Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 1. С. 42–54
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1532

УДК 517.93:519.216.2

Существование решений в $\mathbb{R}^n$ для стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями при наличии аппроксимаций с равномерно ограниченными первыми частными производными

А. В. Макарова, А. А. Демчук, С. С. Новикова

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»,
Россия, 394064, Воронеж, ул. Старых большевиков, 54а.

Аннотация

Естественный аналог обычной физической скорости детерминированной кривой — текущая скорость (симметрическая производная в среднем случайного процесса, введенная Э. Нельсоном). Если заданы текущая скорость и квадратичная производная в среднем, то при некоторых условиях можно построить процесс, имеющий заданную текущую скорость и квадратичную производную. С. В. Азариной и Ю. Е. Гликлихом получено утверждение о существовании решения для случая, когда заданы многозначная текущая скорость и однозначная квадратичная производная при некоторых очень строгих условиях. Поэтому важно дальнейшее исследование разрешимости подобного рода включений, в более общих случаях, для текущей скорости и квадратичной производной. В данной работе доказана теорема о существовании решений для дифференциальных включений, заданных в терминах текущих скоростей в $\mathbb{R}^n$. Правая часть включения является многозначной и удовлетворяет некоторым условиям.

Ключевые слова: дифференциальные включения, текущая скорость, производные в среднем.

Получение: 21 февраля 2017 г. / Исправление: 18 апреля 2017 г. / Принятие: 15 мая 2017 г. / Публикация онлайн: 18 мая 2017 г.

Краткое сообщение

Образец для цитирования

Макарова А. В., Демчук А. А., Новикова С. С. Существование решений в $\mathbb{R}^n$ для стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями при наличии аппроксимаций с равномерно ограниченными первыми частными производными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 42–54. doi: 10.14498/vsgtu1532.

Сведения об авторах

Алла Викторовна Макарова
кандидат физико-математических наук; преподаватель; каф. 206 математики;
e-mail: allagm@mail.ru

Анжелика Анатольевна Демчук
кандидат педагогических наук; доцент; каф. 206 математики; e-mail: angel2268@mail.ru

Введение. В середине двадцатого века для стохастической механики, варианта квантовой механики, Э. Нельсоном было введено понятие производных в среднем. В этой теории был первый пример уравнений с производными в среднем — уравнение движения. В работах Ю. Е. Гликлиха [1] было начато изучение уравнений с производными в среднем как отдельного класса стохастических дифференциальных уравнений. Поскольку уравнениями и включениями с производными в среднем задаются сложные физические процессы, возникла задача об описании включений с текущими скоростями (в терминах так называемых производных в среднем) и о разрешимости этих включений. Начиная с работ С. Азариной и Ю. Е. Гликлиха (см. например [2]), дифференциальные включения с производными в среднем рассматривались как отдельный класс включений. Дальнейшее развитие этой теории продолжено в работах [3–8], в которых рассматривались задачи о разрешимости включений на плоском n-мерном торе $\mathbb{T}^n$. Использование $\mathbb{T}^n$ объяснялось тем, что $\mathbb{T}^n$ является компактным многообразием и, следовательно, все гладкие объекты на нём ограничены, что существенно упрощает задачу.

В данной работе мы рассматриваем задачу о существовании решений для дифференциальных включений на $\mathbb{R}^n$ при наличии некоторых дополнительных условий. В статье используется евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

1. Предварительные сведения. Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ в $\mathbb{R}^n$ при $t \in [0;T]$, определённый на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Обозначим через $\mathcal{P}_t^\xi$ σ-подалгебру $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ всеми отображениями $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ при $0 \leqslant s \leqslant t$; $\mathcal{P}_t^\xi$ называется «прошлым» для $\xi(t)$.

Обозначим через $\mathcal{N}_t^\xi$ σ-подалгебру $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ отображением $\xi(t) : \Omega \to \mathcal{R}^n$; $\mathcal{N}_t^\xi$ называется «настоящим» для $\xi(t)$.

$\mathcal{P}_t^\xi$ и $\mathcal{N}_t^\xi$ при всех t предполагаются полными, т.е. содержащими все множества вероятности ноль. Очевидным образом $\mathcal{N}_t^\xi$ – σ-подалгебра в $\mathcal{P}_t^\xi$.

Пусть Ω — банахово пространство $C^0([0;T], \mathbb{R}^n)$ всех непрерывных кривых $x : [0;T] \to \mathbb{R}^n$ с обычной равномерной нормой. Через $\mathcal{F}$ обозначим σ-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами на Ω.

