Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 3. С. 457–474
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1486

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.374:624.131.5

УСТОЙЧИВОСТЬ МОНОЛИТНОЙ КРЕПИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОЙ ПОРИСТОСТИ МАТЕРИАЛА И НЕУПРУГОЙ РАБОТЫ СЖАТОГО СКЕЛЕТА

Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»,
Россия, 394064, Воронеж, ул. Старых большевиков, 54 а.

Аннотация

Построена математическая модель, описывающая основное напряженно-деформированное состояние монолитной крепи вертикальной горной выработки для материалов с пористой структурой, сжатый скелет которой обладает упрочняющимися упругопластическими свойствами. Деформирование пористой среды под действием заданных радиальных сжимающих нагрузок разделяется на два взаимосвязанных этапа: упругое деформирование пористой среды и неупругое деформирование сжатой матрицы. Задача определения полей напряжений и перемещений крепи вертикальной выработки на каждом этапе деформирования решается в рамках плоского деформированного состояния. При этом не учитываются эффекты, связанные с тем, что выработка имеет конечную глубину. Получены соотношения, определяющие поля напряжений и перемещений на первом и втором этапах деформирования. В качестве условий совместности выбирались условия непрерывности компонент напряжений и перемещений на упругопластической границе, а также равенство нулю пластических деформаций на ней. В рамках точных трехмерных уравнений устойчивости исследована устойчивость основного состояния монолитной крепи вертикальной горной выработки в массивах горных пород со сжатыми порами. Дана оценка влияния на величину границы раздела сред упругого и пластического деформирования начальной пористости и предела текучести материала. Построены графики зависимостей компонент основного напряженного состояния от координаты при различных значениях величины начального раствора

Образец для цитирования

Гоцев Д. В., Бунтов А. Е. Устойчивость монолитной крепи вертикальной горной выработки с учетом начальной пористости материала и неупругой работы сжатого скелета // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 3. С. 457–474. doi: 10.14498/vsgtu1486.

Сведения об авторах

Дмитрий Викторович Гоцев (д.ф.-м.н.; rbgotsev@mail.ru), профессор, каф. математики.
Алексей Евгеньевич Бунтов (alexey.buntov@mail.ru; автор, ведущий переписку), адъюнкт, каф. инженерно-аэродромного обеспечения.

пор и других физико-механических и геометрических параметров материала и конструкции.

Ключевые слова: трехмерная теория устойчивости, пористая структура, сложная реология сжатой матрицы, геометрически линейная деформационная теории.

Введение. При добыче полезных ископаемых должно быть пройдено большое количество вертикальных и горизонтальных выработок, которые являются долговременными и дорогостоящими инженерными сооружениями. Состояние горных выработок в зависимости от их назначения должно удовлетворять различным требованиям, основным из которых является обеспечение безопасных условий труда и сохранности оборудования. В связи с этим возникают требования к проведению укрепительных работ горных выработок, то есть созданию крепежных конструкций — крепей.

Одним из главных условий безопасной и надежной работы горной выработки является устойчивость ее крепи. В большинстве случаев процесс потери устойчивости происходит при неупругих деформациях, поэтому при моделировании этого явления используются модели, учитывающие одновременно упругие и пластические свойства материалов. Необходимо также отметить, что большинство материалов имеет пористую структуру [1], поэтому при решении задач устойчивости наряду со сложной реологией необходимо также учитывать пористые свойства материалов.

Решение такого класса задач состоит из двух этапов. На первом этапе определяется основное напряженно-деформированного состояние (НДС) крепи. На втором — решается задача об устойчивости основного состояния в рамках динамического подхода, который, в свою очередь, сводится к определению величины критического давления, равномерно распределенного по внутреннему контуру крепи.

В отличие от [2–5], в настоящей работе на основе точных трехмерных уравнений [6] исследуется вопрос об устойчивости состояния равновесия монолитной крепи вертикальной горной выработки большой протяженности. При этом материал крепи моделируется пористой средой, сжатый скелет которой обладает одновременно упругими и пластическими свойствами.

Основное НДС крепи вертикальной горной выработки. Деформирование пористого материала с начальным раствором пор ε_0 можно разделить на два взаимосвязанных этапа [7]. Первый — упругое деформирование сжимаемой пористой среды, второй — неупругое деформирование сжатого скелета с упрочняющимися упругопластическими свойствами. Связь между напряжениями и деформациями на первом этапе берется в виде закона Гука для сжимаемого тела

$$\sigma_j^\beta = \lambda_1 \overset{e}{\varepsilon}{}_\alpha^\alpha \, g_j^\beta + 2\mu_1 \overset{e}{\varepsilon}{}_j^\beta \quad \text{при} \quad -\overset{e}{\varepsilon}{}_\alpha^\alpha < \varepsilon_0, \tag{1}$$

где g_j^β, σ_j^β, $\overset{e}{\varepsilon}{}_j^\beta$ — смешанные компоненты метрического тензора, тензора напряжений и тензора упругих деформаций соответственно, λ_1, μ_1 — параметры Ламе сжимаемого тела.

На втором этапе упругие деформации сжатого скелета подчиняются закону Гука для несжимаемого тела [8]

$$S_j^\beta = 2\left(\mu_0 + \mu_1\right) \overset{e}{\varepsilon}{}_j^\beta - 2\mu_0 \left(\overset{e}{\varepsilon}{}_j^\beta\right)_0 + \frac{2}{3}\mu_1 \varepsilon_0 g_j^\beta, \quad \text{при} \quad -\overset{e}{\varepsilon}{}_\alpha^\alpha = \varepsilon_0, \tag{2}$$

где S_j^β — компоненты тензора девиатора напряжений; $\left(\overset{e}{\varepsilon}{}_j^\beta\right)_0$ — компоненты тензора упругих деформаций, вычисленные на момент полного сжатия пор, то есть при выполнении условия $\overset{e}{\varepsilon}{}_\alpha^\alpha = -\varepsilon_0$; $\mu_0 + \mu_1$ — модуль сдвига несжимаемого тела.

В зоне пластического деформирования сжатого скелета будем использовать модель несжимаемого упрочняющегося упругопластического тела [9] с поверхностью нагружения

$$F = \left(S_j^\beta - c\,\overset{p}{\varepsilon}{}_j^\beta\right)\left(S_\beta^j - c\,\overset{p}{\varepsilon}{}_\beta^j\right) - k^2, \tag{3}$$

где $\overset{p}{\varepsilon}{}_j^\beta$ — компоненты тензора пластических деформаций, c — коэффициент упрочнения, k — предел текучести материала.

Полная деформация в пластической зоне складывается из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_j^\beta = \overset{e}{\varepsilon}{}_j^\beta + \overset{p}{\varepsilon}{}_j^\beta, \tag{4}$$

причем пластическая и упругая составляющие объемной деформации соответственно удовлетворяют условиям несжимаемости

$$\overset{p}{\varepsilon}_{nn} = 0, \quad \overset{e}{\varepsilon}_{nn} = -\varepsilon_0. \tag{5}$$

В (1)–(5) и далее индексы «e» и «p» вверху величин обозначают их принадлежность соответственно к упругой и пластической зонам деформирования сжатого скелета.

Далее рассмотрим задачу определения НДС цилиндрического тела (рис. 1), являющегося крепью вертикальной выработки. Обозначим через b и a соответственно внешний и внутренний радиусы крепи. Действие массива горных пород на крепь заменим сжимающей нагрузкой интенсивностью q_b, равномерно распределенной по внешней поверхности. Сжимающая нагрузка интенсивностью q_a, равномерно распределенная по внутренней поверхности, моделирует собой давление жидкости или газа на крепь.

Так как выработка имеет большую протяженность, то, согласно [5], при определении НДС не будем учитывать эффекты, связанные с тем, что выработка имеет конечную глубину.

