Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 1. С. 7–41
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1529

УДК 517.958:531.332

О скорости стабилизации решений задачи Коши для уравнения Карлемана с периодическими начальными данными

С. А. Духновский

Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет,
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26.

Аннотация

Исследуется одномерная система уравнений для дискретной модели газа (система уравнений Карлемана). Система Карлемана является кинетическим уравнением Больцмана модельного одномерного газа, состоящего из двух частиц. Для этой модели не сохраняются импульс и энергия. На примере модели Карлемана хорошо видна суть уравнения Больцмана, которое описывает смесь «конкурирующих» процессов: релаксацию и свободное движение. Доказывается существование глобального решения задачи Коши для возмущения состояния равновесия с периодическими начальными данными. Впервые устанавливается скорость стабилизации к состоянию равновесия (экспоненциальная стабилизация).

Ключевые слова: кинетическое уравнение, уравнение Карлемана, Фурье-решение, состояние равновесия, секулярные члены, обобщенное решение.

Получение: 21 января 2017 г. / Исправление: 25 февраля 2017 г. /
Принятие: 13 марта 2017 г. / Публикация онлайн: 11 мая 2017 г.

Научная статья

Образец для цитирования
Духновский С. А. О скорости стабилизации решений задачи Коши для уравнения Карлемана с периодическими начальными данными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 7–41. doi: 10.14498/vsgtu1529.

Сведения об авторе
Сергей Анатольевич Духновский http://orcid.org/0000-0001-9643-7394
аспирант; каф. прикладной математики; e-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru

Введение. В этой работе мы продолжим исследование стабилизации решений нелинейных гиперболических уравнений в частных производных на примере так называемой дискретной модели Карлемана кинетического уравнения Больцмана [1–10]. В работе [9] были получены труднопроверяемые условия существования глобального решения без установления скорости стабилизации и структуры решения для больших значений $t \gg 1$. Последнее важно с точки зрения гипотезы Буслаева—Пелермана—Комеча [11, 12]: *на больших временах решения задачи Коши с ограниченной энергией распадаются на суперпозицию слабо взаимодействующих солитонов и убывающую дисперсионную волну*. Для общих гиперболических уравнений в частных производных рассматривались начальные данные с компактным носителем и убывание решения доказывалось на фиксированном компакте. Но такие результаты оказались недостаточными для теории асимптотической устойчивости решений нелинейных гиперболических уравнений [11–14]. В данной статье исследуется одномерная система уравнений для дискретной модели газа (система уравнений Карлемана). Доказывается существование глобального решения задачи Коши для возмущения состояния равновесия с периодическими начальными данными. Впервые устанавливается скорость стабилизации к состоянию равновесия (экспоненциальная стабилизация).

1. Постановка задачи. Рассмотрим модель Карлемана

$$\begin{aligned} &\partial_t u + \partial_x u = -\frac{1}{\varepsilon}(u^2 - w^2), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ &\partial_t w - \partial_x w = \frac{1}{\varepsilon}(u^2 - w^2), \end{aligned} \tag{1}$$

которая описывает одноатомный газ с двумя частицами с соответствующими плотностями $u = u(x,t)$, $w = w(x,t)$. При этом одна из них имеет скорость $c = 1$, другая $c = -1$.

Задача. *Необходимо найти периодическое по x решение $u(x,t)$, $w(x,t)$ задачи Коши для системы уравнений Карлемана* (1).

2. Фурье-решение (локальное равновесие для уравнения Карлемана). Мы исследуем задачу Коши (1) для малых возмущений состояния равновесия $u_e = w_e > 0$ системы (1). Положим

$$u = u_e + w_e^{1/2}\varepsilon^2\widehat{u}, \quad w = w_e + w_e^{1/2}\varepsilon^2\widehat{w}.$$

Тогда

$$\begin{gathered} \partial_t\widehat{u} + \partial_x\widehat{u} - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w} - \widehat{u}) = -\varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u} + \widehat{w})(\widehat{u} - \widehat{w}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \partial_t\widehat{w} - \partial_x\widehat{w} + 2w_e\frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w} - \widehat{u}) = \varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u} + \widehat{w})(\widehat{u} - \widehat{w}), \\ \widehat{u}|_{t=0} = \widehat{u}^0, \quad \widehat{w}|_{t=0} = \widehat{w}^0. \end{gathered} \tag{2}$$

Для периодических решений с нулевыми средними

$$\widehat{u}(t,x) = u_0(t) + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} u_k(t)e^{ikx}, \quad \widehat{w}(t,x) = w_0(t) + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} w_k(t)e^{ikx},$$

$\mathbb{Z}_0 = \{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$, введем весовые пространства $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$, $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$, $\mathcal{H}_\sigma$ со следующими нормами:

$$\|\widehat{u}\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} = \Big\|\frac{d}{dt}\widehat{u}\Big\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma-1})} + \|\widehat{u}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)},$$

$$\|\widehat{u}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} = \int_0^\infty e^{2\gamma t}|u_0(t)|^2 dt + \int_0^\infty e^{2\gamma t} \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma}|u_k(t)|^2 dt,$$

$$|||\widehat{u}^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma} = \big|\big|\big|\widehat{u}|_{t=0}\big|\big|\big|^2_{\mathcal{H}_\sigma} = |u^0_0|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma}|u^0_k|^2.$$

Целью этой статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Существуют постоянные $\gamma = \varepsilon\mu_0 > 0$, $\mu_0 = O(1)$, $q \in (0,1)$ такие, что для периодических начальных данных $(\widehat{u}^0, \widehat{w}^0)$ с нулевыми средними и ограниченной нормой*

$$\big(|||\widehat{u}^0|||_{\mathcal{H}_\sigma} + |||\widehat{w}^0|||_{\mathcal{H}_\sigma}\big) \leqslant \varepsilon^2 q$$

для $\sigma > 3/2$ существует глобальное решение $(\widehat{u}, \widehat{w}) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$ задачи Коши (2).

Отсюда следует принцип локального равновесия с экспоненциальной стабилизацией к состоянию равновесия. В [7] получена система ОДУ для так называемого обобщенного Фурье-решения задачи Коши (2), т. е. получена система ОДУ для коэффициентов Фурье $\{u_0, w_0, u_k, w_k,\ k \in \mathbb{Z}_0\}$:

$$u_k = -w_k + (u^0_k + w^0_k)e^{-ikt} + 2ik\int_0^t e^{ik(s-t)} w_k ds, \quad u_0 = -w_0,$$
$$w_k = w^0_k e^{(ik-4w_e/\varepsilon)t} + y_k, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Предполагаем, что средние

$$u^0_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{u}^0(x)dx = 0, \quad w^0_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{w}^0(x)dx = 0.$$

В [7] доказывается, что для y_k имеет место бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{d}{dt}y_k - iky_k + 4w_e\frac{1}{\varepsilon}\, y_k - 4ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{ik(s-t)} y_k ds = w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k e^{-ikt} +$$
$$+ f_k(t)e^{-4w_e t/\varepsilon} + \varepsilon w_e^{1/2}\big(2L_k(y) + 4B_k(y,y)\big) - \varepsilon w_e^{1/2} T_k^{add}(y), \quad (3)$$
$$y_k\Big|_{t=0} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Здесь $T_k^{add}(y)$ — оператор возмущения базовой системы

$$\frac{d}{dt}y_k - iky_k + 4w_e\frac{1}{\varepsilon}\, y_k - 4ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{ik(s-t)} y_k ds =$$
$$= w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k e^{-ikt} + f_k(t)e^{-4w_e t/\varepsilon} + \varepsilon w_e^{1/2}\big(2L_k(y) + 4B_k(y,y)\big), \quad (4)$$
$$y_k|_{t=0} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Функции D_k, $f_k(t)$, $L_k(y)$, $B_k(y,y)$, $T_k^{add}(y)$ определены в [4,7].

3. Конечная аппроксимация. Для построения аппроксимационного решения задачи Коши (2) в [7] вводится конечная аппроксимация бесконечной системы (4):

$$T_k^{(m)}(y_k^{(m)}) = \frac{d}{dt}y_k^{(m)} - iky_k^{(m)} + 4w_e\frac{1}{\varepsilon}y_k^{(m)} - 4ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{ik(s-t)}y_k^{(m)}ds =$$
$$= w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k^{(m)}e^{-ikt} + f_k^{(m)}(t)e^{-4w_e t/\varepsilon} +$$
$$+ \varepsilon w_e^{1/2}\big(2L_k^{(m)}(y^{(m)}) + 4B_k^{(m)}(y^{(m)}, y^{(m)})\big), \quad (5)$$

$$y_k^{(m)}|_{t=0} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0, \quad |k| \leqslant m.$$

Из классических результатов следует следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\sigma > 3/2$, $u|_{t=0}$, $w|_{t=0} \in H^\sigma(0,2\pi)$ и средние значения $u_0^0 = w_0^0 = 0$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ фиксировано. Тогда существует $T^* > 0$, возможно, зависящее от m, такое что усеченная система (5) имеет единственное решение на интервале $[0, T^*]$.*

Ниже мы докажем, что $T^* = \infty$ и определяемое Фурье-решением решение задачи Коши экспоненциально быстро стремится к состоянию равновесия. В правой части (5) появляются секулярные члены $w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k e^{-ikt}$, не принадлежащие $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Введем векторное пространство $Q^{(m)} = (Q_k^{(m)},\ |k| \leqslant m,\ k \neq 0) \in \mathcal{H}_\sigma^{(m)}$ с нормой

$$|||Q(m)|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} = \sum_{k,\ |k|\leqslant m, k\neq 0} |k|^{2\sigma}|Q_k^{(m)}|^2.$$

Решение системы (5) будем искать в виде

$$y_k^{(m)} = Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}), \quad z_k^{(m)}|_{t=0} = 0,$$
$$Q_m \in \mathcal{H}_\sigma^{(m)}, \quad Z^{(m)} \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)}),$$

где $x^{(m)} = (x_k^{(m)},\ |k| \leqslant m, k \neq 0)$, $Z^{(m)} = (z_k^{(m)},\ |k| \leqslant m, k \neq 0)$, а нормы

$$\|x^{(m)}\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} = \left\|\frac{d}{dt}x^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma-1}^{(m)})} + \|x^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})},$$
$$\|x^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} = \int_0^\infty e^{2\gamma t}\sum_{k,\ |k|\leqslant m, k\neq 0}|k|^{2\sigma}|x_k^{(m)}(t)|^2\ dt.$$

В [7] доказано существование $\gamma = O(\varepsilon) > 0$ такого, что для любого $k \in \mathbb{Z}_0$ существует единственное решение задачи Коши

$$T_k(x_k) = e^{-ikt}, \quad x_k\big|_{t=0} = 0,$$

принадлежащее $x_k(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Такое решение будем обозначать через $x_k(t) = T_k^{-1}(e^{-ikt})$. Также единственное решение задачи Коши

$$T_k(x_k) = z_k, \quad x_k|_{t=0} = 0, \quad z_k(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+),$$

$x_k(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, будем обозначать через $x_k(t) = T_k^{-1}(z_k)$.

В переменных $(z_k^{(m)}, Q_k)$ (см. [7]) система (5) при выполнении условия секулярности

$$w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}D_k^{(m)} - Q_k^{(m)} + \varepsilon w_e^{1/2} S_k^{(m)}(Q^{(m)}) = 0, \quad |k| = 1, 2, \ldots, m,$$

запишется в виде

$$\begin{aligned} z_k^{(m)} = \big(f_k^{(m)}(t) + \varepsilon w_e^{1/2} g_k^L(t)\big)e^{-4w_e t/\varepsilon} + \\ + \varepsilon w_e^{1/2}\big(2(H_k^L(t) + 4H_k^B(t)\big) + \varepsilon w_e^{1/2}\big(4L_k^B\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big) + \\ + 4B_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big) + 2L_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big)\big)\big). \end{aligned} \tag{6}$$

В итоге получаем систему в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

4. Нелинейное уравнение в банаховом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$. Теперь докажем теорему существования и единственности решения нелинейного уравнения (6). Для доказательства нам понадобятся следующие оценки (см. [22]) линеаризованного оператора $T_k^{-1}(z_k^{(m)})$ в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$.