Обозначим через E_t^ξ условное математическое ожидание относительно $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$.

Следуя [9–13], введем следующие понятия:

(i) производная справа $D\xi(t)$ задается формулой

$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi \Big(\frac{\xi(t+\triangle t) - \xi(t)}{\triangle t} \Big),$$

Светлана Сергеевна Новикова
кандидат педагогических наук; старший научный сотрудник; 21 научно-исследовательский отдел 2-го научно-исследовательского управления научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией военно-воздушных сил);
e-mail: sv281174@rambler.ru

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ а $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к нулю и при этом $\triangle t > 0$.

(ii) производная слева $D_*\xi(t)$ задается формулой

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^{\xi}\Big(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t}\Big).$$

(iii) симметрическая и антисимметрическая производные задаются следующими формулами:

$$D_S = \frac{1}{2}(D + D_*), \quad D_A = \frac{1}{2}(D - D_*).$$

Пусть вектор $v^{\xi}(t)) = v^{\xi}(t, \xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$, а $u^{\xi}(t) = u^{\xi}(t, \xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$. Эти векторы существуют и называются регрессиями (подробнее в [13, 14]).

Согласно [11, 12], физический смысл полей v^{ξ} и u^{ξ} следующий: допустим, $\xi(t)$ описывает движение физического процесса. Текущая скорость v^{ξ} является аналогом обычной физической скорости, тогда как осмотическая скорость u^{ξ} показывает, насколько быстро меняется «случайность» процесса.

Зададим дифференцирование D_2 формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\xi}\Big(\frac{(\xi(t + \triangle t) - \xi(t))(\xi(t + \triangle t) - \xi(t))^*}{\triangle t}\Big),$$

где $(\xi(t+\triangle t) - \xi(t))$ — вектор-столбец (вектор в $\mathbb{R}^n$), а $(\xi(t+\triangle t) - \xi(t))^*$ — вектор-строка (транспонированный, или сопряженный вектор). Результат этого матричного произведения — матрица ранга 1, но после взятия условного математического ожидания и перехода к пределу $D_2\xi(t)$ становится симметрической неотрицательно определенной матричной функцией на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.

D_2 называется квадратичной производной в среднем. Она принимает значения во множестве симметрических неотрицательно определенных тензоров (матриц). С физической точки зрения важно исследовать уравнения и включения с текущими скоростями, так как текущая скорость является физически правильным аналогом обычной скорости неслучайных процессов. При этом важно знать информацию о квадратичной производной в среднем.

Система

$$\left\{ \begin{array}{l} D_S\xi(t) = v(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t)) \end{array} \right. \tag{1}$$

называется *уравнением с текущими скоростями первого порядка.*

Определение 1. Говорят, что (1) имеет решение на $[0; T]$ с начальным условием $\xi(0) = \xi_0$, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и заданный на нем процесс принимает значения в $\mathbb{R}^n$ (подробнее в [2]) такой, что при всех $t \in [0, T]$ уравнение (1) выполняется P-п.н. для $\xi(t)$.

Следует заметить, что в работе используется единственная известная в настоящее время теорема существования решений уравнения (1), доказанная С. В. Азариной и Ю. Е. Гликлихом [2, теорема 3], в предположениях, что правые части (1) гладки и ограничены вместе с первыми частными производными, а плотность распределения начального условия гладка и нигде не равна нулю.

2. Включения с текущими скоростями. Пусть $\mathbf{v}(t,m)$ — многозначное векторное поле, $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ — многозначное симметрическое положительно определенное $(2,0)$-тензорное поле на $\mathbb{R}^n$.

Система вида

$$\begin{cases} D_S\xi(t) \in \mathbf{v}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)) \end{cases} \tag{2}$$

называется *дифференциальным включением с текущими скоростями первого порядка.*

Понятие решения включения (2) в точности аналогично понятию решения для уравнения с текущими скоростями.

Напомним следующее определение (подробнее изложено в [15]).

Определение 2. Пусть X и Y — метрические пространства. Для заданного $\varepsilon > 0$ непрерывное однозначное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$ называется ε-аппроксимацией многозначного отображения $F : X \to Y$, если график отображения f, как множество в $X \times Y$, лежит в ε-окрестности графика отображения F.

В этой работе мы исследуем включения типа (2) в $\mathbb{R}^n$ при отсутствии гладких селекторов правых частей, но при существовании гладких ε-аппроксимаций с равномерно ограниченными первыми частными производными. В частности, из этого условия следует, что правые части имеют непрерывные селекторы.