НДС монолитной крепи вертикальной горной выработки в рамках плоского деформированного состояния в цилиндрической системе координат (r, θ, z) моделируется следующими соотношениями геометрически линейной теории:

– уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \tag{6}$$

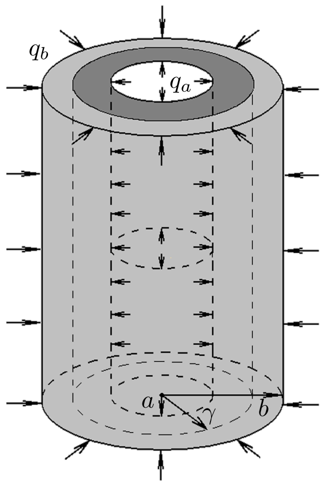

Рис. 1. Монолитная крепь вертикального шахтного ствола под действием радиального сжатия [Figure 1. Monolithic lined circular vertical shaft under the radial contraction action]

– соотношения Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \tag{7}$$

где u — радиальная составляющая вектора перемещений;

– граничные условия в напряжениях

$$\sigma_r\big|_{r=b} = -q_b, \quad \sigma_r\big|_{r=a} = -q_a \quad (q_a > 0,\ q_b > 0). \tag{8}$$

Связь между напряжениями и деформациями при упругом деформировании пористой среды возьмем в виде соотношений (1), которые при принятых допущениях перепишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\,\varepsilon_r + \lambda_1\varepsilon_\theta, \\ \sigma_\theta &= \lambda_1\varepsilon_r + (\lambda_1 + 2\mu_1)\,\varepsilon_\theta, \\ \sigma_z &= \lambda_1\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Упругие деформации сжатого скелета связаны с напряжениями соотношениями (2), которые в нашем случае примут вид

$$\begin{aligned} S_r &= 2(\mu_0 + \mu_1)\varepsilon_r - 2\mu_0\varepsilon_{r0} + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0, \\ S_\theta &= 2(\mu_0 + \mu_1)\varepsilon_\theta - 2\mu_0\varepsilon_{\theta 0} + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0, \\ S_z &= \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0. \end{aligned} \tag{10}$$

В (10) и далее индекс «0» внизу компонент деформаций, напряжений и перемещений обозначает, что они вычислены на момент полного сжатия пор.

Функция нагружения (3), соотношения для полных деформаций в пластической зоне сжатого скелета (4), условия несжимаемости (5) в случае плоского деформированного состояния для рассматриваемой задачи перепишутся соответственно следующим образом:

$$(S_r - c\varepsilon_r^p)^2 + (S_\theta - c\varepsilon_\theta^p)^2 + S_z^2 = 2k^2, \tag{11}$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p, \tag{12}$$

$$\varepsilon_r^e + \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_z^e = -\varepsilon_0, \quad \varepsilon_r^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_z^p = 0. \tag{13}$$

На границе γ раздела сред упругого и пластического деформирования сжатого скелета должны выполняться условия непрерывности перемещений и напряжений:

$$[u]|_{r=\gamma} = 0, \quad [\sigma_r]|_{r=\gamma} = 0, \quad [\sigma_\theta]|_{r=\gamma} = 0. \tag{14}$$

В (14) и далее квадратные скобки обозначают разность значений выражений, соответствующих упругой и пластической областям на границе $r = \gamma$.

Соотношения (6)–(14) представляют собой математические модели, описывающие НДС монолитной крепи вертикального шахтного ствола на этапах упругого деформирования пористой среды и неупругого деформирования сжатого скелета.

НДС монолитной крепи на первом этапе, то есть при наличии несхлопнутых пор, согласно (6)–(9) определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
u &= \frac{(q_b - q_a a^2) r}{2(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)} + \frac{(q_b - q_a) a^2}{2(a^2 - 1) r}, \\
\varepsilon_r &= \frac{q_b - q_a a^2}{2(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)} - \frac{(q_b - q_a) a^2}{2(a^2 - 1) r^2}, \\
\varepsilon_\theta &= \frac{q_b - q_a a^2}{2(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)} + \frac{(q_b - q_a) a^2}{2(a^2 - 1) r^2}, \\
\sigma_r &= \frac{q_a a^2 (r^2 - 1)}{r^2 (1 - a^2)} + \frac{q_b (a^2 - r^2)}{r^2 (1 - a^2)}, \\
\sigma_\theta &= \frac{q_a a^2 (r^2 + 1)}{r^2 (1 - a^2)} - \frac{q_b (r^2 + a^2)}{r^2 (1 - a^2)}, \\
\sigma_z &= \frac{q_a \lambda_1 a^2}{(\lambda_1 + 1)(1 - a^2)} - \frac{q_b \lambda_1}{(\lambda_1 + 1)(1 - a^2)}.
\end{aligned} \tag{15}$$

В (15) и далее все соотношения записаны в безразмерном виде, при этом все величины имеющие размерность напряжений отнесены к величине μ_1, а имеющие размерность длины — к радиусу b.

Из (15) следует, что объемная деформация при упругом сжатии пор определяется в виде

$$\varepsilon_\alpha^\alpha = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{q_b - q_a a^2}{(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)}.$$

Следовательно, достижение величины начального раствора пор нулевого значения (иначе — достижение объемной деформацией величины ε_0) при упругом деформировании материала происходит одновременно во всей крепи под действием нагрузок, удовлетворяющих условию

$$q_b = \varepsilon_0 (\lambda_1 + 1)(1 - a^2) + q_a f(\varepsilon_0) a^2,$$

где $f(\varepsilon_0) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varepsilon_0 \neq 0, \\ 0, \text{ если } \varepsilon_0 = 0. \end{cases}$

При этом НДС (15) на момент полного закрытия пор перепишется в виде

$$\begin{aligned}
&u_0 = -\frac{\varepsilon_0 r}{2} + \frac{(q_a f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1+1))a^2}{2r},\\
&\varepsilon_{r0} = -\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{(q_a f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1+1))a^2}{2r^2},\\
&\varepsilon_{\theta 0} = -\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{(q_a f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1+1))a^2}{2r^2},\\
&\sigma_{r0} = -\varepsilon_0(\lambda_1+1) - \frac{(q_a f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1+1))a^2}{r^2},\\
&\sigma_{\theta 0} = -\varepsilon_0(\lambda_1+1) + \frac{(q_a f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1+1))a^2}{r^2},\\
&\sigma_{z0} = -\lambda_1\varepsilon_0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, если

$$q_b < \varepsilon_0(\lambda_1+1)(1-a^2) + q_a f(\varepsilon_0)a^2,$$

то полного закрытия пор не происходит и материал ведет себя как сжимаемая упругая среда с параметрами λ_1, $\mu_1 = 1$, ε_0.