Лемма 1. *Пусть* $0 < \mu_0 < \frac{1}{4w_e}$. *Тогда существует* $c_0 > 0$, *не зависящая от* ε, p, *такая, что для любых* $k \in \mathbb{Z}_0$ *и* $\Re p \geqslant -\varepsilon\mu_0$, $\mu_0 > 0$, *имеем*

$$\|T^{-1}(Z^{(m)})\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}c_0\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}. \tag{7}$$

Более того, для $\Re p \geqslant -\varepsilon\mu_0$, $\mu_0 > 0$, *имеем*

$$\Big\|\frac{1}{|k|}\frac{d}{dt}T^{-1}(Z^{(m)})\Big\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}c_0\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}. \tag{8}$$

Теперь положим

$$I_k(T_k^{-1}(z_k)) = -4iw_e\int_0^t e^{ik(s-t)}T_k^{-1}(z_k)ds,$$
$$I(T^{-1}(Z)) = \big\{I_k(T_k^{-1}(z_k)),\ k \in \mathbb{Z}_0\big\},$$
$$\mathcal{I}(T^{-1}(Z)) = \big\{kI_k(T_k^{-1}(z_k)),\ k \in \mathbb{Z}_0\big\}.$$

Лемма 2. *Существует* $c_1 > 0$, *не зависящая от* ε, p, *такая, что для любых* $k \in \mathbb{Z}$ *и* $\Re p \geqslant -\varepsilon\mu_0$, $\mu_0 > 0$, *имеем*

$$\|\mathcal{I}(T^{-1}(Z^{(m)})\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}c_1\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}. \tag{9}$$

В то же время

$$\|I(T^{-1}(Z^{(m)})\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant c_1\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Далее определим класс решений следующей задачи Коши:

$$T_k(z_k^{(m)}) = \frac{d}{dt}z_k^{(m)} - ikz_k^{(m)} + 4w_e\frac{1}{\varepsilon}z_k^{(m)} - \\ - 4ikw_e\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{ik(s-t)}z_k^{(m)}ds = e^{-ikt}, \tag{10}$$

$$z_k^{(m)}\big|_{t=0} = 0.$$

Лемма 3. *Существует $c_2 > 0$, не зависящая от ε, p, такая, что для любых $k \in \mathbb{Z}_0$ и $\Re p \geqslant -\gamma$, $\gamma = \varepsilon\mu_0$, $\mu_0 > 0$, решение задачи Коши (10) $Z^{(m)} = \{T_k^{-1}(e^{-ikt}),\ k \in \mathbb{Z}_0\}$:*

$$T_k^{-1}(e^{-ikt}) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+), \quad \gamma = \varepsilon\mu_0, \quad \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant c_2\sqrt{\varepsilon}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0.$$

Более того, для любой $Q^{(m)} = \{Q_k^{(m)},\ k \in \mathbb{Z}_0\} \in \mathcal{H}_\sigma$ функция $Z^{Q^{(m)}} = \{Q_k^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}),\ k \in \mathbb{Z}_0\}$:

$$Z^{Q^{(m)}} \in H^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)}),$$
$$\|Z^{Q^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant \sqrt{\varepsilon}\ c_2|||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}},$$
$$\left\|\frac{d}{dt}Z^{Q^{(m)}}\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}c_2|||Q^{(m)}|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}.$$

Перепишем нелинейное уравнение в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$ в более компактном виде:

$$z_k^{(m)} = e^{-4w_et/\varepsilon}\mathcal{F}_k^{(m)}(t) + \varepsilon w_e^{1/2}\mathcal{G}_k^{(m)}(t) + \\ + \varepsilon w_e^{1/2}\big\{4L_k^B\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big) + 2L_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big) + \\ + 4B_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big)\big\}. \tag{11}$$

Здесь

$$Z^{(m)}, \mathcal{G}^{(m)} \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)}), \quad \mathcal{F}^{(m)} \in L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)});$$

$$Z^{(m)}(t) = (z_k^{(m)}(t),\ |k| \leqslant m, k \neq 0), \quad \mathcal{G}^{(m)}(t) = (\mathcal{G}_k^{(m)}(t), |k| \leqslant m, k \neq 0);$$

$$\mathcal{F}^{(m)}(t) = (\mathcal{F}_k^{(m)}(t),\ |k| \leqslant m, k \neq 0);$$

$$\mathcal{F}_k^{(m)}(t) = f_k^{(m)}(t) + 2\varepsilon w_e^{1/2}g_k^L(t), \quad \mathcal{G}_k^{(m)}(t) = 2\big(H_k^L(t) + 2H_k^B(t)\big);$$

$$
\begin{aligned}
f_k^{(m)}(t) = {} & \frac{2ik}{(ik-2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w_e w_k^0 \frac{1}{\varepsilon} e^{ikt} + \\
& + 4\varepsilon w_e^{1/2} \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\, k\in\mathbb{Z}_0,\\ |k_1|\leqslant m,\, |k_2|\leqslant m}} \Big\{ \frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w_{k_2}^0 e^{ik_2t} \times \\
& \times \Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w_{k_1}^0 (e^{(ik_1-4w_e/\varepsilon)t} - e^{-ik_1t}) - w_{k_1}^0 e^{(ik_1-4w_e/\varepsilon)t} \Big) - \\
& - \frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w_{k_2}^0 e^{-ik_2t} e^{ik_1t} \Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w_{k_1}^0 - w_{k_1}^0 \Big) \Big\} + \\
& + 2\varepsilon w_e^{1/2} \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\, k\in\mathbb{Z}_0,\\ |k_1|\leqslant m,\, |k_2|\leqslant m}} \Big\{ (u_{k_1}^0 + w_{k_1}^0) e^{-ik_1t} \frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w_{k_2}^0 e^{ik_2t} + \\
& + \Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w_{k_1}^0 - w_{k_1}^0 \Big) e^{ik_1t} (u_{k_2}^0 + w_{k_2}^0) e^{-ik_2t} \Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_k^L(t) = {} & \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\, k\in\mathbb{Z}_0,\\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}} \Big\{ \frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w_{k_2}^0 e^{ik_2t} \times \\
& \times \Big(-\frac{\varepsilon}{4w_e} Q_{k_1}^{(m)} e^{-ik_1t} + \frac{\varepsilon}{4w_e} Q_{k_1}^{(m)} \Big(\frac{d}{dt} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t}) - ik_1 T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t}) + \\
& + 4w_e \frac{1}{\varepsilon} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t}) \Big) - Q_{k_1}^{(m)} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t}) \Big) + \\
& + \Big(-\frac{\varepsilon}{4w_e} Q_{k_2}^{(m)} e^{-ik_2t} + \frac{\varepsilon}{4w_e} Q_{k_2}^{(m)} \Big(\frac{d}{dt} T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t}) - ik_2 T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t}) + \\
& + 4w_e \frac{1}{\varepsilon} T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t}) \Big) \Big) \Big(\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})} w_{k_1}^0 e^{ik_1t} - w_{k_1}^0 e^{ik_1t} \Big) \Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_k^B(t) = {} & \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\, k\in\mathbb{Z}_0,\\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}} \Big\{ -\frac{\varepsilon}{4w_e} Q_{k_2}^{(m)} e^{-ik_2t} \times \\
& \times \Big(\frac{\varepsilon}{4w_e} Q_{k_1}^{(m)} \Big(\frac{d}{dt} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t}) - ik_1 T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t}) + 4w_e \frac{1}{\varepsilon} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t}) \Big) - \\
& - Q_{k_1}^{(m)} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t}) \Big) + \Big(-\frac{\varepsilon}{4w_e} Q_{k_1}^{(m)} e^{-ik_1t} \Big) \frac{\varepsilon}{4w_e} Q_{k_2}^{(m)} \Big(\frac{d}{dt} T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t}) - \\
& - ik_2 T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t}) + 4w_e \frac{1}{\varepsilon} T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t}) \Big) + \\
& + \frac{\varepsilon}{4w_e} Q_{k_2}^{(m)} \Big(\frac{d}{dt} T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t}) - ik_2 T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t}) + 4w_e \frac{1}{\varepsilon} T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2t}) \Big) \times \\
& \times \Big(\frac{\varepsilon}{4w_e} Q_{k_1}^{(m)} \Big(\frac{d}{dt} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t}) - ik_1 T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t}) + \\
& + 4w_e \frac{1}{\varepsilon} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t}) \Big) - Q_{k_1}^{(m)} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1t}) \Big) \Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_k^L(t) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\, k\in\mathbb{Z}_0,\\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}} &\Big\{-\frac{1}{2}\frac{ik_2}{(ik_2-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_2}e^{-ik_2t}\times\\
&\times\Big(\frac{\varepsilon}{4w_e}Q^{(m)}_{k_1}\Big(\frac{d}{dt}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t})-ik_1T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t})+4w_e\frac{1}{\varepsilon}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t})\Big)-\\
&\qquad -Q^{(m)}_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t})\Big)+\\
&+\frac{\varepsilon}{4w_e}Q^{(m)}_{k_2}\Big(\frac{d}{dt}T^{-1}_{k_2}(e^{-ik_2t})-ik_2T^{-1}_{k_2}(e^{-ik_2t})+4w_e\frac{1}{\varepsilon}T^{-1}_{k_2}(e^{-ik_2t})\Big)\times\\
&\qquad\times\Big(-\frac{1}{2}\frac{ik_1}{(ik_1-2w_e\frac{1}{\varepsilon})}w^0_{k_1}e^{-ik_1t}\Big)\Big\}+\\
+\sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ |k_1|,|k_2|=1,\dots,m}} &\Big\{(u^0_{k_1}+w^0_{k_1})e^{-ik_1t}\frac{\varepsilon}{4w_e}Q^{(m)}_{k_2}\Big(\frac{d}{dt}T^{-1}_{k_2}(e^{-ik_2t})-\\
&\qquad -ik_2T^{-1}_{k_2}(e^{-ik_2t})+4w_e\frac{1}{\varepsilon}T^{-1}_{k_2}(e^{-ik_2t})\Big)+\\
&+\Big(\frac{\varepsilon}{4w_e}Q^{(m)}_{k_1}\Big(\frac{d}{dt}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t})-ik_1T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t})+4w_e\frac{1}{\varepsilon}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t})\Big)-\\
&\qquad -Q^{(m)}_{k_1}T^{-1}_{k_1}(e^{-ik_1t})\Big)(u^0_{k_2}+w^0_{k_2})e^{-ik_2t}\Big\}.
\end{aligned}
$$

5. Оценки правой части нелинейного уравнения (11). Для доказательства вышеуказанных теорем необходимы оценки каждого слагаемого в правой части нелинейного уравнения (11).

Лемма 4. *Для $\sigma > 3/2$ справедливы следующие оценки:*

$$
\begin{aligned}
\varepsilon w_e^{1/2}\big\|B(T_k^{-1}(Z^{(m)}),T_k^{-1}(Z^{(m)}))\big\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)} &\leqslant\\
\leqslant \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}c^2_{5,\sigma}\|Z^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)},
\end{aligned}\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon w_e^{1/2}\big\|L_k^{(m)}(T_k^{-1}(Z^{(m)}))\big\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)} &\leqslant\\
\leqslant \big(|||u^0|||_{\mathcal{H}^{(m)}_\sigma}+|||w^0|||_{\mathcal{H}^{(m)}_\sigma}\big)c_{6,\sigma}\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)},
\end{aligned}\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon w_e^{1/2}\big\|B(T_k^{-1}(Z^{(m)}),Q^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}))\big\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)} &\leqslant\\
\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}^{(m)}_\sigma}+|||w^0|||_{\mathcal{H}^{(m)}_\sigma}\big)c_{7,\sigma}\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)},
\end{aligned}\tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon w_e^{1/2}\big\|B(Q^{(m)}T_k^{-1}(e^{-ikt}),T_k^{-1}(Z^{(m)}))\big\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)} &\leqslant\\
\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}^{(m)}_\sigma}+|||w^0|||_{\mathcal{H}^{(m)}_\sigma}\big)c_{7,\sigma}\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)},
\end{aligned}\tag{15}
$$

Доказательство. Начнем с оценки билинейной формы:

$$J_1 = \varepsilon^2 w_e \Big\| B(T_k^{-1}(Z^{(m)}), T_k^{-1}(Z^{(m)})) \Big\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} =$$

$$= \Big\| \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\, k\in\mathbb{Z}_0,\\ |k_1|\leqslant m,\, |k_2|\leqslant m}} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})ds \times$$

$$\times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})ds - T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) \right) \Big\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}. \quad (16)$$

Распишем (16) по определению нормы:

$$J_1 = \varepsilon^2 w_e \int_0^\infty e^{2\gamma t} \sup_{k\in\mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} \Big| \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\, k\in\mathbb{Z}_0,\\ |k_1|\leqslant m,\, |k_2|\leqslant m}} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} \times$$

$$\times T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})ds \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})ds - T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) \right) \Big|^2 dt.$$

Вносим супремум под знак суммы. Здесь пользуемся тем,что

$$\big(|k_1| + |k_2|\big)^\sigma \leqslant c_\sigma \big(|k_1|^\sigma + |k_2|^\sigma\big),$$