Теорема. *Пусть многозначное векторное поле $\mathbf{v}(m)$ и многозначное $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}$ на $\mathbb{R}^n$ автономны, равномерно ограничены и имеют замкнутые образы. Пусть существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_k \to 0$ такая, что для любого ε_k поле $\mathbf{v}(m)$ (соответственно, $\boldsymbol{\alpha}(m)$) имеет гладкую ε_k-аппроксимацию $v_k(m)$ ($\alpha_k(m)$ соответственно) и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой первые частные производные $\frac{\partial v^i}{\partial m^j}$ ($\frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial m^l}$ соответственно). Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ с гладкой плотностью, нигде не равной нулю, включение (2) имеет решение, определенное на всем интервале $t \in [0,T]$.*

Доказательство. По условию данной теоремы для последовательности положительных чисел $\varepsilon_k \to 0$ существуют последовательности $v_k(m)$ ($\alpha_k(m)$, соответственно) ε_k-аппроксимаций (гладкие) с равномерно ограниченными одной и той же константой первыми частными производными $\frac{\partial v^i}{\partial m^j}$ ($\frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial m^l}$ соответственно), т. е. $v_k(m)$ ($\alpha_k(m)$ соответственно) равностепенно непрерывны. Тогда на любом компакте в $\mathbb{R}^n$ по Обобщенной теореме Арцела (теорема Асколи—Арцела, см. [16]) эти наборы аппроксимаций компактны относительно равномерной нормы, то есть можно выделить подпоследовательности v_k (α_k соответственно), сходящиеся к непрерывным селекторам $v(m)$ ($\alpha(m)$ соответственно) в $\mathbf{v}(m)$ ($\boldsymbol{\alpha}(m)$ соответственно). Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ расширяющуюся последовательность замкнутых шаров (компактов) $\mathbb{B}_j$ такую, что

$\bigcup \mathbb{B}_j = \mathbb{R}^n$. Выберем подпоследовательность v_k (α_k соответственно), сходящуюся равномерно в $\mathbb{B}_1$, из нее выберем подпоследовательность, сходящуюся равномерно в $\mathbb{B}_2$, и так далее. Таким образом, мы получаем непрерывные селекторы $v(m)$ ($\alpha(m)$ соответственно), которые на любом компакте являются пределом равномерно сходящейся последовательности аппроксимаций.

Факт, что это селектор, следует из определения ε_k-аппроксимации. Действительно, график ε_k-аппроксимации лежит в ε_k-окрестности графика многозначного отображения, и поскольку $\varepsilon_k \to 0$, график предельной функции лежит в графике многозначного отображения. Отсюда следует, что предельная функция — селектор (сечение) многозначного отображения.

Обозначим компоненты поля $\alpha_k(m)$ через α_k^{ij}. Из тензорных полей $\alpha_k(m)$ построим Римановы метрики $\alpha_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$.

Рассмотрим последовательность уравнений типа (1):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} D_S\xi(t) & = & v_k(\xi(t)), \\ D_2\xi(t) & = & \alpha_k(\xi(t)). \end{array} \right. \tag{3}$$

Для всех этих уравнений можно рассматривать одно и то же начальное условие ξ_0.

Аппроксимации v_k и α_k равномерно ограничены одной и той же константой, так как они являются ε_k-аппроксимациями равномерно ограниченных многозначных отображений. Также все эти ε_k-аппроксимации для любого k имеют равномерно ограниченные одной и той же константой первые частные производные $\frac{\partial v^i}{\partial m^j}$ $\left(\frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial m^l}\right.$ соответственно$\left.\right)$. Таким образом, уравнения (3) удовлетворяют [2, теорема 3], то есть для каждого уравнения существует решение. Пусть ξ_k — решение k-того уравнения.

На банаховом многообразии $C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$ непрерывных кривых в $\mathbb{R}^n$ введем σ-алгебру $\mathcal{C}$, порожденную цилиндрическими множествами, и обозначим через μ_k меру на $(C^0([0,T],\mathbb{R}^n),\mathcal{C})$, порожденную решением $\xi_k(t)$. Также введем семейство полных σ-подалгебр $\mathcal{P}_t$, порожденных цилиндрическими множествами с основаниями над $[0,t]$, $t \in [0,T]$, и семейство полных σ-подалгебр $\mathcal{N}_t$, порожденных прообразами борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ при отображении $x(\cdot) \mapsto x(t)$. Ясно, что $\mathcal{N}_t$ является σ-подалгеброй в $\mathcal{P}_t$ и что $\mathcal{P}_t$ есть «прошлое», а $\mathcal{N}_t$ — «настоящее» для координатного процесса на $(C^0([0,T],\mathbb{R}^n),\mathcal{C},\mu_k)$.