НДС монолитной крепи на втором этапе деформирования согласно (6)–(14), (16) определяется следующим образом:

– в упругой области ($\gamma < r < 1$):

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \chi\gamma^2\sqrt{k^2 - \frac{\varepsilon_0^2}{3}}\Big(1 - \frac{1}{r^2}\Big) - q_b,\\
\sigma_\theta &= \chi\gamma^2\sqrt{k^2 - \frac{\varepsilon_0^2}{3}}\Big(1 + \frac{1}{r^2}\Big) - q_b;
\end{aligned} \tag{17}$$

– в пластической области ($a < r < \gamma$):

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_r^p = -\varepsilon_\theta^p = \frac{1}{c+2\mu}\chi\sqrt{k^2 - \frac{\varepsilon_0^2}{3}}\Big(1 - \frac{\gamma^2}{r^2}\Big),\\
&\sigma_r = -q_a + \chi\sqrt{k^2 - \frac{\varepsilon_0^2}{3}}\left(\frac{\gamma^2}{a^2} - \frac{\gamma^2}{r^2} + \frac{2\mu}{c+2\mu}\Big(1 - \frac{r^2}{a^2} + 2\ln\frac{r}{a}\Big)\right),\\
&\sigma_\theta = -q_a + \chi\sqrt{k^2 - \frac{\varepsilon_0^2}{3}}\left(\frac{\gamma^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{r^2} + \frac{4\mu}{c+2\mu}\Big(\frac{1}{2}\Big(3 - \frac{r^2}{a^2}\Big) - \frac{\gamma^2}{r^2} + \ln\frac{r}{a}\Big)\right).
\end{aligned} \tag{18}$$

Перемещения и полные деформации в упругой и пластической областях определяются соотношениями

$$u = \frac{D}{r} - \frac{\varepsilon_0 r}{2}, \quad \varepsilon_r = -\frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{19}$$

Здесь в (17)–(19) введены следующие обозначения:

$$\chi = (q_a - q_b), \quad \mu = 1 + \mu_0,$$

$$D = \frac{1}{2\mu}\Big(\chi\gamma^2\sqrt{k^2 - \frac{\varepsilon_0^2}{3}} + \mu_0\big(q_a f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + 1)\big)a^2\Big).$$

Радиус γ раздела зон упругого и пластического деформирования определяется из решения уравнения

$$q_b - q_a + \chi\sqrt{k^2 - \frac{\varepsilon_0^2}{3}}\left(\frac{\gamma^2}{a^2} - \gamma^2 + \frac{2\mu}{c + 2\mu}\Big(1 - \frac{\gamma^2}{a^2} + 2\ln\frac{\gamma}{a}\Big)\right) = 0.$$

Результаты численного эксперимента, проводимого в рамках полученных решений, описывающих НДС крепи вертикальной выработки, представлены на рис. 2, 2.

На рис. 2, a кривая 1 соответствует $k = 0.01$, кривая $2 - k = 0.015$, кривая $3 - k = 0.02$. На рис. 2, b кривая 1 соответствует $\mu = 1$, кривая $2 - \mu = 2$, кривая $3 - \mu = 3$.

На рис. 3, a и b кривые 1 соответствуют $k = 8.5 \cdot 10^{-3}$, кривые $2 - k = 0.01$, кривые $3 - k = 0.012$. На рис. 3, c и d кривые 1 соответствуют $\varepsilon_0 = 10^{-4}$, кривые $2 - \varepsilon_0 = 7 \cdot 10^{-3}$, кривые $3 - \varepsilon_0 = 0.01$.

Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, если не оговорено особо, в расчетах брались следующими: $a = 0.5$, $b = 1$, $q_a = 0.001$, $q_b = 0.012$, $c = 0.005$, $\lambda_1 = 3$, $\mu_1 = 1$, $k = 0.01$, $\varepsilon_0 = 0.001$, $\mu = 2$.

Знание основного НДС крепи позволяет перейти к решению задачи устойчивости этого состояния.

Пространственная устойчивость монолитной крепи вертикальной горной выработки. Исследование устойчивости основного состояния (17)–(19) монолитной цилиндрической крепи со сжатым скелетом при принятии обобщенной концепции продолжающегося нагружения [6] сводится к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях при соответствующих граничных условиях [5].

Уравнения равновесия для областей пластического и упругого деформирования материала крепи со сжатыми порами имеют вид

$$\nabla_i(\sigma_j^i + \sigma_\alpha^{0i}\nabla^\alpha u_j) = 0. \tag{20}$$

Здесь и далее ∇ — символ ковариантного дифференцирования, кружок вверху соответствует компонентам основного невозмущенного состояния, определенного соотношениями (17)–(19).

Граничные условия на внутренней и внешней поверхностях крепежной конструкции запишем в виде

$$N_i\big(\sigma_j^i + \overset{0}{\sigma_\alpha^i}\,\nabla^\alpha u_j\big) = 0. \tag{21}$$

Условия непрерывности на упругопластической границе γ имеют вид

$$\big[N_i\big(\sigma_j^i + \overset{0}{\sigma_\alpha^i}\,\nabla^\alpha u_j\big)\big] = 0, \quad [u_j] = 0. \tag{22}$$

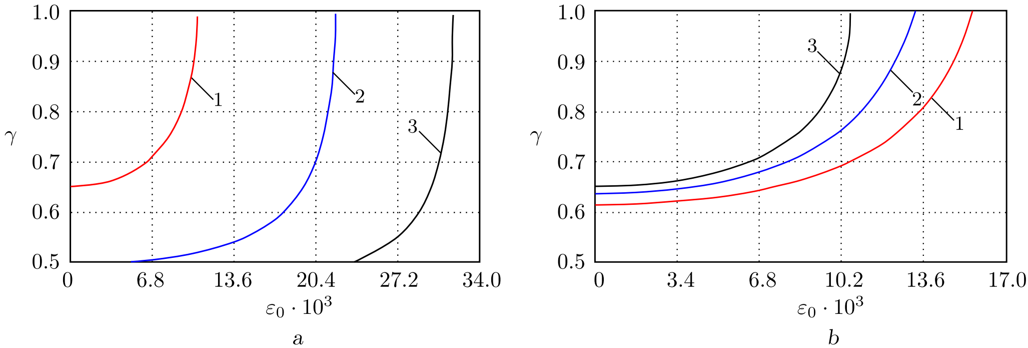

Рис. 2. Зависимость радиуса упругопластической границы γ от начального раствора пор ε_0

[Figure 2. The dependence of the elastic-plastic border radius γ on the value of ε_0]