где $c_\sigma = 2^{\sigma-1}$. Тогда оценка перепишется в виде

$$J_1 \leqslant \varepsilon^2 w_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \Big| \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\, k\in\mathbb{Z}_0,\\ |k_1|\leqslant m,\, |k_2|\leqslant m}} \frac{ik_2}{|k_2|^\sigma} \times$$

$$\times \sup_{\substack{k_1\in\mathbb{Z}_0,\\ |k_1|\leqslant m}} \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)})ds \times$$

$$\times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)})ds - T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)}) \right) \Big|^2 dt +$$

$$+ \varepsilon^2 w_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \Big| \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\, k\in\mathbb{Z}_0,\\ |k_1|\leqslant m,\, |k_2|\leqslant m}} \frac{k_1}{|k_1|^\sigma} \times$$

$$\times \sup_{\substack{k_2\in\mathbb{Z}_0,\\ |k_2|\leqslant m}} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)})ds \times$$

$$\times \left(i \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)})ds \right) \Big|^2 dt +$$

$$+ \varepsilon^2 w_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \Big| \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\, k\in\mathbb{Z}_0,\\ |k_1|\leqslant m,\, |k_2|\leqslant m}} \frac{k_1}{|k_1|^\sigma} \times$$

$$\times \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leqslant m}} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)}) ds \frac{T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)})}{k_1} \Bigg|^2 dt.$$

Обозначим интегралы через

$$A_{k_2}(t) = i \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)}) ds,$$

$$A_{k_1}(t) = ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)}) ds - T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)}),$$

$$B_{k_2}(t) = ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)}) ds,$$

$$B_{k_1}(t) = i \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)}) ds.$$

С учетом вышеуказанных обозначений получаем следующую оценку:

$$J_1 \leqslant \varepsilon^2 w_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \Bigg| \sum_{\substack{k_1 + k_2 = k, k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leqslant m, |k_2| \leqslant m}} \frac{k_2}{|k_2|^\sigma} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leqslant m}} A_{k_2} A_{k_1} \Bigg|^2 dt +$$

$$+ \varepsilon^2 w_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \Bigg| \sum_{\substack{k_1 + k_2 = k, k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leqslant m, |k_2| \leqslant m}} \frac{k_1}{|k_1|^\sigma} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leqslant m}} B_{k_2} B_{k_1} \Bigg|^2 dt +$$

$$+ \varepsilon^2 w_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \Bigg| \sum_{\substack{k_1 + k_2 = k, k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leqslant m, |k_2| \leqslant m}} \frac{k_1}{|k_1|^\sigma} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leqslant m}} B_{k_2} \frac{T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)})}{k_1} \Bigg|^2 dt.$$

Для вычисления выносим супремум выражений по переменной t для того, чтобы получить подынтегральное выражение, не зависящее от соответствующих k_1 или k_2, при этом знак суммы можно вынести из-под знака интеграла. Следует учесть, что ряды

$$c_1 = \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{k_1^2}{|k_1|^{2\sigma}} < \infty, \quad c_2 = \sum_{k_2=1} \frac{k_2^2}{|k_2|^{2\sigma}} < \infty$$

сходятся при $2\sigma - 2 > 1$, $\sigma > 3/2$, а также, что

$$\sum_{\substack{k_1 = k - k_2, k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leqslant m, |k_2| \leqslant m}} \Big(\frac{k_1}{|k_1|^\sigma} \Big)^2 \leqslant \sum_{k_1=1}^{\infty} \Big(\frac{k_1}{|k_1|^\sigma} \Big)^2.$$

Тогда оценка J_1 примет следующий вид:

$$J_1 \leqslant \varepsilon^2 w_e c_\sigma^2 \sup_t \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leqslant m}} \Big| A_{k_2} \Big|^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \Big| \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leqslant m}} A_{k_1} \Big|^2 dt \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{k_2^2}{|k_2|^{2\sigma}} + \quad (17)$$

$$+\varepsilon^2 w_e c_\sigma^2 \sup_t \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_1| \leqslant m}} \Big|B_{k_1}\Big|^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \Big| \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_2| \leqslant m}} B_{k_2}\Big|^2 dt \sum_{k_1=1}^\infty \frac{k_1^2}{|k_1|^{2\sigma}} + \tag{18}$$

$$+\varepsilon^2 w_e c_\sigma^2 \sup_t \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_1| \leqslant m}} \Big|\frac{T_{k_1}^{-1}(k_1^\sigma z_{k_1}^{(m)})}{k_1}\Big|^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \Big| \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_2| \leqslant m}} B_{k_2}\Big|^2 dt \sum_{k_1=1}^\infty \frac{k_1^2}{|k_1|^{2\sigma}}. \tag{19}$$

Остается вычислить супремумы:

$$\sup_t \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_2| \leqslant m}} \Big|A_{k_2}\Big|^2 = \sup_t \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_2| \leqslant m}} \Big| i\int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)}) ds\Big|^2.$$

Умножим подынтегральное выражение на $e^{-\gamma t}$ и $e^{\gamma t}$:

$$\sup_t \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_2| \leqslant m}} \Big|A_{k_2}\Big|^2 = \sup_t \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_2| \leqslant m}} \Big| i\int_0^t e^{ik_2(s-t)} e^{-\gamma t} e^{\gamma t} T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)}) ds\Big|^2.$$

Положим

$$X_1^{(m)} = \big(T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}), |k_1| \leqslant m, k_1 \neq 0\big),$$
$$X_2^{(m)} = \big(T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}), |k_2| \leqslant m, k_2 \neq 0\big),$$
$$X_3^{(m)} = \Big(\frac{1}{k_1} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}), |k_1| \leqslant m, k_1 \neq 0\Big),$$
$$X_4^{(m)} = \Big(\frac{1}{k_1}\frac{d}{dt} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}), |k_1| \leqslant m, k_1 \neq 0\Big).$$

Воспользуемся неравенством Гельдера, тогда

$$\sup_t \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_2| \leqslant m}} \Big|A_{k_2}\Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_2| \leqslant m}} \left(\left(\Big|\int_0^\infty e^{-2\gamma t}\Big|\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty e^{2\gamma t}\big|T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)})\big|^2 ds\right)^{1/2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2\gamma}\|X_2^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Воспользуемся оценкой нормы (7) и фактом, что $\gamma = \varepsilon\mu_0$:

$$\sup_t \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_2| \leqslant m}} \Big|A_{k_2}\Big|^2 \leqslant \frac{c_1}{\varepsilon}\Big(\frac{1}{\varepsilon} c_2 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}\Big)^2. \tag{20}$$

Далее

$$N_1 = \int_0^\infty e^{2\gamma t} \Big| \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leqslant m}} A_{k_1} \Big|^2 dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{2\gamma t} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leqslant m}} |k_1|^{2\sigma} \Big| ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) ds \Big|^2 dt +$$

$$+ \int_0^\infty e^{2\gamma t} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leqslant m}} |k_1|^{2\sigma} \big| T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) \big|^2 dt =$$

$$= \|\mathcal{I}(T^{-1}(Z^{(m)})\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} + \|X_1^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}. \quad (21)$$

Первую норму (21) оцениваем согласно формуле (9), а другую с помощью (7):

$$N_1 \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} c_3^2 \big\| Z^{(m)} \big\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}. \quad (22)$$

Таким образом, оценка для слагаемого (17) принимает вид

$$\varepsilon^2 w_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \Big| \sum_{\substack{k_1 + k_2 = k, k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leqslant m, |k_2| \leqslant m}} \frac{k_2}{|k_2|^\sigma} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leqslant m}} A_{k_2} A_{k_1} \Big|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 w_e c_\sigma^2 \frac{c_1}{\varepsilon} \Big(\frac{1}{\varepsilon} c_2 \| Z^{(m)} \|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \Big)^2 \Big(\frac{1}{\varepsilon} c_2 \| Z^{(m)} \|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3} \Big(c_{3,\sigma} \| Z^{(m)} \|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \Big)^4.$$

Аналогично оцениваем слагаемое (18). Здесь пользуемся оценками (20), (22):

$$\sup_t \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leqslant m}} \big| B_{k_1} \big|^2 \leqslant \frac{c_1}{\varepsilon} \Big(\frac{1}{\varepsilon} c_2 || Z^{(m)} ||_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \Big)^2,$$

$$\int_0^\infty e^{2\gamma t} \Big| \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leqslant m}} B_{k_2} \Big|^2 dt \leqslant \Big(\frac{1}{\varepsilon} c_2 || Z^{(m)} ||_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \Big)^2.$$

Отсюда следует

$$\varepsilon^2 w_e c_\sigma^2 \sup_t \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leqslant m}} \big| B_{k_1} \big|^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \Big| \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leqslant m}} B_{k_2} \Big|^2 dt \sum_{k_1 = 1}^\infty \frac{k_1^2}{|k_1|^{2\sigma}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^3} \Big(c_{3,\sigma} || Z^{(m)} ||_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \Big)^4.$$

Для слагаемого (19) супремум оценивается следующим образом:

$$N_2 = \sup_t \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_1| \leqslant m}} \Big|\frac{T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)})}{k_1}\Big|^2 =$$

$$= \sup_t \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_1| \leqslant m}} \int_0^t \frac{d}{ds}\Big|\frac{T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)})}{k_1}\Big|^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_t \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_1| \leqslant m}} \int_0^t \Big|\frac{T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)})}{k_1}\Big|\Big|\frac{d}{ds}\frac{T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)})}{k_1}\Big| ds.$$

Используя неравенство Гельдера, получим

$$N_2 \leqslant 2\Big(\int_0^\infty \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_1| \leqslant m}} \Big|\frac{T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)})}{k_1}\Big|^2 ds\Big)^{1/2} \times$$

$$\times \Big(\int_0^\infty \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_1| \leqslant m}} \Big|\frac{d}{ds}\frac{T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)})}{k_1}\Big|^2 ds\Big)^{1/2}.$$

Заметим, что $1 \leqslant e^{2\gamma t}$, $\forall t > 0$. Значит, последнее неравенство можно переписать в виде

$$N_2 \leqslant 2 \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_1| \leqslant m}} \Big(\int_0^\infty e^{2\gamma s} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_1| \leqslant m}} \Big|\frac{T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)})}{k_1}\Big|^2 ds\Big)^{1/2} \times$$

$$\times \Big(\int_0^\infty e^{2\gamma s} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_1| \leqslant m}} \Big|\frac{d}{ds}\frac{T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)})}{k_1}\Big|^2 ds\Big)^{1/2} =$$

$$= \big\|X_3^{(m)}\big\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}\big\|X_4^{(m)}\big\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Поскольку мы рассматриваем задачу при $|k| \geqslant 1$, можно записать

$$N_2 \leqslant \Big\|\Big|X_1^{(m)}\Big|\Big\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\sigma,m})}\Big\|\Big|X_4^{(m)}\Big|\Big\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Воспользуемся оценками (7), (8):

$$N_2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon^3} c_3 \|Z^{(m)})\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}. \tag{23}$$

В итоге мы получаем следующую оценку:

$$\varepsilon^2 w_e c_\sigma^2 \sup_t \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_1| \leqslant m}} \Big|\frac{T_{k_1}^{-1}(|k_1|^\sigma z_{k_1}^{(m)})}{k_1}\Big|^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t}\Big|\sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0,\\ |k_2| \leqslant m}} B_{k_2}\Big|^2 dt \sum_{k_1=1}^\infty \frac{k_1^2}{|k_1|^{2\sigma}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^3}\big(c_{4,\sigma}||Z^{(m)})||_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}\big)^4.$$

Таким образом, доказали, что

$$\big\|B(T_k^{-1}(Z^{(m)}),T_k^{-1}(Z^{(m)}))\big\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^3}c_{5,\sigma}^4\|Z^{(m)}\|^4_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Аналогично проводятся оценки для других выражений в правой части нелинейного уравнения (11). Лемма 4 доказана. □

6. Существование решения нелинейного уравнения. Решение нелинейного уравнения (11) будем находить последовательностью итераций $X^{(j)} = (X_k^{(j)},\ 1\leqslant |k|\leqslant m)$:

$$\begin{aligned} X_k^{(j)} = e^{-4w_e t/\varepsilon}\mathcal{F}_k^{(m)}(t) + \varepsilon w_e^{1/2}\mathcal{G}_k^{(m)}(t)+ \\ + \varepsilon w_e^{1/2}\Big\{B_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}),T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})\big)+ \\ + 4L_k^B\big(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})\big) + 2L_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})\big)\Big\}, \quad j\geqslant 1, \end{aligned} \tag{24}$$

$$X_k^{(0)} = e^{-4w_e t/\varepsilon}\mathcal{F}_k^{(m)}(t) + \varepsilon w_e^{1/2}\mathcal{G}_k^{(m)}(t).$$

Здесь

$$\mathcal{F}_k^{(m)}(t) = f_k^{(m)}(t) + 2\varepsilon w_e^{1/2} g_k^L(t), \quad \mathcal{G}_k^{(m)}(t) = 2\big(H_k^L(t) + 2H_k^B(t)\big).$$

Далее будет доказано, что последовательность итераций $X^{(j)}$ является фундаментальной и ее предел является решением нелинейного уравнения (11) в весовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$. Обозначим

$$\widehat{\mathcal{F}_k^{(m)}} = e^{-4w_e t/\varepsilon}\mathcal{F}_k^{(m)}(t) + \varepsilon w_e^{1/2}\mathcal{G}_k^{(m)}(t),$$

$$\widehat{\mathcal{F}^{(m)}} = \big(\widehat{\mathcal{F}_k^{(m)}(t)},\ |k|\leqslant m, k\neq 0\big).$$

Сформулируем теорему существования решения нелинейного уравнения (11) в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$.

