tamara Rozhkovskaia, 2013, pp. 123–132 (In Russian).

Received 14/IV/2016;
received in revised form 22/V/2016;
accepted 27/V/2016.