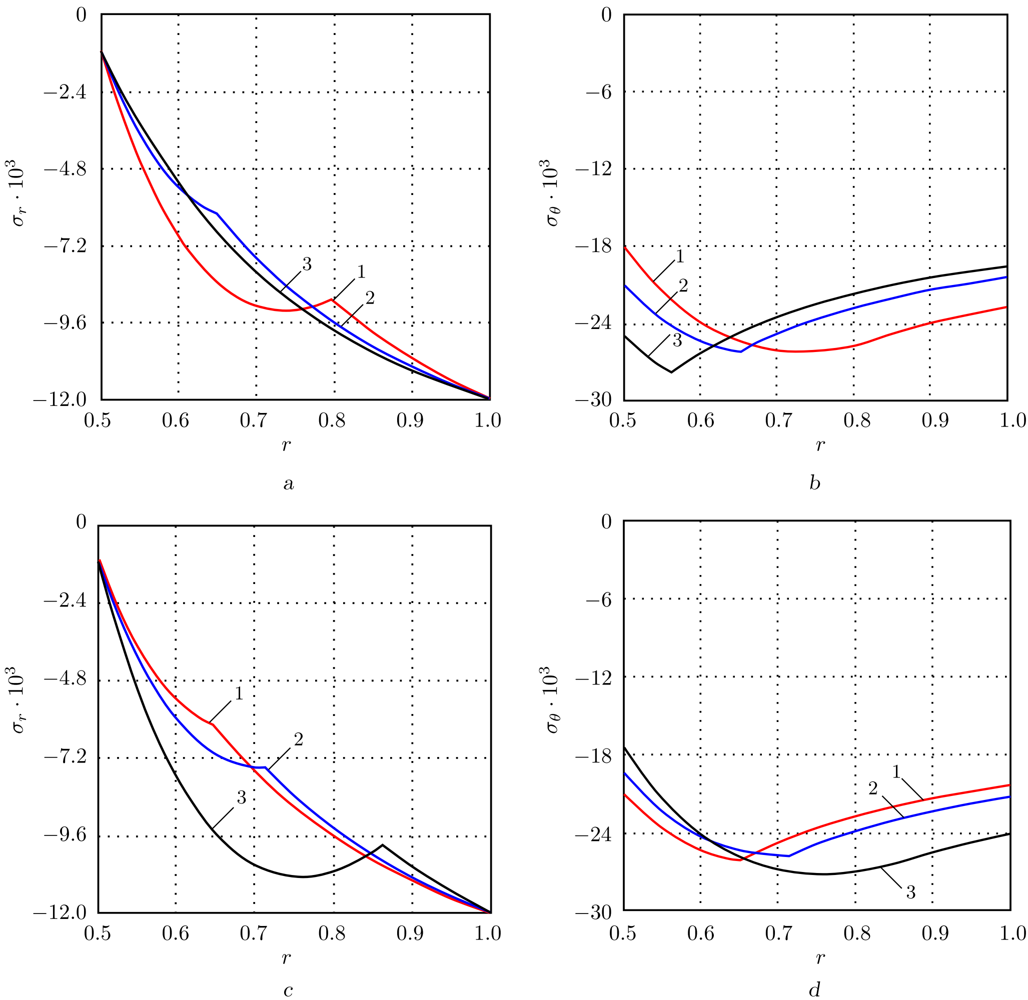

Рис. 3. Зависимость напряжений σ_r и σ_θ от радиальной координаты r
[Figure 3. The dependence of the stresses σ_r and σ_θ on the radial coordinate value r]

Связь между амплитудными значениями напряжений и перемещений для сжатого скелета, обладающего упругопластическими свойствами и свойством дальнейшей несжимаемости в пластической и упругой областях, представима в форме [5]

$$\sigma_j^\beta = (x_{\beta\alpha} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha u_\alpha + p) g_j^\beta + (1 - g_j^\beta) g^{\beta\beta} \mu (\nabla_\beta u_j + \nabla_j u_\beta). \tag{23}$$

Здесь в (23) отсутствует суммирование по индексам j, β и производится по индексу α. Величины $x_{\beta\alpha}$ в пластической области определяются соотношением

$$x_{\beta\alpha} = 2\mu g_{\beta\alpha} - \upsilon f_{\alpha\alpha} f_{\beta\beta}, \tag{24}$$

где

$$\upsilon = \frac{4\mu^2}{k^2(2\mu + c)}, \quad f_{ij} = \overset{0}{s}_{ij} - c\,\overset{0p}{\varepsilon}_{ij},$$

в упругой области — соотношением (24), где надо положить $\upsilon = 0$.

Условие несжимаемости для материала крепи со сжатым скелетом представимо в форме

$$\nabla^\alpha u_\alpha = 0. \tag{25}$$

Уравнения (20)–(23) с учетом условия несжимаемости (25) в областях пластического и упругого деформирования материала со сжатым скелетом представляют собой взаимосвязанную замкнутую систему уравнений для исследования устойчивости основного состояния крепи вертикальной цилиндрической выработки, когда имеется граница раздела областей упругого и пластического поведения материала при нагружении. Система уравнений (20), (23), (25) представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно амплитудных значений векторов перемещений u, ν, w и гидростатического давления для пластической и упругой зон крепи. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния. Для нахождения собственных значений перемещения и гидростатические давления в каждой из зон упругого и пластического деформирования аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами

$$\begin{aligned}
u &= \sum_n^\infty \sum_m^\infty A_{nm}(r)\cos(m\theta)\cos(nz),\\
\nu &= \sum_n^\infty \sum_m^\infty B_{nm}(r)\sin(m\theta)\cos(nz),\\
w &= \sum_n^\infty \sum_m^\infty C_{nm}(r)\cos(m\theta)\sin(nz),\\
p &= \sum_n^\infty \sum_m^\infty D_{nm}(r)\cos(m\theta)\cos(nz),
\end{aligned} \tag{26}$$

где n, m — параметры волнообразования.

Так как система уравнений (20)–(23), (25) является линейной и однородной, ее можно записать для каждого члена с одинаковыми значениями n, m. Для упрощения записи в дальнейшем индексы n и m будем опускать.

Подставляя u, ν, w, p, определяемые равенствами (26), в краевую задачу (20)–(22) и учитывая (23), (25), после ряда преобразований получим краевую задачу в терминах функций $A(r)$, $B(r)$, $D(r)$.

Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
\overset{0}{\xi}_1(r)A(r) + \overset{0}{\xi}_2(r)A'(r) + \overset{0}{\xi}_3(r)A''(r) + \overset{0}{\xi}_4(r)B(r) + \\
+ \overset{0}{\xi}_5(r)B'(r) + rD'(r) = 0, \\
\overset{0}{\xi}_6(r)A(r) + \overset{0}{\xi}_7(r)A'(r) + \overset{0}{\xi}_8(r)B(r) + \overset{0}{\xi}_9(r)B'(r) + \\
+ \overset{0}{\xi}_{10}(r)B''(r) + mD(r) = 0, \\
\overset{0}{\xi}_{11}(r)A(r) + \overset{0}{\xi}_{12}(r)A'(r) + \overset{0}{\xi}_{13}(r)A''(r) + \overset{0}{\xi}_{14}(r)rA'''(r) + \\
+ \overset{0}{\xi}_{11}(r)mB(r) + \overset{0}{\xi}_{15}(r)B'(r) + \overset{0}{\xi}_{14}(r)mB''(r) + D(r)r^3n^2 = 0,
\end{gathered} \tag{27}$$

где

$$\overset{0}{\xi}_1(r) = \frac{1}{r}\Big(r^2\rho\omega^2 - (\overset{0}{\sigma}_\theta + \mu)(1+m^2) + \upsilon\,\overset{0}{\psi}_2 - r^2(\overset{0}{\sigma}_z + \mu)n^2\Big),$$

$$\overset{0}{\xi}_2(r) = \overset{0}{\sigma}_r + r\,\overset{0}{\sigma}_{r,r} - \upsilon\,\overset{0}{\psi}_1 + \mu, \quad \overset{0}{\xi}_3(r) = r(-\upsilon\,\overset{0}{\psi}_1 + \mu + \overset{0}{\sigma}_r),$$

$$\overset{0}{\xi}_4(r) = \frac{m}{r}(-2\,\overset{0}{\sigma}_\theta - 2\mu + \upsilon\,\overset{0}{\psi}_2), \qquad \overset{0}{\xi}_5(r) = -m\upsilon\,\overset{0}{\psi}_3,$$

$$\overset{0}{\xi}_6(r) = -\frac{m}{r}(2\,\overset{0}{\sigma}_\theta - \upsilon\,\overset{0}{\psi}_2 + 4\mu), \quad \overset{0}{\xi}_7(r) = m(\upsilon\,\overset{0}{\psi}_3 - 2\mu),$$

$$\overset{0}{\xi}_8(r) = \frac{1}{r}\Big(r^2\rho\omega^2 - \overset{0}{\sigma}_\theta - r^2(\mu + \overset{0}{\sigma}_z)n^2 - (3\mu - \upsilon\,\overset{0}{\psi}_2 + \overset{0}{\sigma}_\theta)m^2 - \mu\Big),$$

$$\overset{0}{\xi}_9(r) = \overset{0}{\sigma}_r + r\,\overset{0}{\sigma}_{r,r} + \mu, \qquad \overset{0}{\xi}_{10}(r) = r(\overset{0}{\sigma}_r + \mu),$$

$$\overset{0}{\xi}_{11}(r) = \Big(r^2\big(\rho\omega^2 - n^2(2\mu + \overset{0}{\sigma}_z)\big) - m^2(\mu + \overset{0}{\sigma}_\theta) + \mu n^2 r^2 + \mu + \overset{0}{\sigma}_r - r\,\overset{0}{\sigma}_{r,r}\Big),$$