Теорема 3. *Пусть $\sigma > 3/2$. Тогда для нелинейного уравнения (11) существует единственное решение $Z^{(m)} \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$, если*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\frac{2}{1-q}c_{1,\sigma}^2\big\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\big\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+ \\ + \frac{1}{\varepsilon}c_{4,\sigma}^2\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big) \leqslant q_2, \quad q_2\in(0,1) \end{aligned}$$

и выполняется неравенство

$$\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant \frac{1}{1-q}\big\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\big\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Здесь q определяется на основании нижеследующей теоремы 4.

7. Ограниченность последовательности итераций. Начнем с доказательства ограниченности последовательности итераций $X_k^{(j)}$ нелинейного уравнения (11).

Теорема 4. *Пусть $\sigma > 3/2$ и существует $q \in (0,1)$, не зависящее от m, p, ε, такое, что*

$$\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\frac{1}{1-q}c_{1,\sigma}^2\big\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\big\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+ \\ +\frac{1}{\varepsilon}c_{4,\sigma}^2\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)\leqslant q, \quad q\in(0,1).$$

Тогда для любого $j \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\|X^{(j)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}\leqslant\frac{1}{1-q}\big\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\big\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Доказательство. Рассмотрим формулу (24) в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$ и применим оценки выражений правой части нелинейного уравнения (11):

$$||X^{(j)}||^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}\leqslant \\ \leqslant||\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}||^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+\Big(\frac{1}{\varepsilon^3}c_{1,\sigma}^2||X^{(j-1)}||^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+ \\ +c_{4,\sigma}^2\frac{1}{\varepsilon^2}(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}})\Big)\|X^{(j-1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Положим $\mathcal{X}^2=\max_{1\leqslant j\leqslant N}\|X^{(j)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}$. Поскольку

$$\|X^{(j-1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}\leqslant\mathcal{X}^2,$$

выполняется оценка

$$\mathcal{X}^2\leqslant\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+\Big(\frac{1}{\varepsilon^3}c_{1,\sigma}^2\mathcal{X}^2+c_{3,\sigma}^2\frac{1}{\varepsilon^4}\big(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)\Big)\mathcal{X}^2.$$

Если

$$\frac{1}{\varepsilon^3}c_{1,\sigma}^2\mathcal{X}^2+c_{4,\sigma}^2\frac{1}{\varepsilon^2}\big(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)\leqslant q^2, \quad q\in(0,1), \tag{25}$$

то

$$\mathcal{X}^2\leqslant\frac{1}{1-q^2}||\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}||^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}. \tag{26}$$

Действительно, неравенство (26) верно, если

$$\frac{1}{\varepsilon^3}c_{1,\sigma}^2\frac{1}{1-q^2}\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+c_{4,\sigma}^2\frac{1}{\varepsilon^2}\big(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)\leqslant q^2,\ q\in(0,1).$$

Далее, необходимо применить математическую индукцию, поскольку в этом случае справедливо (25). При $j = 0$ имеем

$$\|X^{(0)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)} = \|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)}.$$

При $j = 1$:

$$\|X^{(1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)} \leqslant \frac{1}{1-q^2}\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)}.$$

Пусть выполнено для $j = s$:

$$\|X^{(s)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)} \leqslant \frac{1}{1-q^2}\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)}.$$

Покажем, что неравенство (26) выполняется и при $j = s + 1$. Имеем

$$\begin{aligned}\|X^{(s+1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)} &\leqslant \|X^{(0)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)} + \|X^{(s)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)}q^2 \leqslant \\ &\leqslant \|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)} + \frac{q^2}{1-q^2}\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)} = \\ &= \frac{1}{1-q^2}\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)}.\end{aligned}$$

Верно для $j = s + 1$. Таким образом, ограниченность нашей последовательности доказана. □

8. Фундаментальность последовательности итераций.

Теорема 5. *Последовательность $X^{(j)}$ является фундаментальной в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)$, если*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\frac{2}{1-q}c^2_{1,\sigma}\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(m)}_\sigma)} + \\ &\qquad + \frac{1}{\varepsilon}c^2_{4,\sigma}\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}^{(m)}_\sigma} + |||w^0|||_{\mathcal{H}^{(m)}_\sigma}\big) \leqslant q_1, \quad q_1 \in (0,1).\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим итерационную последовательность

$$\begin{aligned}X^{(j)}_k &= e^{-4w_e t/\varepsilon}\mathcal{F}^{(m)}_k(t) + \varepsilon w_e^{1/2}\mathcal{G}^{(m)}_k(t) + \\ &+\varepsilon w_e^{1/2}\Big\{B^{(m)}_k\big(T^{-1}_k(X^{(j-1)}_k), T^{-1}_k(X^{(j-1)}_k)\big) + 4L^B_k\big(T^{-1}_k(X^{(j-1)}_k)\big) + \\ &\qquad +2L^{(m)}_k\big(T^{-1}_k(X^{(j-1)}_k)\big)\Big\}, \quad j \geqslant 1, \\ X^{(0)}_k &= e^{-4w_e t/\varepsilon}\mathcal{F}^{(m)}_k(t) + \varepsilon w_e^{1/2}\mathcal{G}^{(m)}_k(t).\end{aligned}$$

Наряду с (24), определим последовательность с другим индексом:

$$\begin{aligned}X^{(s)}_k &= e^{-4w_e t/\varepsilon}\mathcal{F}^{(m)}_k(t) + \varepsilon w_e^{1/2}\mathcal{G}^{(m)}_k(t) + \\ &+\varepsilon w_e^{1/2}\Big\{B^{(m)}_k\big(T^{-1}_k(X^{(s-1)}_k), T^{-1}_k(X^{(s-1)}_k)\big) + 4L^B_k\big(T^{-1}_k(X^{(s-1)}_k)\big) +\end{aligned}$$

$$+2L_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(X_k^{(s-1)})\big)\Big\}, \quad s \geqslant 1,$$
$$X_k^{(0)} = e^{-4w_e t/\varepsilon}\mathcal{F}_k^{(m)}(t) + \varepsilon w_e^{1/2}\mathcal{G}_k^{(m)}(t).$$

Рассмотрим их разность:

$$X_k^{(j)} - X_k^{(s)} = \varepsilon w_e^{1/2}\Big\{B_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)} - X_k^{(s-1)}), T_k^{-1}(X_k^{(j-1)})\big) +$$
$$+ B_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(X_k^{(s-1)}), T_k^{-1}(X_k^{(j-1)} - X_k^{(s-1)})\big) + 4L_k^B\big(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)} - X_k^{(s-1)})\big) +$$
$$+ 2L_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)} - X_k^{(s-1)})\big)\Big\}.$$

Отсюда для $1 \leqslant s < j$ имеем

$$\|X^{(j)} - X^{(s)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant$$
$$\leqslant \|X^{(j-1)} - X^{(s-1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}\Big(\frac{1}{\varepsilon^3}c_{1,\sigma}^2\|X^{(j-1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon^3}c_{1,\sigma}^2\|X^{(s-1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} + \frac{1}{\varepsilon^2}c_{4,\sigma}^2\big(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)\Big).$$

Если

$$\frac{1}{\varepsilon^3}\frac{2}{1-q^2}c_{1,\sigma}^2\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} + \frac{1}{\varepsilon^2}c_{4,\sigma}^2\big(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big) \leqslant q_1^2,$$

то

$$\|X^{(j)} - X^{(s)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant q_1^2\|X^{(j-1)} - X^{(s-1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant$$
$$\leqslant q_1^{2s}\|X^{(j-s)} - X^{(0)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant q_1^{2s}(1 + \frac{1}{1-q^2})\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Таким образом, мы показали, что последовательность итераций $X^{(j)}$ является последовательностью Коши. □

9. Теорема существования решения.

Теорема 6. *Пусть $\sigma > 3/2$. Тогда для нелинейного уравнения (11) существует единственное решение $Z^{(m)} \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$, если*

$$\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\frac{2}{1-q}c_{1,\sigma}^2\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon}c_{4,\sigma}^2\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big) \leqslant q_2, \quad q_2 \in (0,1),$$

для которого выполняется неравенство

$$\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant \frac{1}{1-q}\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Здесь q следует из теоремы ограниченности последовательности итераций (теорема 4).

Доказательство. Необходимо показать, что

$$Z^{(m)} = \lim_{j\to\infty} X^{(j)}$$

в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$, $Z^{(m)} = (z_k^{(m)}, |k| \leqslant m, k \neq 0)$ есть решение нелинейного уравнения (11) в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$.

Существование предела следует в силу фундаментальности последовательности итераций (24). Обозначим через $M(z_k^{(m)})$ оператор, определенный по формуле

$$M(z_k^{(m)}) = z_k^{(m)} - \varepsilon w_e^{1/2}\Big\{4L_k^B\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big) + 2L_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big) + \\ + 4B_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big)\Big\} = z_k^{(m)} + M_1(z_k^{(m)}) = \widehat{\mathcal{F}_k^{(m)}}, \quad (27)$$

где

$$M_1(z_k^{(m)}) = -\varepsilon w_e^{1/2}\Big\{4L_k^B\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big) + 2L_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big) + \\ + 4B_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big)\Big\}.$$

В формуле (27) добавим и вычтем слагаемые $X_k^{(j)}$, $M_1(z_k^{(m)})$, а также воспользуемся определением, что

$$X_k^{(j)} + M_1(X_k^{(j-1)}) = \widehat{\mathcal{F}_k^{(m)}}.$$

Тогда

$$z_k^{(m)} + M_1(z_k^{(m)}) = X_k^{(j)} + M_1(X_k^{(j-1)}) + z_k^{(m)} - X_k^{(j)} + \\ + M_1(z_k^{(m)}) - M_1(X_k^{(j-1)}) = \widehat{\mathcal{F}_k^{(m)}} + R(z_k^{(m)}).$$

В весовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$ получаем

$$z_k^{(m)} + M_1(z_k^{(m)}) = \widehat{\mathcal{F}_k^{(m)}} + R(z_k^{(m)}).$$

Здесь

$$R(z_k^{(m)}) = z_k^{(m)} - X_k^{(j)} + M_1(z_k^{(m)}) - M_1(X_k^{(j-1)}),$$

$$M_1(z_k^{(m)}) - M_1(X_k^{(j-1)}) = -\varepsilon w_e^{1/2}\Big\{B_k^{(m)}\big(T_k^{-1}\big(z_k^{(m)} - X_k^{(j-1)}\big), T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big) + \\ + B_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(X_k^{(j-1)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)} - X_k^{(j-1)})\big) + 4L_k^B\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)} - X_k^{(j-1)})\big) + \\ + 2L_k^{(m)}\big(T_k^{-1}\big(z_k^{(m)} - X_k^{(j-1)}\big)\big)\Big\}.$$

Покажем, что $\|R(Z^{(m)})\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \to 0$. Имеем

$$\|R(Z^{(m)})\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant \|Z^{(m)} - X^{(j)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} + \\ + \|M_1(Z^{(m)}) - M_1(X^{(j-1)})\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Здесь

$$\|Z^{(m)} - X^{(j)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \to 0$$

в силу фундаментальности последовательности итераций. Далее оценим

$$\|M_1(Z^{(m)}) - M_1(X^{(j-1)})\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant \|Z^{(m)} - X^{(j-1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \times \\ \times \Big(\frac{1}{\varepsilon^3} c_{1,\sigma}^2 \|Z^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} + \frac{1}{\varepsilon^3} c_{1,\sigma}^2 \|X^{(j-1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} + \\ + \frac{1}{\varepsilon^2} c_{4,\sigma}^2 \big(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)\Big).$$

Исходя из теоремы 5 имеем

$$E = \frac{1}{\varepsilon^3} \frac{2}{1-q^2} c_{1,\sigma}^2 \|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} + \\ + \frac{1}{\varepsilon^2} c_{4,\sigma}^2 \big(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big) \leqslant q_2^2, \quad q_2 \in (0,1),$$

поэтому можно записать

$$\|M_1(Z^{(m)}) - M_1(X^{(j-1)})\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant q_2^2 \|Z^{(m)} - X^{(j-1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Поскольку

$$\|Z^{(m)} - X^{(j-1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \to 0,$$

имеем

$$\|M_1(Z^{(m)}) - M_1(X^{(j-1)})\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \to 0.$$

Получаем, что $R(z_k^{(m)}) \to 0$ в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$. Итак, в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$ имеем

$$z_k^{(m)} + M_1(z_k^{(m)}) = \widehat{\mathcal{F}_k^{(m)}}. \qquad \square$$

Можно показать, что оценка для $\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}$ имеет вид

$$\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant c_3^2 \frac{1}{\varepsilon} \big(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big) + \\ + c_{13,\sigma}^2 \frac{1}{\varepsilon} \big(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)^2. \quad (28)$$

С учетом (28) переформулируем теорему существования решения уравнения (24).