$$\overset{0}{\xi}_{12}(r) = r\Big(r^2\big(\rho\omega^2 - n^2(2\mu + \overset{0}{\sigma}_z)\big) - m^2(\mu + \overset{0}{\sigma}_\theta) + \mu n^2 r^2 - \mu - \overset{0}{\sigma}_r + r\,\overset{0}{\sigma}_{r,r}\Big),$$

$$\overset{0}{\xi}_{13}(r) = r^2\big(2(\mu + \overset{0}{\sigma}_r) + r\,\overset{0}{\sigma}_{r,r}\big), \qquad \overset{0}{\xi}_{14}(r) = r^2(\mu + \overset{0}{\sigma}_r),$$

$$\overset{0}{\xi}_{15}(r) = -rm(\mu + \overset{0}{\sigma}_r - r\,\overset{0}{\sigma}_{r,r}),$$

$$\overset{0}{\psi}_1 = \left(\frac{\mu_1\varepsilon_0}{3} + \chi\sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2}\right)^2, \quad \overset{0}{\psi}_2 = \left(\frac{\mu_1\varepsilon_0}{3} - \chi\sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2}\right)^2,$$

$$\overset{0}{\psi}_3 = \left(\frac{2\mu_1\varepsilon_0}{3}\right)^2 - k^2.$$

При этом соотношения (27) будут справедливы для пластической области ($a < r < \gamma$) деформирования крепи, если в них всем переменным величинам приписать вверху индекс «p», и для упругой ($\gamma < r < 1$), если в этих соотношениях положить $\upsilon = 0$ и всем переменным величинам приписать вверху индекс «e».

Граничные условия на внутренней и внешней поверхностях крепи соответственно запишутся в виде

$$\begin{gathered}
(A^p(a) + B^p(a)m)\overset{0}{\phi}_1 + \overset{0}{\phi}_2 A'^p(a) + D^p(a) = 0,\\
m\mu A^p(a) + \mu B^p(a) + \overset{0}{\phi}_3 B'^p(a) = 0,\\
\overset{0}{\phi}_4 A^p(a) + (A'^p(a)a + A''^p(a)a^2 - B^p(a)m + B'^p(a)am)\overset{0}{\phi}_5 = 0;
\end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered}
A'^e(1)\overset{0}{\phi}_6 + D^e(1) = 0,\\
m\mu A^e(1) + \mu B^e(1) - \overset{0}{\phi}_5 B'^e(1) = 0,\\
A^e(1)\overset{0}{\phi}_7 + (A'^e(1) + A''^e(1) - B^e(1)m + B'^e(1)m)\overset{0}{\phi}_5 = 0,
\end{gathered} \tag{29}$$

где

$$\overset{0}{\phi}_1 = -\frac{\upsilon\overset{0}{\psi}_3}{a}, \quad \overset{0}{\phi}_2 = -q_a - \upsilon\overset{0}{\psi}_1 + 2\mu, \quad \overset{0}{\phi}_3 = -a(\mu - q_a),$$

$$\overset{0}{\phi}_4 = n^2a^2\mu - \mu - q_a, \quad \overset{0}{\phi}_5 = \mu - q_a, \quad \overset{0}{\phi}_6 = 2\mu - q_b, \quad \overset{0}{\phi}_7 = n^2\mu - \mu - q_a.$$

Условия непрерывности на границе γ зон упругого и пластического деформирования примут вид

$$\begin{gathered}
\overset{0}{\phi}_8[A'] + [D] + \overset{0}{\phi}_9(A^p + mB^p) - A'^p\upsilon\overset{0}{\psi}_1 = 0,\\
m\mu[A] + \mu[B] + \overset{0}{\phi}_{10}[B'] = 0,\\
\overset{0}{\phi}_{11}[A] - \gamma[A'] - \gamma^2[A''] + m[B] - \gamma m[B'] = 0,
\end{gathered} \tag{30}$$

где

$$\overset{0}{\phi}_8 = \overset{0}{\sigma}{}^e_r(\gamma) + 2\mu, \quad \overset{0}{\phi}_9 = -\frac{\upsilon\overset{0}{\psi}_3}{\gamma},$$

$$\overset{0}{\phi}_{10} = -\gamma\big(\overset{0}{\sigma}{}^e_r(\gamma) + \mu\big), \quad \overset{0}{\phi}_{11} = 1 - \frac{\mu n^2\gamma^2}{\overset{0}{\sigma}{}^e_r(\gamma) + \mu}.$$

Таким образом, математическая модель отказа монолитной крепи вертикальной горной выработки представляется в виде бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (27) с краевыми условиями (28), (29) и условиями сопряжения (30). Для решения этой системы уравнений будем использовать метод конечных разностей [1], суть которого заключается в замене производных разностными отношениями, что, в свою очередь, приводит к замене дифференциальных уравнений разностными, решение которых в любой конечной области сводится к решению конечной системы алгебраических уравнений. Для непрерывной на отрезке функции $y = y(r)$ это осуществляется следующим образом: отрезок $[a, b]$ разбивается точками $i = 0, 1, \ldots, M$ на S равных промежутков длины $\tau = (b - a)/M$. Производные функций на данном интервале заменяются во внутренних точках $i = 2, 3, \ldots, M-2$ центральными разностями второго порядка аппроксимации:

$$\begin{aligned} y_i' &= \frac{1}{2\tau}(y_{i+1} - y_{i-1}), \\ y_i'' &= \frac{1}{\tau^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), \\ y_i''' &= \frac{1}{2\tau^3}(y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}). \end{aligned} \tag{31}$$

В приграничных точках r_1 и r_{M-1} производные будем аппроксимировать следующими конечными разностями:

$$\begin{aligned} y_i' &= \frac{1}{2\tau}(y_{i+1} - y_{i-1}), \\ y_i'' &= \frac{1}{\tau^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), \\ y_i''' &= \pm\frac{1}{2\tau^3}(-y_{i\pm3} + 6y_{i\pm2} - 12y_{i\pm1} + 10y_i - 3y_{i\mp1}), \end{aligned} \tag{32}$$

здесь верхние знаки соответствуют $i = 1$, нижние $i = M-1$.

В крайних точках r_0 и r_M производные будем аппроксимировать следующими конечными разностями:

$$\begin{aligned} y_i' &= \pm\frac{1}{2\tau}(-3y_i + 4y_{i\pm1} - y_{i\pm2}), \\ y_i'' &= \frac{1}{\tau^2}(2y_i - 5y_{i\pm1} + 4y_{i\pm2} - y_{i\pm3}), \\ y_i''' &= \pm\frac{1}{2\tau^3}(-5y_i + 18y_{i\pm1} - 24y_{i\pm2} + 14y_{i\pm3} - 3y_{i\pm4}), \end{aligned} \tag{33}$$

где верхние знаки соответствуют $i = 0$, нижние — $i = M$.

Обозначим через M^p и M^e количество точек разбиения в областях пластического и упругого деформирования материала крепи соответственно. Заменяя производные функций $A(r)$, $B(r)$ и $D(r)$ в (27) для пластической области V^p в точках $j = 2, 3, 4, \ldots, M^p - 1$ и для упругой области V^e в точках $j = M^p + 3, M^p + 4, \ldots, M^p + M^e$ через конечные разности (31), получим

$$\begin{aligned} &(2\overset{0}{\xi_3} - \tau\overset{0}{\xi_2})A_{j-1} + (2\tau^2\overset{0}{\xi_1} - 4\overset{0}{\xi_3})A_j + A_{j+1}(\tau\overset{0}{\xi_2} + 2\overset{0}{\xi_3}) - \\ &\qquad - \tau\overset{0}{\xi_5}B_{j-1} + 2\tau^2\overset{0}{\xi_4}B_j + \tau\overset{0}{\xi_5}B_{j+1} - r\tau\overset{0}{\xi_2}D_{j-1} + r\tau\overset{0}{\xi_2}D_{j+1} = 0, \\ &-\tau\overset{0}{\xi_7}A_{j-1} + 2\tau^2\overset{0}{\xi_6}A_j + \tau\overset{0}{\xi_7}A_{j+1} + (2\overset{0}{\xi_{10}} - \tau\overset{0}{\xi_9})B_{j-1} + \\ &\qquad + 2(\tau^2\overset{0}{\xi_8} - 2\overset{0}{\xi_{10}})B_j + (\tau\overset{0}{\xi_9} + 2\overset{0}{\xi_{10}})B_{j+1} + mD_j = 0, \\ &-r\overset{0}{\xi_{14}}A_{j-2} + (2\tau\overset{0}{\xi_{13}} - \tau^2\overset{0}{\xi_{12}} + 2r\overset{0}{\xi_{14}})A_{j-1} + (2\tau^3\overset{0}{\xi_{11}} - 4\tau\overset{0}{\xi_{13}})A_j + \\ &\qquad + (\tau^2\overset{0}{\xi_{12}} + 2\tau\overset{0}{\xi_{13}} - 2r\overset{0}{\xi_{14}})A_{j+1} + r\overset{0}{\xi_{14}}A_{j+2} + \\ &\qquad\qquad + (2\tau m\overset{0}{\xi_{14}} - \tau^2\overset{0}{\xi_{15}})B_{j-1} + (2\tau^3 m\overset{0}{\xi_{11}} - 4\tau m\overset{0}{\xi_{14}})B_j + \\ &\qquad\qquad\qquad + (\tau^2\overset{0}{\xi_{15}} + 2\tau m\overset{0}{\xi_{14}})B_{j+1} + 2\tau^3 r^3 n^2 D_j = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

В точках $j = M^p$, $M^p + M^e + 1$, согласно тому, что в приграничных точках производные будем аппроксимировать схемой (32) (нижние знаки), для уравнений равновесия (27) запишем

$$
\begin{gathered}
(2\overset{0}{\xi}_3 - \tau\overset{0}{\xi}_2)A_{j-1} + (2\tau^2\overset{0}{\xi}_1 - 4\overset{0}{\xi}_3)A_j + (\tau\overset{0}{\xi}_2 + 2\overset{0}{\xi}_3)A_{j+1} - \\
-\tau\overset{0}{\xi}_5 B_{j-1} + 2\tau^2\overset{0}{\xi}_4 B_j + \tau\overset{0}{\xi}_5 B_{j+1} - r\tau\overset{0}{\xi}_2 D_{j-1} + r\tau\overset{0}{\xi}_2 D_{j+1} = 0, \\
-\tau\overset{0}{\xi}_7 A_{j-1} + 2\tau^2\overset{0}{\xi}_6 A_j + \tau\overset{0}{\xi}_7 A_{j+1} + (2\overset{0}{\xi}_{10} - \tau\overset{0}{\xi}_9)B_{j-1} + \\
+2(\tau^2\overset{0}{\xi}_8 - 2\overset{0}{\xi}_{10})B_j + (\tau\overset{0}{\xi}_9 + 2\overset{0}{\xi}_{10})B_{j+1} + mD_j = 0, \\
r\overset{0}{\xi}_{14} A_{j-3} - 6r\overset{0}{\xi}_{14} A_{j-2} + (2\tau\overset{0}{\xi}_{13} - \tau^2\overset{0}{\xi}_{12} + 12r\overset{0}{\xi}_{14})A_{j-1} + \\
+2(\tau^3\overset{0}{\xi}_{11} - 2\tau\overset{0}{\xi}_{13} - 5r\overset{0}{\xi}_{14})A_j + (\tau^2\overset{0}{\xi}_{12} + 2\tau\overset{0}{\xi}_{13} + 3r\overset{0}{\xi}_{14})A_{j+1} + \\
+\tau(2m\overset{0}{\xi}_{14} - \tau\overset{0}{\xi}_{15})B_{j-1} + 2\tau m(\tau^2\overset{0}{\xi}_{11} - 2\overset{0}{\xi}_{14})B_j + \\
+\tau(\tau\overset{0}{\xi}_{15} + 2m\overset{0}{\xi}_{14})B_{j+1} + 2\tau^3 r^3 n^2 D_j = 0.
\end{gathered}
\tag{35}
$$

В точках $j = 1$, $M^p + 2$, согласно тому, что в приграничных точках производные будем аппроксимировать схемой (32) (верхние знаки), для уравнений равновесия (27) запишем

$$
\begin{gathered}
A_{j-1}(2\overset{0}{\xi}_3 - \tau\overset{0}{\xi}_2) + A_j(2\tau^2\overset{0}{\xi}_1 - 4\overset{0}{\xi}_3) + A_{j+1}(\tau\overset{0}{\xi}_2 + 2\overset{0}{\xi}_3) - \\
-\tau\overset{0}{\xi}_5 B_{j-1} + 2\tau^2\overset{0}{\xi}_4 B_j + \tau\overset{0}{\xi}_5 B_{j+1} - r\tau\overset{0}{\xi}_2 D_{j-1} + r\tau\overset{0}{\xi}_2 D_{j+1} = 0, \\
-\tau\overset{0}{\xi}_7 A_{j-1} + 2\tau^2\overset{0}{\xi}_6 A_j + \tau\overset{0}{\xi}_7 A_{j+1} + (2\overset{0}{\xi}_{10} - \tau\overset{0}{\xi}_9)B_{j-1} + \\
+2(\tau^2\overset{0}{\xi}_8 - 2\overset{0}{\xi}_{10})B_j + (\tau\overset{0}{\xi}_9 + 2\overset{0}{\xi}_{10})B_{j+1} + mD_j = 0, \\
(2\tau\overset{0}{\xi}_{13} - \tau^2\overset{0}{\xi}_{12} - 3r\overset{0}{\xi}_{14})A_{j-1} + 2(\tau^3\overset{0}{\xi}_{11} - 2\tau\overset{0}{\xi}_{13} + 5r\overset{0}{\xi}_{14})A_j + \\
+(\tau^2\overset{0}{\xi}_{12} + 2\tau\overset{0}{\xi}_{13} - 12r\overset{0}{\xi}_{14})A_{j+1} + 6r\overset{0}{\xi}_{14} A_{j+2} - r\overset{0}{\xi}_{14} A_{j+3} + \\
+\tau(2m\overset{0}{\xi}_{14} - \tau\overset{0}{\xi}_{15})B_{j-1} + 2\tau m(\tau^2\overset{0}{\xi}_{11} - 2\overset{0}{\xi}_{14})B_j + \\
+\tau(\tau\overset{0}{\xi}_{15} + 2m\overset{0}{\xi}_{14})B_{j+1} + 2\tau^3 r^3 n^2 D_j = 0.
\end{gathered}
\tag{36}
$$

Шаги разностной сетки в каждой из зон пластического и упругого деформирования следующие:

$$
\tau^p = \frac{\gamma - a}{M^p + 1}, \qquad \tau^e = \frac{1 - \gamma}{M^e + 1}.
$$

Отметим, что если соотношения (34)–(36) записываются для пластической области, то в них надо приписать всем неизвестным и переменным величинам вверху индекс «p», для упругой области — индекс «e».