Теорема 7. *Пусть $\sigma > 3/2$. Тогда для нелинейного уравнения (11) существует единственное решение $Z^{(m)} \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})$, если*

$$\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big) \leqslant \varepsilon^2 q_4, \quad q_4 \in (0,1), \tag{29}$$

для которого выполняется неравенство

$$\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant \frac{Q_{1,\sigma}}{\varepsilon^{1/2}}\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big),$$

где

$$Q_{1,\sigma} = \frac{1}{1-q}\big(c_3^2 + c_{13,\sigma}^2 \varepsilon^{3/2} q_4\big).$$

10. Единственность решения. Пусть имеется другое решение $Z^* = \{z_k^*, |k| \leqslant m\}$ нелинейного уравнения (24). Тогда получим

$$\begin{aligned}\|Z^* - Z^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} &\leqslant \\ &\leqslant \|Z^* - Z^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}\Big(\frac{1}{\varepsilon^3} c_{1,\sigma}^2 \|Z^*\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^3} c_{1,\sigma}^2 \|Z^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} + \frac{1}{\varepsilon^2} c_{4,\sigma}^2 \big(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)\Big).\end{aligned}$$

Если

$$\|Z^*\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant \frac{1}{1-q^2}\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})},$$

$$\frac{2}{\varepsilon^3}\frac{1}{1-q^2} c_{1,\sigma}^2 \|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} + \frac{1}{\varepsilon^2} c_{4,\sigma}^2 \big(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big) \leqslant q_4^2 < 1,$$

то

$$\|Z^* - Z^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant q_4^2\ \|Z^* - Z^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Поскольку $0 < q_4^2 < 1$, отсюда следует единственность решения $Z^* = Z^{(m)}$.

11. Существование решения нелинейного уравнения с оператором возмущения. Теперь рассмотрим нелинейное уравнение с оператором возмущения в правой части:

$$\begin{aligned} z_k^{(m)} &= e^{-4w_e t/\varepsilon}\mathcal{F}_k^{(m)}(t) + \varepsilon w_e^{1/2}\mathcal{G}_k^{(m)}(t) + \\ &+ \varepsilon w_e^{1/2}\Big\{4L_k^B\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big) + 2L_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big) + 4B_k^{(m)}\big(T_k^{-1}(z_k^{(m)}), T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big) - \\ &- \varepsilon w_e^{1/2} T^{add}\big(T_k^{-1}(Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)})\big)\Big\}, \end{aligned} \tag{30}$$

Оценка оператора возмущения имеет вид

$$\varepsilon^2 w_e \|T_k^{add}(T_k^{-1}(z_k^{(m)}) + Q_k^{(m)} T_k^{-1}(e^{-ikt}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant c_{9,\sigma}^2\sqrt{\varepsilon}\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)^3+\\
&+c_{10,\sigma}^2\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)^2\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+\\
&+c_{11,\sigma}^2\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)\|Z^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+\\
&+c_{12,\sigma}^2\frac{1}{\varepsilon}\|Z^{(m)}\|^3_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.
\end{aligned}
$$

Перепишем теоремы 4, 5, 6 с учетом того, что в правой части нелинейного уравнения (30) присутствует оператор возмущения.

Теорема 8. *Пусть $\sigma>3/2$ и существует $q\in(0,1)$, не зависящее от m, p, ε, такое, что*

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}c_{2,\sigma}^2\frac{1}{1-q}\Big(\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+c_{9,\sigma}^2\sqrt{\varepsilon}\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)^3\Big)+\\
&\qquad+\frac{1}{\varepsilon^2}c_{4,\sigma}^2\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)^2\leqslant q,\quad q\in(0,1),
\end{aligned}
$$

$$
c_{2,\sigma}^2=c_{1,\sigma}^2+c_{12,\sigma}^2\sqrt{\varepsilon}\Big(\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+c_{9,\sigma}^2\sqrt{\varepsilon}\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)^3\Big).
$$

Тогда для любого $j\geqslant 1$ справедлива оценка

$$
\begin{aligned}
\|X^{(j)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}\leqslant\frac{1}{1-q}\Big(&\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+\\
&+c_{9,\sigma}^2\sqrt{\varepsilon}\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)^3\Big).
\end{aligned}
$$

Теорема 9. *Последовательность $X^{(j)}$ является фундаментальной в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$, если*

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\frac{2}{1-q}c_{2,\sigma}^2\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+\\
&\qquad+\frac{1}{\varepsilon^2}c_{4,\sigma}^2\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)^2\leqslant q_1,\quad q_1\in(0,1),
\end{aligned}
$$

$$
c_{2,\sigma}^2=c_{1,\sigma}^2+c_{12,\sigma}^2\sqrt{\varepsilon}\Big(\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+c_{9,\sigma}^2\sqrt{\varepsilon}\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)^3\Big).
$$

Теорема 10. *Пусть $\sigma>3/2$. Тогда для нелинейного уравнения (30) существует единственное решение $Z^{(m)}\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$, если*

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\frac{2}{1-q}c_{2,\sigma}^2\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+\\
&\qquad+\frac{1}{\varepsilon^2}c_{4,\sigma}^2\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}+|||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)\leqslant q_2,\quad q_2\in(0,1),
\end{aligned}
$$

для которого выполняется неравенство

$$\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant \frac{1}{1-q}\Big(\|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})}+ \\ + c_{9,\sigma}^2\sqrt{\varepsilon}\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big)^3\Big). \quad (31)$$

Применим оценку (28) к (31), чтобы переписать теорему существования решения через начальные данные с учетом того, что в правой части нелинейного уравнения (30) присутствует оператор возмущения.

Теорема 11. *Пусть $\sigma > 3/2$. Тогда для нелинейного уравнения (30) существует единственное решение $Z^{(m)} \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})$, если*

$$\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big) \leqslant \varepsilon^2 q_4, \quad q_4 \in (0,1), \quad (32)$$

для которого выполняется неравенство

$$\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leqslant \frac{Q_{1,\sigma}}{\varepsilon^{1/2}}\big(|||u^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + |||w^0|||_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}\big),$$

где

$$Q_{1,\sigma} = \frac{1}{1-q}\big(c_3^2 + c_{13,\sigma}^2\varepsilon^{3/2}q_4 + c_{9,\sigma}^2\varepsilon^5 q_4\big).$$

12. Аппроксимационное решение системы уравнений Карлемана. Теперь введем последовательность аппроксимационных решений:

$$\begin{aligned} \widehat{u}^{(m)}(x,t) &= u_0^{(m)}(t) + \sum_{j\in\mathbb{Z}_0,|j|\leqslant m} u_j^{(m)}(t)e^{ijx}, \\ \widehat{w}^{(m)}(x,t) &= w_0^{(m)}(t) + \sum_{j\in\mathbb{Z}_0,|j|\leqslant m} w_j^{(m)}(t)e^{ijx} \end{aligned} \quad (33)$$

и следующее гильбертово пространство $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;W^1_\infty(R))$ периодических по x функций

$$g(x,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j(t)e^{ijx}$$

с нормой

$$|||g(x,t)|||^2_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;W^1_\infty(R))} = \\ = \int_0^\infty e^{2\gamma t}\Big((\sup_{x\in\mathbb{R}}|\partial_t g(x,t)|)^2 + (\sup_{x\in\mathbb{R}}|\partial_x g(x,t)|)^2 + (\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x,t)|)^2\Big)dt.$$

Лемма 5. *Для $\sigma > 3/2$ справедливо следующее неравенство:*

$$|||g(x,t)|||^2_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;W^1_\infty(R))} \leqslant C_\sigma^2\|g(x,t)\|^2_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;H_\sigma)}. \quad (34)$$

Доказательство. Действительно, имеем

$$\big(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\partial_t g(x,t)|\big)^2 \leqslant 2\Big|\frac{d}{dt}g_0(t)\Big|^2+2\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\Big|\frac{d}{dt}g_j(t)\Big|\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\Big|\frac{d}{dt}g_0(t)\Big|^2+2\sup_{j\in\mathbb{Z}_0}|j|^{2\sigma}\Big|\frac{d}{dt}g_j(t)\Big|^2\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\frac{1}{|j|^\sigma}\Big)^2.$$

Положим

$$C_\sigma^2=2\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\frac{1}{|j|\sigma}\Big)^2.$$

Тогда

$$\int_0^\infty e^{2\gamma t}\big(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\partial_t g(x,t)|\big)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant C_\sigma^2\int_0^\infty e^{2\sigma t}\Big(\Big|\frac{d}{dt}g_0(t)\Big|^2+\sup_{j\in\mathbb{Z}_0}|j|^{2\sigma}\Big|\frac{d}{dt}g_j(t)\Big|^2\Big)dt.$$

Отсюда следует оценка (34). □

Ниже, в зависимости от удобства, мы будем работать в одном из гильбертовых пространств $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;W^1_\infty(R))$ или $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;H_\sigma)$.

Теорема 12. *Последовательность аппроксимационных решений фундаментальна по норме гильбертова пространства $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;H_\sigma)$. Более того, стремится к слабому решению $\{u_j,w_j\}$ задачи Коши (2):*

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\Big(u_j\Big(\frac{d}{dt}+ij\Big)+2w_e\frac{1}{\varepsilon}(w_j-u_j)-$$

$$-\varepsilon w_e^{1/2}\sum_{\substack{j_1+j_2=j,\\ j\in\mathbb{Z}_0}}(u_{j_1}-w_{j_1})(u_{j_2}+w_{j_2})\Big)\varphi(x,t)dxdt+$$

$$+\int_{-\infty}^\infty u_j^0\varphi(x,t)\Big|_{t=0}dx=0,$$

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\Big(w_j\Big(\frac{d}{dt}-ij\Big)-2w_e\frac{1}{\varepsilon}(w_j-u_j)+$$

$$+\varepsilon w_e^{1/2}\sum_{\substack{j_1+j_2=j,\\ j\in\mathbb{Z}_0}}(u_{j_1}-w_{j_1})(u_{j_2}+w_{j_2})\Big)\psi(x,t)dxdt+$$

$$+\int_{-\infty}^\infty w_j^0\psi(x,t)\Big|_{t=0}dx=0$$

для любых тестовых функций $\varphi,\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^1)$.

Теорема 13. *Если* $(\widehat{u}, \widehat{w}) \in W_2^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1)$, *то слабое решение становится классическим для почти всех* $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1$.

1) Итак, покажем что последовательность аппроксимационных решений (33) фундаментальна в $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; H_{\sigma_1})$ в норме

$$\|V(x,t)\|^2_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;H_{\sigma_1})} = \int_0^\infty e^{2\gamma t}|V_0|^2 dt + \\ + \sum_{j\in\mathbb{Z}_0} \int_0^\infty e^{2\gamma t}\Big(|j|^{2\sigma_1}|V_j(t)|^2 + |j|^{2(\sigma_1-1)}\Big|\frac{d}{dt}V_j(t)\Big|^2\Big)dt.$$

Заметим, что имеет место вложение пространства

$$\mathcal{H}^{(m)}_\sigma \subset \mathcal{H}_\sigma, \tag{35}$$

если элементы пространства $\mathcal{H}^{(m)}_\sigma$ продолжить нулями при $|j| > m$.