Производные функций $A(r)$, $B(r)$ и $D(r)$ в условиях (28)–(30) аппроксимируются конечными разностями типа (33). При этом условиям (28) соответствует разностный вид

$$
\begin{aligned}
&(2\tau^p \overset{0}{\phi}_1 - 3\overset{0}{\phi}_2)A_0^p + 4\overset{0}{\phi}_2 A_1^p - \overset{0}{\phi}_2 A_2^p + 2\tau^p m \overset{0}{\phi}_1 B_0^p + 2\tau^p D_0^p = 0,\\
&2\tau^p m\mu A_0^p + (2\tau^p\mu - 3\overset{0}{\phi}_3)B_0^p + 4\overset{0}{\phi}_3 B_1^p - \overset{0}{\phi}_3 B_2^p = 0,\\
&\big(2\tau^2(\overset{0}{\phi}_4 / \overset{0}{\phi}_5) - a(3\tau^p - 4a)\big)A_0^p + 2a(2\tau^p - 5a)A_1^p + a(8a - \tau^p)A_2^p -\\
&\qquad -2a^2 A_3^p - \tau^p m(3a + 2\tau^p)B_0^p + 4\tau^p a m B_1^p - \tau^p a m B_2^p = 0,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

условиям (29) — вид

$$
\begin{aligned}
&-A_{M-2}^e + 4A_{M-1}^e - 3A_M^e - (2\tau^e / \overset{0}{\phi}_6)D_M^e = 0,\\
&2\tau^e m\mu A_M^e - \overset{0}{\phi}_5 B_{M-2}^e + 4\overset{0}{\phi}_5 B_{M-1}^e + (2\tau^e\mu - 3\overset{0}{\phi}_5)B_M^e = 0,\\
&-2A_{M-3}^e + (8 + \tau^e)A_{M-2}^e + \big(4 + 3\tau^e + 2(\tau^e)^2(\overset{0}{\phi}_7 / \overset{0}{\phi}_5)\big)A_M^e -\\
&\qquad -2(5 + 2\tau^e)A_{M-1}^e + \tau^e m B_{M-2}^e - 4\tau^e m B_{M-1}^e +\\
&\qquad\qquad +\tau^e m(3 - 2\tau^e)B_M^e = 0,
\end{aligned}
\tag{38}
$$

где $M = M^p + M^e + 2$;
условиям (30) — вид

$$
\begin{aligned}
&\tau^e(\overset{0}{\phi}_8 + \upsilon\overset{0}{\psi}_1)(-A_{j-2}^p + 4A_{j-1}^p) + \big(2\tau^e\tau^p \overset{0}{\phi}_9 - 3\tau^e(\overset{0}{\phi}_8 + \upsilon\overset{0}{\psi}_1) - 3\tau^p \overset{0}{\phi}_8\big)A_j +\\
&\qquad +\tau^p \overset{0}{\phi}_8(4A_{j+1}^e - A_{j+2}^e) + 2\tau^e\tau^p m \overset{0}{\phi}_9 B_j = 0,\\
&\tau^e(-B_{j-2}^p + 4B_{j-1}^p) - 3(\tau^e + \tau^p)B_j + \tau^p(4B_{j+1}^e - B_{j+2}^e) = 0,\\
&2\gamma(\tau^e)^2 A_{j-3}^p - (\tau^e)^2(\tau^p + 8\gamma)A_{j-2}^p + 2(\tau^e)^2(2\tau^p + 5\gamma)A_{j-1}^p +\\
&\qquad +(4\gamma((\tau^p)^2 - (\tau^e)^2) - 3\tau^e\tau^p(\tau^e + \tau^p))A_j +\\
&\qquad +2(\tau^p)^2(2\tau^e - 5\gamma)A_{j+1}^e + (\tau^p)^2(8\gamma - \tau^e)A_{j+2}^e - 2\gamma(\tau^p)^2 A_{j+3}^e = 0.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Здесь в (39) $j = M^p + 1$.

В результате получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений, которая в матричной форме может быть представлена в виде

$$[X_{ij}] \times [Y_j] = 0. \tag{40}$$

Здесь $[Y_j]$ — вектор неизвестных, который имеет следующие компоненты:

$$
\begin{aligned}
[Y_j] = (&A_0^p, A_1^p, \ldots, A_{M^p}^p, A_{M^p+1}^p, A_{M^p+1}^e, A_{M^p+2}^e, \ldots, A_{M^p+M^e+1}^e, A_{M^p+M^e+2}^e\\
&B_0^p, B_1^p, \ldots, B_{M^p}^p, B_{M^p+1}^p, B_{M^p+1}^e, B_{M^p+2}^e, \ldots, B_{M^p+M^e+1}^e, B_{M^p+M^e+2}^e,\\
&D_0^p, D_1^p, \ldots, D_{M^p}^p, D_{M^p+1}^p, D_{M^p+1}^e, D_{M^p+2}^e, \ldots, D_{M^p+M^e+1}^e, D_{M^p+M^e+2}^e).
\end{aligned}
$$

Таким образом, определение критического значения внутреннего давления интенсивностью q_a, соответствующего потере устойчивости монолитной крепи вертикальной горной выработки, сводится к разрешимости матричного уравнения, что, в свою очередь, соответствует равенству нулю определителя конечной разностной системы уравнений (34)–(36), (37)–(39) при ограничении числа членов в рядах (26). При вычислении определителя наряду с нахождением основного напряженно-деформированного состояния крепи для каждой из областей упругого и пластического деформирования необходимо учитывать уравнение, определяющее положение упругопластической границы γ. Минимизация должна производиться по шагу разностной сетки, параметрам волнообразования по контуру m и образующей n, параметрам материала и конструкции λ_j. Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величины q_a в зависимости от m, n при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы (40).

Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 4, 5. На рис. 4 показана зависимость критической величины внутреннего давления интенсивностью q_a от внешней нагрузки интенсивности q_b, моделирующей собой давление массива горных пород на крепь при различных значениях внутреннего радиуса a монолитной крепи. При этом кривая 1 соответствует $a = 0.6$, кривая 2 — $a = 0.5$, кривая 3 — $a = 0.4$. На рис. 5 представлена зависимость критического давления интенсивностью q_a от относительного внутреннего радиуса a монолитной крепи при различных значениях коэффициента упрочнения c материала крепи с полностью сжатой матрицей. При этом кривая 1 соответствует $c = 0.01$, кривая 2 — $c = 0.04$, кривая 3 — $c = 0.08$. В расчетах принималось $q_b = 0.03$.

Всем расчетам, результаты которых отражены на рис. 4, 5, соответствуют значения параметров волнообразования $m = n = 3$. Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, если не оговорено особо, брались следующими: $k = 0.007$, $\lambda_1 = 2$, $\mu_1 = 1$, $\varepsilon_0 = 8 \cdot 10^{-4}$.

Анализ численных расчетов позволяет сделать следующие выводы:

– потеря устойчивости монолитной крепи вертикальной горной выработки происходит по осесимметричной форме, которой соответствуют значения параметров волнообразования $m = n = 3$;

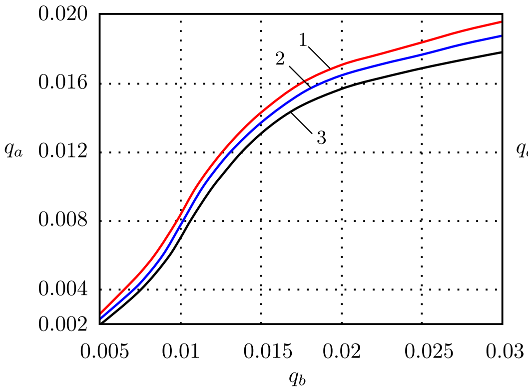

Рис. 4. Зависимость критической величины внутреннего давления от внешней нагрузки [Figure 4. The dependence of the critical value of internal pressure on the external load value]

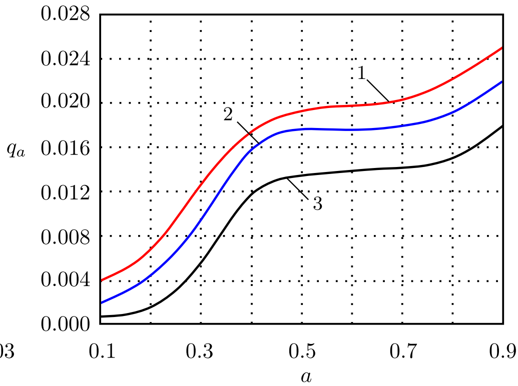

Рис. 5. Зависимость критической величины внутреннего давления от внутреннего радиуса монолитной крепи [Figure 5. The dependence of the critical value of internal pressure on the inner radius of the monolithic lining]

– область устойчивости монолитной крепи вертикальной горной выработки существенно зависит как от физико-механических, так и от геометрических параметров конструкции, при этом как при увеличении относительной толщины крепи, так и с ростом относительного коэффициента упрочнения c материала крепи с полностью сжатой матрицей область устойчивости расширяется;
– с ростом давления горного массива интенсивностью q_b на внешнюю поверхность крепи значения внутреннего критического давления, соответствующие потере устойчивости, увеличиваются.