Теорема 14. *Пусть* $\sigma > 3/2$ *и выполнено* (32). *Тогда последовательность*

$$Z^{(m)} = \big(z_j^{(m)}, |j| \leqslant m, j \neq 0\big)$$

является фундаментальной в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$ *и имеет предел*

$$\lim_{m\to\infty} Z^{(m)} = Z.$$

Доказательство. Из уравнения (11) для $|j| \leqslant m_1$ имеем

$$\|Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \\ \leqslant \|e^{-4w_e t/\varepsilon}(\mathcal{F}^{(m_2)}(t) - \mathcal{F}^{(m_1)}(t))\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} + \varepsilon^2 w_e \|\mathcal{G}^{(m_2)}(t) - \mathcal{G}^{(m_1)}(t)\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} + \\ + \varepsilon^2 w_e\Big\{4\big\|L_j^B\big(T_j^{-1}(Z^{(m_2)}) - T_j^{-1}(Z^{(m_1)})\big)\big\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} + \\ + 4\big\|L_j^{(m_2)}\big(T_j^{-1}(Z^{(m_2)})\big) - L_j^{(m_1)}\big(T_j^{-1}(Z^{(m_1)})\big)\big\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} + \\ +16\big\|B_j^{(m_2)}\big(T_j^{-1}(Z^{(m_2)}), T_j^{-1}(Z^{(m_2)})\big) - B_j^{(m_1)}\big(T_j^{-1}(Z^{(m_1)}), T_j^{-1}(Z^{(m_1)})\big)\big\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} + \\ + \varepsilon^2 w_e \big\|T_j^{add}\big(T_j^{-1}(Z^{(m_2)}) - T_j^{-1}(Z^{(m_1)})\big)\big\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)}\Big\}. \tag{36}$$

Домножим (36) на $|j|^{2\sigma}$, а также возьмем супремум:

$$\sup_{j,|j|\leqslant m_1} |j|^{2\sigma}\big\|e^{-4w_e t/\varepsilon}(\mathcal{F}^{(m_2)}(t) - \mathcal{F}^{(m_1)}(t))\big\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \\ \leqslant c_1\varepsilon \sup_t \sup_{j,|j|\leqslant m_1} |j|^{2\sigma}\big|\mathcal{F}_j^{(m_2)}(t) - \mathcal{F}_j^{(m_1)}(t)\big|^2.$$

Для вычисления разности воспользуемся следующей леммой.

Лемма 6. *Пусть даны две суммы*

$$s_1(t) = \sum_{\substack{j_1+j_2=j,\, j\in\mathbb{Z}_0,\\ |j_1|\leqslant m_2,\, |j_2|\leqslant m_2}} A_{j_1,j_2}(t), \quad s_2(t) = \sum_{\substack{j_1+j_2=j,\, j\in\mathbb{Z}_0,\\ |j_1|\leqslant m_1,\, |j_2|\leqslant m_1}} A_{j_1,j_2}(t).$$

Тогда их разность при условии, что $m_2 > m_1$, вычисляется по формуле

$$s_1(t) - s_2(t) = \sum_{\substack{j_1+j_2=j,\, j\in\mathbb{Z}_0,\\ |j_1|\leqslant m_2,\, |j_2|\leqslant m_2,\\ \max(|j_1|,|j_2|)>m_1}} A_{j_1,j_2}(t).$$

Доказательство. При вычитании индексы, ограниченные m_1, изменяются следующим образом

1) $|j_1| \leqslant m_1$, $|j_2| > m_1$;
2) $|j_1| > m_1$, $|j_2| \leqslant m_1$;
3) $|j_1| > m_1$, $|j_2| > m_2$.

Отсюда получаем условие $\max(|j_1|,|j_2|) > m_1$. □

Тогда

$$\begin{aligned}
&\sup_t \sup_{j\in\mathbb{Z}_0, |j|\leqslant m_1} |j|^{2\sigma}\big|\mathcal{F}_j^{(m_2)}(t) - \mathcal{F}_j^{(m_1)}(t)\big|^2 \leqslant \\
&\quad\leqslant c_{6,\sigma}^2\big(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m_1)}} + |||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m_1)}}\big)^2 \sum_{\substack{j_2\in\mathbb{Z}_0,\\ |j_2|\leqslant m_2,\, |j_2|>m_1}} \frac{1}{|j_2|^{2\sigma}} + \\
&\quad + c_{7,\sigma}^2\big(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m_1)}} + |||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m_1)}}\big)^2 \sum_{\substack{j_1\in\mathbb{Z}_0,\\ |j_1|\leqslant m_2,\, |j_1|>m_1}} \frac{1}{|j_1|^{2\sigma}} \leqslant \\
&\qquad\leqslant c_{8,\sigma}^2\big(|||u^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m_1)}} + |||w^0|||^2_{\mathcal{H}_\sigma^{(m_1)}}\big)^2 \sum_{\substack{j_2\in\mathbb{Z}_0,\\ |j_2|\leqslant m_2,\, |j_2|>m_1}} \frac{1}{|j_2|^{2\sigma}}.
\end{aligned}$$

Лемма 7. *Имеет место следующая оценка*:

$$S = \sum_{\substack{j_2\in\mathbb{Z}_0,\\ |j_2|\leqslant m_2,\, |j_2|>m_1}} \frac{1}{|j_2|^{2\sigma}} \leqslant c_\sigma^{sum}\frac{1}{m_1^{2\sigma-1}}, \quad \sigma > 1.$$

Доказательство. Заметим, что

$$S = \sum_{\substack{j_2\in\mathbb{Z}_0,\\ |j_2|\leqslant m_2,\, |j_2|>m_1}} \frac{1}{|j_2|^{2\sigma}} \leqslant \sum_{\substack{j_2\in\mathbb{Z}_0,\\ |j_2|>m_1}} \frac{1}{|j_2|^{2\sigma}} \leqslant \int_{m_1}^{\infty}\frac{dx}{x^{2\sigma}} = \frac{1}{2\sigma-1}\frac{1}{m_1^{2\sigma-1}}.$$

Сумма S стремится к нулю при $m_1 \to \infty$, если $\sigma > 1$. □

Тогда

$$\|e^{-4w_e t/\varepsilon}(\mathcal{F}^{(m_2)}(t)-\mathcal{F}^{(m_1)}(t))\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,\mathcal{H}_\sigma^{(m_1)})} \leqslant \frac{c_{9,\sigma}}{m_1^{2\sigma-1}} q_6^4.$$

Аналогично оцениваются другие выражения (36). Таким образом, неравенство (36) примет следующий вид:

$$\|Z^{(m_2)}-Z^{(m_1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m_1)})} \leqslant \frac{c_{11,\sigma}}{m_1^{2\sigma-1}} q_6^4 + c_{12,\sigma}^2 q_6^2 \|Z^{(m_2)}-Z^{(m_1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m_1)})}.$$

Перенесем норму, стоящую справа, влево:

$$\|Z^{(m_2)}-Z^{(m_1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma^{(m_1)})}\left(1-c_{12,\sigma}^2 q_6^2\right) \leqslant \frac{c_{11,\sigma}}{m_1^{2\sigma-1}} q_6^4.$$

Потребуем выполнения неравенства

$$1-c_{12,\sigma}^2 q_6^2 > 0.$$

Для того чтобы перейти к пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$, доопределяем

$$Z^{(m_1)}=0,\ |j|>m_1$$

и пользуемся (35). Тогда получаем неравенство

$$\|Z^{(m_2)}-Z^{(m_1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} \leqslant \frac{c_{11,\sigma} q_6^4}{(1-c_{12,\sigma}^2 q_6^2) m_1^{2\sigma-1}},$$

которое дает фундаментальность $Z^{(m)}$. Получаем существование предела в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$:

$$\lim_{m\to\infty} Z^{(m)} = Z.$$

Отсюда вытекает, что $u^{(m)}\to u$, $w^{(m)}\to w$ при $m\to\infty$. $\square$

2) Аппроксимационное решение при $m\to\infty$ слабо стремится к решению задачи Коши (2):

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \Big(\partial_t \widehat{u}^{(m)} + \partial_x \widehat{u}^{(m)} - 2w_e \frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w}^{(m)} - \widehat{u}^{(m)}) + \\ + \varepsilon w_e^{1/2}\big((\widehat{u}^{(m)})^2 - (\widehat{w}^{(m)})^2\big)\Big)\varphi(x,t)\,dxdt =$$

$$= -\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \Big(\widehat{u}^{(m)}(\partial_t+\partial_x) + 2w_e\frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w}^{(m)}-\widehat{u}^{(m)}) - \\ - \varepsilon w_e^{1/2}\big((\widehat{u}^{(m)})^2-(\widehat{w}^{(m)})^2\big)\Big)\varphi(x,t)\,dxdt - \int_{-\infty}^\infty \widehat{u}^0\varphi(x,t)\Big|_{t=0}dx \to$$

$$-\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\Big(\widehat{u}(\partial_t+\partial_x)+2w_e\frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w}-\widehat{u})-\varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u}^2-\widehat{w}^2)\Big)\varphi(x,t)\,dxdt- \\ -\int_{-\infty}^\infty \widehat{u}^0\varphi(x,t)\Big|_{t=0}dx$$

для любой тестовой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1)$, где

$$\widehat{u} = \lim_{m\to\infty} \widehat{u}^{(m)}, \quad \widehat{w} = \lim_{m\to\infty} \widehat{w}^{(m)}$$

в $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$, $\sigma > 3/2$. Это непосредственно вытекает из теоремы 14. Далее покажем, что нелинейная часть также слабо сходится. Имеем

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big((\widehat{u}^{(m)})^2 - (\widehat{w}^{(m)})^2\big)\varphi(x,t)dxdt = \\ = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\widehat{u}^2 - \widehat{w}^2)\varphi(x,t)dxdt + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big((\widehat{u}^{(m)})^2 - \widehat{u}^2\big)\varphi(x,t)dxdt - \\ - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big((\widehat{w}^{(m)})^2 - \widehat{w}^2\big)\varphi(x,t)dxdt. \quad (37)\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}I_1 = \left|\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big((\widehat{u}^{(m)})^2 - \widehat{u}^2\big)\varphi(x,t)dxdt\right| \leqslant \\ \leqslant \sup_t \sup_x \big|\widehat{u}^{(m)} + \widehat{u}\big| \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big|(\widehat{u}^{(m)} - \widehat{u})\varphi(x,t)\big| dxdt\right).\end{aligned}$$

Ограниченность выражения $\sup_t \sup_x \big|\widehat{u}^{(m)} + \widehat{u}\big|$ вытекает из (12)–(15), (23), теорем 9 и 12. Положим $\varphi(x,t) \equiv \varphi(x,t)\chi(x,t)$, $\chi(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1)$, $\chi(x,t) \equiv 1$ на $\operatorname{supp}\varphi(x,t)$. Применим неравенство Гельдера:

$$I_1 \leqslant c_1 \Big(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\widehat{u}^{(m)} - \widehat{u})^2 |\chi(x,t)|^2 \, dxdt\Big)^{1/2} \Big(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\varphi(x,t)|^2 \, dxdt\Big)^{1/2}.$$

Выносим супремум по x выражения $(\widehat{u}^{(m)} - \widehat{u})^2$. Тогда

$$\begin{aligned}I_1 \leqslant c_1 \Big(\int_0^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}} (\widehat{u}^{(m)} - \widehat{u})^2 \int_{-\infty}^\infty |\chi(x,t)|^2 dxdt\Big)^{1/2} \times \\ \times \Big(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\varphi(x,t)|^2 dxdt\Big)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant c_1 \Big(\int_0^\infty e^{2\gamma t}\big(\sup_{x\in\mathbb{R}} (\widehat{u}^{(m)} - \widehat{u})^2\big)^2 dt\Big)^{1/4} \Big(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\chi(x,t)|^4 dxdt\Big)^{1/4} \times \\ \times \Big(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\varphi(x,t)|^2 dxdt\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Пользуясь оценкой (34) для перехода к другой норме, получаем

$$\begin{aligned}I_1 \leqslant c_{2,\sigma} \|(\widehat{u}^{(m)} - \widehat{u})^2\|^{1/2}_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; H_\sigma)} \Big(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\chi(x,t)|^4 dxdt\Big)^{1/4} \times \\ \times \Big(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\varphi(x,t)|^2 dxdt\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что
$$I_1 \to 0, \quad m \to \infty.$$
Так же при $m \to \infty$ получим
$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big(\partial_t \widehat{w}^{(m)} - \partial_x \widehat{w}^{(m)} + 2w_e \frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w}^{(m)} - \widehat{u}^{(m)}) - \\ - \varepsilon w_e^{1/2}\big((\widehat{u}^{(m)})^2 - (\widehat{w}^{(m)})^2\big)\Big)\psi(x,t)dxdt = \\ = -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big(\widehat{w}^{(m)}(\partial_t - \partial_x) - 2w_e \frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w}^{(m)} - \widehat{u}^{(m)}) + \\ + \varepsilon w_e^{1/2}\big((\widehat{u}^{(m)})^2 - (\widehat{w}^{(m)})^2\big)\Big)\psi(x,t)dxdt - \int_{-\infty}^\infty \widehat{w}^0 \psi(x,t)\Big|_{t=0} dx \to \\ -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big(\widehat{w}(\partial_t - \partial_x) - 2w_e \frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w} - \widehat{u}) + \varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u}^2 - \widehat{w}^2)\Big)\psi(x,t)dxdt - \\ - \int_{-\infty}^\infty \widehat{w}^0 \psi(x,t)\Big|_{t=0} dx$$
для любой тестовой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1)$.

3) На третьем шаге надо доказать, что
$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big(\partial_t \widehat{u}^{(m)} + \partial_x \widehat{u}^{(m)} - 2w_e \frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w}^{(m)} - \widehat{u}^{(m)}) + \\ + \varepsilon w_e^{1/2}\big((\widehat{u}^{(m)})^2 - (\widehat{w}^{(m)})^2\big)\Big)\varphi(x,t)dxdt \to 0, \quad m \to \infty,$$
$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big(\partial_t \widehat{w}^{(m)} - \partial_x \widehat{w}^{(m)} + 2w_e \frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w}^{(m)} - \widehat{u}^{(m)}) - \\ - \varepsilon w_e^{1/2}\big((\widehat{u}^{(m)})^2 - (\widehat{w}^{(m)})^2\big)\Big)\psi(x,t)dxdt \to 0, \quad m \to \infty. \tag{38}$$
Для этого подставим ряд Фурье в (38):
$$J_1 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big(\partial_t \widehat{w}^{(m)} - \partial_x \widehat{w}^{(m)} + 2w_e \frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w}^{(m)} - \widehat{u}^{(m)}) - \\ - \varepsilon w_e^{1/2}\big((\widehat{u}^{(m)})^2 - (\widehat{w}^{(m)})^2\big)\Big)\psi(x,t)dxdt = \\ = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big(\frac{d}{dt} w_0^{(m)} + 2w_e \frac{1}{\varepsilon}(w_0^{(m)} - u_0^{(m)}) - \\ - \varepsilon w_e^{1/2} \sum_{j_1+j_2=0} (u_{j_1}^{(m)} u_{j_2}^{(m)} - w_{j_1}^{(m)} w_{j_2}^{(m)})\Big)\ \psi(x,t)\ dxdt + \\ + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big(\sum_{j \in \mathbb{Z}_0} e^{ijx}\Big(\frac{d}{dt} w_j^{(m)} - ijw_j^{(m)} + 2w_e \frac{1}{\varepsilon}(w_j^{(m)} - u_j^{(m)})\Big) -$$

$$- \varepsilon w_e^{1/2} \sum_{\substack{j_1 + j_2 = j, \\ j \in \mathbb{Z}_0}} \big(u_{j_1}^{(m)} u_{j_2}^{(m)} - w_{j_1}^{(m)} w_{j_2}^{(m)}\big) e^{ijx}\Big) \psi(x,t) dx dt.$$

Воспользуемся тем, что для $j = 0$ имеем

$$\frac{d}{dt} w_0^{(m)} + 2w_e \frac{1}{\varepsilon} \big(w_0^{(m)} - u_0^{(m)}\big) - \varepsilon w_e^{1/2} \sum_{j_1 + j_2 = 0} \big(u_{j_1}^{(m)} u_{j_2}^{(m)} - w_{j_1}^{(m)} w_{j_2}^{(m)}\big) = 0,$$

а при $|j| \leqslant m$

$$\frac{d}{dt} w_j^{(m)} - ijw_j^{(m)} + 2w_e \frac{1}{\varepsilon} \big(w_j^{(m)} - u_j^{(m)}\big) - \\ - \varepsilon w_e^{1/2} \sum_{\substack{j_1 + j_2 = j, \\ j \in \mathbb{Z}_0}} \big(u_{j_1}^{(m)} u_{j_2}^{(m)} - w_{j_1}^{(m)} w_{j_2}^{(m)}\big) = 0, \quad |j| \leqslant m.$$

Покажем, что члены

$$J_2 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big(\sum_{|j|>m} e^{ijx} \Big(\frac{d}{dt} w_j^{(m)} - ijw_j^{(m)} + 2w_e \frac{1}{\varepsilon} (w_j^{(m)} - u_j^{(m)}) \Big) - \\ - \varepsilon w_e^{1/2} \big((\widehat{u}^{(m)})^2 - (\widehat{w}^{(m)})^2 \big) \Big) \psi(x,t) dx dt \to 0.$$

Здесь для $j \geqslant m+1$

$$J_3 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big((\widehat{u}^{(m)})^2 - (\widehat{w}^{(m)})^2 \big) \psi(x,t) dx dt = \\ = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \sum_{\substack{j_1 + j_2 = j, j \in \mathbb{Z}_0, \\ |j_1| > m, |j_2| > m}} \big(u_{j_1}^{(m)} u_{j_2}^{(m)} - w_{j_1}^{(m)} w_{j_2}^{(m)}\big) e^{ijx} \psi(x,t) dx dt.$$

Домножим и разделим последнее неравенство на $|j_1|^\sigma |j_2|^\sigma$. В итоге приходим к оценке

$$|J_3|^2 \leqslant \\ \leqslant \sum_{\substack{j_1 + j_2 = j, j \in \mathbb{Z}_0, \\ |j_1| > m, |j_2| > m}} \frac{1}{|j_1|^{2\sigma} |j_2|^{2\sigma}} \Big\{ \Big(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |j_1|^\sigma |u_{j_1}^{(m)}| \, |j_2|^\sigma |u_{j_2}^{(m)}| \, |\psi(x,t)| dx dt \Big)^2 + \\ + \Big(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |j_1|^\sigma |w_{j_1}^{(m)}| \, |j_2|^\sigma |w_{j_2}^{(m)}| \, |\psi(x,t)| dx dt \Big)^2 \Big\}.$$

Надо показать, что J_3 стремится к нулю при $m \to \infty$. Обозначим

$$|J_4|^2 = \Big(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |j_1|^\sigma |u_{j_1}^{(m)}| \, |j_2|^\sigma |u_{j_2}^{(m)}| \, |\psi(x,t)| dx dt \Big)^2.$$

Вынесем супремум по $j_2 \in \mathbb{Z}_0$, $|j_2| > m$, а затем применим неравенство Гельдера. В результате получим

$$|J_4|^2 \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \sup_{\substack{j_2 \in \mathbb{Z}_0,\\ |j_2|>m}} |j_2|^{2\sigma}|u_{j_2}^{(m)}|^2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\psi(x,t)|^2 dxdt \times$$
$$\times \int_0^\infty \sup_{\substack{j_1 \in \mathbb{Z}_0,\\ |j_1|>m}} |j_1|^{2\sigma}|u_{j_1}^{(m)}|^2 dt,$$

где

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{j_1 \in \mathbb{Z}_0,\\ |j_1|>m}} |j_1|^{2\sigma}|u_{j_1}^{(m)}|^2 dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\infty \sup_{j_1\in\mathbb{Z}_0} e^{2\gamma t}|j_1|^{2\sigma}|u_{j_1}^{(m)}|^2 dt = \|\widehat{u}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)}.$$

Аналогично получим следующую оценку:

$$|J_5|^2 = \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |j_1|^\sigma|w_{j_1}^{(m)}|\,|j_2|^\sigma|w_{j_2}^{(m)}|\,|\psi(x,t)|dxdt\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \sup_{\substack{|j_2|\leqslant m,\\ j_2\neq 0}} |j_2|^{2\sigma}|w_{j_2}^{(m)}|^2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\psi(x,t)|^2 dxdt\, \|\widehat{w}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)}.$$

Суммируя результаты оценок $|J_4|^2$, $|J_5|^2$, получаем оценку

$$|J_3|^2 \leqslant \Bigg(\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \sup_{\substack{j_2 \in \mathbb{Z}_0,\\ |j_2|>m}} |j_2|^{2\sigma}|u_{j_2}^{(m)}|^2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\psi(x,t)|^2 dxdt\, \|\widehat{u}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)}+$$
$$+ \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \sup_{\substack{j_2 \in \mathbb{Z}_0,\\ |j_2|>m}} |j_2|^{2\sigma}|w_{j_2}^{(m)}|^2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\psi(x,t)|^2 dxdt\, \|\widehat{w}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)}\Bigg)\times$$
$$\times \frac{1}{m^{2\sigma}} \sum_{\substack{j_1+j_2=j,\, j\in\mathbb{Z}_0,\\ |j_1|>m,\, |j_2|>m}} \frac{m^{2\sigma}}{|j_1|^{2\sigma}|j_2|^{2\sigma}}.$$

Лемма 8. *Следующая сумма сходится при $\sigma > 1/2$:*

$$\sum_{\substack{j_1+j_2=j,\, j\in\mathbb{Z}_0,\\ |j_1|>m,\, |j_2|>m}} \frac{m^{2\sigma}}{|j_1|^{2\sigma}|j_2|^{2\sigma}} < \infty.$$

Доказательство. Заметим, что имеет место равенство

$$|j_1|^{2\sigma} \times |j_2|^{2\sigma} = \big(\max(|j_1|,|j_2|)\big)^{2\sigma}\big(\min(|j_1|,|j_2|)\big)^{2\sigma},$$

а сумму можно переписать в следующем виде:

$$S = \sum_{\substack{j_1+j_2=j, j\in\mathbb{Z}_0,\\ |j_1|>m, |j_2|>m}} \frac{m^{2\sigma}}{|j_1|^{2\sigma}|j_2|^{2\sigma}} = \sum_{\substack{j_1+j_2=j, j\in\mathbb{Z}_0,\\ \min(|j_1|,|j_2|)>m}} \frac{m^{2\sigma}}{|j_1|^{2\sigma}|j_2|^{2\sigma}}.$$

В этом случае

$$S = \sum_{\substack{j_1+j_2=j, j\in\mathbb{Z}_0,\\ \min(|j_1|,|j_2|)>m}} \frac{m^{2\sigma}}{\big(\max(|j_1|,|j_2|)\big)^{2\sigma}\big(\min(|j_1|,|j_2|)\big)^{2\sigma}} <$$

$$< \sum_{j_1+j_2=j, j\in\mathbb{Z}_0} \frac{1}{\big(\max(|j_1|,|j_2|)\big)^{2\sigma}} \leqslant \sum_{j_1=1}^{\infty}\frac{1}{|j_1|^{2\sigma}} + \sum_{j_2=1}^{\infty}\frac{1}{|j_2|^{2\sigma}}.$$

Поскольку в суммы входят одинаковые слагаемые, сумму S можно оценить так:

$$S \leqslant 2\sum_{j_1=1}^{\infty}\frac{1}{|j_1|^{2\sigma}} < \infty,$$

если $\sigma > 1/2$. $\square$

Из ограниченности выражений

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\ \sup_{\substack{j_2\in\mathbb{Z}_0,\\ |j_2|>m}} |j_2|^{2\sigma}|u_{j_2}^{(m)}|^2, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\ \sup_{\substack{j_2\in\mathbb{Z}_0,\\ |j_2|>m}} |j_2|^{2\sigma}|w_{j_2}^{(m)}|^2$$

и норм $\|\widehat{u}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)}$, $\|\widehat{w}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)}$ следует, что

$$J_3 \to 0, \quad m\to\infty$$

равномерно по m. Откуда делается вывод, что предельные функции $(\widehat{u},\widehat{w})$ — слабое решение задачи Коши (2):

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\Big(\widehat{w}(\partial_t-\partial_x)\psi(x,t)-2w_e\frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w}-\widehat{u})\psi(x,t)+\varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u}^2-\widehat{w}^2)\psi(x,t)\Big)dxdt+$$
$$+\int_{-\infty}^\infty \widehat{w}^0\psi(x,t)\Big|_{t=0}dx = 0,$$

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\Big(\widehat{u}(\partial_t+\partial_x)\varphi(x,t)+2w_e\frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w}-\widehat{u})\varphi(x,t)-\varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u}^2-\widehat{w}^2)\varphi(x,t)\Big)dxdt+$$
$$+\int_{-\infty}^\infty \widehat{u}^0\varphi(x,t)\Big|_{t=0}dx = 0$$

для любых тестовых функций φ, $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^1)$.