Декларация о финансовых и других взаимоотношениях. Исследование не имело спонсорской поддержки. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами. Авторы не получали гонорар за статью.

ORCIDs
Дмитрий Викторович Гоцев: http://orcid.org/0000-0002-0100-4762
Алексей Евгеньевич Бунтов: http://orcid.org/0000-0001-8750-1307

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Цытович Н. А. *Механика грунтов.* М.: Высш. шк., 1983. 320 с.
2. Гоцев Д. В., Спорыхин А. Н. Локальная неустойчивость горизонтальных выработок с многослойной крепью в упругопластических массивах // *Изв. РАН. МТТ*, 2004. Т. 39, № 1. С. 158–166.
3. Гоцев Д. В., Ененко И. А., Спорыхин А. Н. Локальная неустойчивость горизонтальных выработок многоугольной формы в упруговязкопластических массивах // *ПМТФ*, 2005. Т. 46, № 2. С. 141–150, http://sibran.ru/journals/issue.php?ID=120019&ARTICLE_ID=125145.
4. Гоцев Д. В., Ененко И. А., Спорыхин А. Н. Локальная неустойчивость горизонтальных выработок эллиптической формы в упруговязкопластических массивах // *Изв. РАН. МТТ*, 2007. Т. 42, № 2. С. 183–192.
5. Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. *Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород.* М.: Физматлит, 2004. 232 с.
6. Гузь А. Н. *Основы теории устойчивости горных выработок.* Киев: Наук. думка, 1977. 204 с.
7. Садовская О. В., Садовский В. М. *Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред.* М.: Физматлит, 2008. 368 с.
8. Гоцев Д. В., Бунтов А. Е. Устойчивость монолитной крепи подземного нефтехранилища сферической формы с учетом начальной пористости материала // *Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2014. № 4 (22). С. 114–123.
9. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. *Математическая теория пластичности.* М.: Физматлит, 2001. 701 с.
10. Гельфонд А. О. *Исчисление конечных разностей.* М.: Гостехиздат, 1962.

Поступила в редакцию 14/III/2016;
в окончательном варианте — 26/VII/2016;
принята в печать — 09/IX/2016.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 457–474

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1486

MSC: 74L10, 74E35

THE STABILITY OF MONOLITHIC LINING OF THE VERTICAL MINE WORKINGS WITH THE INITIAL POROSITY OF THE MATERIAL AND NON-ELASTIC COMPRESSION WORK SKELETON

D. V. Gotsev, A. E. Buntov

Russian Air Force Military Educational and Scientific Center
of the "N. E. Zhukovskiy and Yu. A. Gagarin Air Force Academy",
54 a, Staryh Bolshevikov str., Voronezh, 394064, Russian Federation.

Abstract

A mathematical model has been made that describes the basic stress-strain state of the monolithic lining vertical excavation for materials with a porous structure, the skeleton of which has compressed the hardening elastoplastic properties. The deformation of the porous medium under the action of given radial compressive loads is divided into two interconnected parts: the elastic deformation of the porous medium and the inelastic deformation of the compressed matrix. The problem of determining the fields of stresses and displacements lining vertical production at each stage of deformation is solved within the framework of the plane strain. It does not take into account the effects due to the fact that the excavation has a finite depth. The equations define the field of stresses and displacements in the first and second stages of the deformation. The conditions of compatibility are the continuity conditions of the selected components of stresses and displacements in the elastic-plastic boundary and plastic strains are equal to zero on it. Within the framework of the exact three-dimensional equations of stability, the stability of the ground state of the monolithic lining vertical excavation in rock mass with tight pores has been studied. The estimation of influence on the value of the boundary between the elastic and plastic deformation of the initial porosity of the media and the yield strength of the material has been explained. The main component of the stress state of the coordinate values for different values of the initial solution pores and other physical and mechanical and geometric parameters of the material and the design have been studied and verified.

Keywords: dimensional stability theory, porous structure, complex rheology of the compressed matrix, geometrically linear deformation theory.

Please cite this article in press as:
Gotsev D. V., Buntov A. E. The stability of monolithic lining of the vertical mine workings with the initial porosity of the material and non-elastic compression work skeleton, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 457–474. doi: 10.14498/vsgtu1486. (In Russian)

Authors Details:
Dmitry V. Gotsev (Dr. Phys. & Math. Sci.; rbgotsev@mail.ru), Professor, Dept. of Mathematics.
Alexey E. Buntov (alexey.buntov@mail.ru; Corresponding Author), Postgraduate Student in a Military Academy, Dept. of the Airport Engineering Support.

Declaration of Financial and Other Relationships. The research has not had any sponsorship. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript. The authors have not received any fee for the article.

ORCIDs
Dmitry V. Gotsev: http://orcid.org/0000-0002-0100-4762
Alexey E. Buntov: http://orcid.org/0000-0001-8750-1307

REFERENCES

1. Tsytovich N. A. *Mekhanika gruntov* [Soil mechanics]. Moscow, Vyssh. shk., 1983, 320 pp. (In Russian)
2. Gotsev D. V., Sporykhin A. N. Local buckling of drifts with a composite lining in an elastoplastic rock, *Mech. Solids*, 2004, vol. 39, no. 1, pp. 121–126.
3. Gotsev D. V., Enenko I. A., Sporykhin A. N. Local instability of horizontal tunnels of polygonal shape in viscoelastoplastic masses, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2005, vol. 46, no. 2, pp. 267–274. doi: 10.1007/s10808-005-0052-2.
4. Gotsev D. V., Enenko I. A., Sporykhin A. N. Local instability of horizontal elliptic excavations in elastoviscoplastic rock masses, *Mech. Solids*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 321–328. doi: 10.3103/S0025654407020161.
5. Sporykhin A. N., Shashkin A. I. *Ustoichivost' ravnovesiia prostranstvennykh tel i zadachi mekhaniki gornykh porod* [Stability of spatial equilibrium of bodies and problems of the mechanics of rock]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 232 pp. (In Russian)
6. Guz A. N. *Osnovy teorii ustoichivosti gornykh vyrabotok* [Fundamentals of the Theory of Stability of Mine Workings]. Kiev, Nauk. dumka, 1977, 204 pp. (In Russian)
7. Sadovskaya O., Sadovskii V. *Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials*, Advanced Structured Materials, vol. 21. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2012, 390 pp. doi: 10.1007/978-3-642-29053-4.
8. Gotsev D. V., Buntov A. E., *Vestnik ChGPU im. I. Ya. Iakovleva. Ser. Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2014, no. 4 (22), pp. 114–123 (In Russian).
9. Ishlinskii A. Yu., Ivlev D. D. *Matematicheskaia teoriia plastichnosti* [The Mathematical Theory of Plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 701 pp. (In Russian)
10. Gel'fond A. O. *Ischislenie konechnykh raznostei* [The Calculus Of Finite Differences]. Moscow, Gostekhizdat, 1962 (In Russian).

Received 14/III/2016;
received in revised form 26/VII/2016;
accepted 09/IX/2016.