Теорема 15. *Пусть выполнены условия теоремы 14. Тогда*

$$(\widehat{u},\widehat{w}) \in W_2^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1)$$

является классическим решением задачи Коши:

$$\partial_t \widehat{u} + \partial_x \widehat{u} - 2w_e \frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w} - \widehat{u}) = -\varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u} + \widehat{w})(\widehat{u} - \widehat{w}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$
$$\partial_t \widehat{w} - \partial_x \widehat{w} + 2w_e \frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w} - \widehat{u}) = \varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u} + \widehat{w})(\widehat{u} - \widehat{w}),$$
$$\widehat{u}|_{t=0} = \widehat{u}^0, \quad \widehat{w}|_{t=0} = \widehat{w}^0$$

для почти всех $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Запишем задачу Коши для аппроксимационного решения:

$$\partial_t \widehat{u}^{(m)} + \partial_x \widehat{u}^{(m)} - 2w_e \frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w}^{(m)} - \widehat{u}^{(m)}) = -\varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u}^{(m)} + \widehat{w}^{(m)})(\widehat{u}^{(m)} - \widehat{w}^{(m)}),$$
$$\partial_t \widehat{w}^{(m)} - \partial_x \widehat{w}^{(m)} + 2w_e \frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w}^{(m)} - \widehat{u}^{(m)}) = \varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u}^{(m)} + \widehat{w}^{(m)})(\widehat{u}^{(m)} - \widehat{w}^{(m)}),$$
$$\widehat{u}^{(m)}|_{t=0} = \widehat{u}^0, \quad \widehat{w}^{(m)}|_{t=0} = \widehat{w}^0.$$

Из теоремы 14 следует, что

$$\widehat{u} = \lim_{m\to\infty} \widehat{u}^{(m)}, \quad \widehat{w} = \lim_{m\to\infty} \widehat{w}^{(m)}$$

в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$, если $\sigma > 3/2$. Аналогично доказательству, примененному при рассмотрении (37):

$$(\widehat{u}^{(m)})^2 \to \widehat{u}^2, \quad (\widehat{w}^{(m)})^2 \to \widehat{w}^2, \quad m \to \infty.$$

Значит, имеет место сходимость в пространстве $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; W^1_\infty(R^1))$ согласно неравенству (34). Тогда $(\widehat{u},\widehat{w}) \in W_2^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1)$ — классическое решение для почти всех $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1$. □

Конкурирующие интересы. У меня нет конкурирующих интересов.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование не имело финансирования.

Благодарности. Я благодарен рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Годунов С. К., Султангазин У. М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // *УМН*, 1971. Т. 26, № 3(159). С. 3–51.
2. Broadwell T. E. Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method // *Journal of Fluid Mechanics*, 1971. vol. 19, no. 3. pp. 401–414. doi: 10.1017/S0022112064000817.

3. Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. *Kinetic Boltzmann, Vlasov and related equations*. Amsterdam: Elsevier, 2011. xiii+304 pp. doi: 10.1016/c2011-0-00134-5.
4. Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В. О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова–Султангазина / *Труды Седьмой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям* (Москва, 22–29 августа, 2014). Часть 3 / СМФН, Т. 60. М.: РУДН, 2016. С. 23–81.
5. Carleman T. *Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz* / Publications Scientifiques de l'Institut Mittag–Leffler. vol. 2. Uppsala: Almqvist & Wiksells, 1957. 112 pp.
6. Boltzmann L. *Lectures on Gas Theory*. Berkeley: University of California Press, 1964. 490 pp.
7. Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В. О локальном равновесии уравнения Карлемана // *Проблемы математического анализа*, 2015. Т. 78. С. 165–190.
8. Годунов С. К. Проблема обобщенного решения в теории квазилинейных уравнений и в газовой динамике // *УМН*, 1962. Т. 17, № 3(105). С. 147–158.
9. Ильин О. В. Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2007. Т. 47, № 12. С. 2076–2087.
10. Васильева О. А., Духновский С. А. Условие секулярности кинетической системы Карлемана // *Вестник МГСУ*, 2015. № 7. С. 33–40. doi: 10.22227/1997-0935.2015.7.33-40.
11. Buslaev V., Komech A., Kopylova E. A., Stuart D. On asymptotic stability of solitary waves in Schrödinger equation coupled to nonlinear oscillator // *Commun. Partial Differ. Equations*, 2008. vol. 33, no. 4. pp. 669–705. doi: 10.1080/03605300801970937.
12. Komech A., Kopylova E. A. On asymptotic stability of solitons in a nonlinear Schrödinger equation // *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2012. vol. 11, no. 3. pp. 1063–1079. doi: 10.3934/cpaa.2012.11.1063.
13. Komech A., Kopylova E. A. *Dispersion decay and scattering theory*. New Jersey: John Willey and Sons, 2012. 175+xxvi pp. doi: 10.1002/9781118382868
14. Kopylova E. A. On long-time decay for magnetic Schrödinger and Klein–Gordon equations / *Дифференциальные уравнения и динамические системы*: Сборник статей / Тр. МИАН, Т. 278. М.: МАИК, 2012. С. 129–137.
15. Буслаев В. С., Перельман Г. С. Рассеяние для нелинейного уравнения Шрёдингера: состояния, близкие к солитону // *Алгебра и анализ*, 1992. Т. 4, № 6. С. 63–102.
16. Buslaev V. S., Perelman G. S. On the stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations // *Amer. Math. Soc. Transl.*, 1995. vol. 164, no. 22. pp. 75–98.
17. Buslaev V. S., Sulem C. On asymptotic stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations // *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, 2003. vol. 20, no. 3. pp. 419–475, arXiv: math-ph/0702013. doi: 10.1016/S0294-1449(02)00018-5.
18. Вайнберг Б. Р. *Асимптотические методы в уравнениях математической физики*. М.: Издательство Московского университета, 1982. 294 с.
19. Вайнберг Б. Р. О коротковолновой асимптотике решений стационарных задач и асимптотике при $t \to \infty$ решений нестационарных задач // *УМН*, 1975. Т. 30, № 2(182). С. 3–55.
20. Вайнберг Б. Р. Поведение при больших временах решений уравнения Клейна–Гордона / Тр. ММО, Т. 30. М.: Издательство Московского университета, 1974. С. 139–158.
21. Morawetz C. S., Strauss W. A. Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation // *Commun. Pure Appl. Anal.*, 1972. vol. 25, no. 1. pp. 1–31. doi: 10.1002/cpa.3160250103.
22. Духновский С. А. Об оценках линеаризованного оператора кинетической системы Карлемана // *Вестник МГСУ*, 2016. № 9. С. 7–14. doi: 10.22227/1997-0935.2016.9.7-14.

MSC: 35L45, 35L60, 35Q20

On a speed of solutions stabilization of the Cauchy problem for the Carleman equation with periodic initial data

S. A. Dukhnovskii

National Research Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation.

Abstract

This article explores a one-dimensional system of equations for the discrete model of a gas (Carleman system of equations). The Carleman system is the Boltzmann kinetic equation of a model one-dimensional gas consisting of two particles. For this model, momentum and energy are not retained. On the example of the Carleman model, the essence of the Boltzmann equation can be clearly seen. It describes a mixture of "competing" processes: relaxation and free movement. We prove the existence of a global solution of the Cauchy problem for the perturbation of the equilibrium state with periodic initial data. For the first time we calculate the stabilization speed to the equilibrium state (exponential stabilization).

Keywords: kinetic equation, Carleman equation, Fourier solution, equilibrium state, secular terms, generalized solution.

Received: 21st January, 2017 / Revised: 25th February, 2017 /
Accepted: 13th March, 2017 / First online: 11th May, 2017

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any sponsorship.

Acknowledgments. I am grateful to the referee for a thorough reading of the article and valuable suggestions and comments.

References

1. Godunov S. K., Sultangazin U. M. On discrete models of the kinetic Boltzmann equation, *Russian Math. Surveys*, 1971, vol. 26, no. 3, pp. 1–56. doi: 10.1070/RM1971v026n03ABEH003822.
2. Broadwell T. E. Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method, *Journal of Fluid Mechanics*, 1971, vol. 19, no. 3, pp. 401–414. doi: 10.1017/S0022112064000817.

Research Article

Please cite this article in press as:
Dukhnovkii S. A. On a speed of solutions stabilization of the Cauchy problem for the Carleman equation with periodic initial data, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 7–41. doi: 10.14498/vsgtu1529 (In Russian).

Author's Details:
Sergey A. Dukhnovskii http://orcid.org/0000-0001-9643-7394
Postgraduate Student; Dept. of Applied Mathematics; e-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru

3. Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. *Kinetic Boltzmann, Vlasov and related equations.* Amsterdam, Elsevier, 2011, xiii+304 pp. doi: 10.1016/c2011-0-00134-5.
4. Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A., Radkevich E. V. On the nature of local equilibrium in the Carleman and Godunov–Sultangazin equations, In: *Proceedings of the Seventh International Conference on Differential and Functional-Differential Equations* (Moscow, August 22–29, 2014). Part 3, CMFD, 60. Moscow, PFUR, 2016, pp. 23–81 (In Russian).
5. Carleman T. *Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz*, Publications Scientifiques de l'Institut Mittag–Leffler, vol. 2. Uppsala, Almqvist & Wiksells, 1957, 112 pp.
6. Boltzmann L. *Lectures on Gas Theory.* Berkeley, University of California Press, 1964, 490 pp.
7. Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A. Local equilibrium of the Carleman equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 207, no. 2, pp. 296–323. doi: 10.1007/s10958-015-2373-x.
8. Godunov S. K. The problem of a generalized solution in the theory of quasi-linear equations and in gas dynamics, *Russian Math. Surveys*, 1962, vol. 17, no. 3, pp. 145–156. doi: 10.1070/RM1962v017n03ABEH004116.
9. Il'in O. V. Investigation of the existence of solutions and of the stability of the Carleman kinetic system, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 12, pp. 1990–2001. doi: 10.1134/S0965542507120093.
10. Vasil'eva O. A., Dukhnovskiy S. A. Secularity Condition of the Kinetic Carleman System, *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering], 2015, no. 7, pp. 33–40 (In Russian). doi: 10.22227/1997-0935.2015.7.33-40.
11. Buslaev V., Komech A., Kopylova E. A., Stuart D. On asymptotic stability of solitary waves in Schrödinger equation coupled to nonlinear oscillator, *Commun. Partial Differ. Equations*, 2008, vol. 33, no. 4, pp. 669–705. doi: 10.1080/03605300801970937.
12. Komech A., Kopylova E. A. On asymptotic stability of solitons in a nonlinear Schrödinger equation, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2012, vol. 11, no. 3, pp. 1063–1079. doi: 10.3934/cpaa.2012.11.1063.
13. Komech A., Kopylova E. A. *Dispersion decay and scattering theory.* New Jersey, John Willey and Sons, 2012, 175+xxvi pp. doi: 10.1002/9781118382868
14. Kopylova E. A. On long-time decay for magnetic Schrödinger and Klein–Gordon equations, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 278, pp. 121–129. doi: 10.1134/S0081543812060120.
15. Buslaev V. S., Perel'man G. S. Scattering for the nonlinear Schrödinger equation: States close to a soliton, *St. Petersburg Math. J.*, 1993, vol. 4, no. 6, pp. 1111–1142.
16. Buslaev V. S., Perelman G. S. On the stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 1995, vol. 164, no. 22, pp. 75–98.
17. Buslaev V. S., Sulem C. On asymptotic stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations, *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, 2003, vol. 20, no. 3, pp. 419–475, arXiv: math-ph/0702013. doi: 10.1016/S0294-1449(02)00018-5.
18. Vainberg B. R. *Asimptoticheskie metody v uravneniiakh matematicheskoi fiziki* [Asymptotic methods in equations of mathematical physics]. Moscow, Moscow Univ. Publ., 1982, 294 pp. (In Russian)
19. Vainberg B. R. On the short wave asymptotic behaviour of solutions of stationary problems and the asymptotic behaviour as $t \to \infty$ of solutions of non-stationary problems, *Russian Math. Surveys*, 1975, vol. 30, no. 2, pp. 1–58. doi: 10.1070/RM1975v030n02ABEH001406.
20. Vainberg B. R. Behavior of the solutions of the Klein–Gordon equation for large values of time, Tr. Mosk. Mat. Obs., 30. Moscow, Moscow Univ. Publ., 1974, pp. 139–158 (In Russian).
21. Morawetz C. S., Strauss W. A. Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 1972, vol. 25, no. 1, pp. 1–31. doi: 10.1002/cpa.3160250103.
22. Dukhnovskiy S. A. On Estimates of the Linearized Operator of the Kinetic Carleman System, *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering], 2016, no. 9, pp. 7–14 (In Russian). doi: 10.22227/1997-0935.2016.9.7-14.