Зададим на $(C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$ поля

$$\alpha_k(t,m(\,\cdot\,)) = \alpha_k(m(t)), \quad v_k(t,m(\,\cdot\,)) = v_k(m(t)).$$

Из равномерной сходимости v_k и α_k на компактах в $\mathbb{R}^n$ следует равномерная сходимость $\alpha_k(t,m(\,\cdot\,))$ и $v_k(t,m(\,\cdot\,))$ на компактах в $C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Покажем, что множество мер $\{\mu_k\}$ на $(C^0([0,T],\mathbb{R}^n),\mathcal{C})$ слабо компактно.

Рассмотрим уравнения (3) на $\mathbb{R}^n$, чья правая часть гладка и равномерно ограничена для любого k одной и той же константой. Для k-того уравнения обозначим через μ_k меру на пространстве непрерывных траекторий $(C^0([0,T],\mathbb{R}^n),\mathcal{C})$, где $\mathcal{C}$ — σ-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами, соответствующую решению $\xi_k(t)$ k-того уравнения.

Лемма. *Множество мер μ_k на $(C^0([0,T],\mathbb{R}^n),\mathcal{C})$ слабо компактно.*

Доказательство. Прежде всего, напомним, что все решения имеют одно и то же начальное условие ξ_0. Так как правые части уравнений (3) равномерно ограничены, все математические ожидания $E(\xi_k(t))^2$ тоже равномерно ограничены.

В работе [17] на основе разложения Гаусса показано, что каждая матрица $\alpha \in S_+(n)$ ($S_+(n)$ — множество симметрических положительно определенных матриц размера $n \times n$) представима в виде $\alpha = \zeta\delta\zeta^*$, где ζ — верхне-треугольная матрица с единицами на диагонали, ζ^* — ее транспонированная, т. е. нижне-треугольная матрица с единицами на диагонали, и δ — диагональная матрица, чьи угловые миноры (отметим, что все они положительны) совпадают с угловыми минорами матрицы α. Обозначим диагональные элементы матрицы δ через $\delta_1, \dots, \delta_n$. Тогда $A = \zeta\sqrt{\delta}$, где $qrt\delta$ — диагональная матрица с $\sqrt{\delta_1}, \dots, \sqrt{\delta_n}$ на диагонали, такова, что $\alpha = AA^*$.

Так как мы имеем дело с гладким полем $\alpha_k(t,m)$, $t \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{R}^n$, вышеупомянутые аппроксимации соответствующих матриц $A_k(t,m)$ также гладкие. Так как $\alpha_k(t,m)$ равномерно ограничены той же константой для всех k, все $A_k(t,m)$ обладают тем же свойством. Выберем два действительных числа $0 \leqslant s < t \leqslant T$ с достаточно малой разностью $t-s$. Тогда для любого k приращение ξ_k на $[s,t]$ аппроксимируется выражением

$$v_k\Big(\frac{s+t}{2}\Big)(t-s) + A_k(s)\big(w(t)-w(s)\big).$$

Рассмотрим выражение

$$E\bigg(\Big(v_k\Big(\frac{s+t}{2}\Big)(t-s) + A_k(s)\big(w(t)-w(s)\big)\Big)\times \\ \times\Big(v_k\Big(\frac{s+t}{2}\Big)(t-s) + A_k(s)\big(w(t)-w(s)\big)\Big)^*\bigg).$$

Так как v_k и A_k равномерно ограничены для всех k единственной константой, легко видеть, что среди элементов в полученном выражении, только $\alpha_k(t-s)$ является бесконечно малой величиной того же порядка $t-s$, в то время как остальные элементы являются бесконечно малыми более высокого порядка. Следовательно, существует постоянная h_1 такая, что разность $t-s$ достаточно мала и вышеупомянутое выражение не больше, чем $h_1(t-s)$. Интегрируя, можно показать, что существует постоянная $h > 0$, зависимая от T и от константы, которая ограничивает нормы v_k и α_k, такая, что для любых $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ и каждого k выполнено неравенство

$$E\big(\xi_k(t_2) - \xi_k(t_1)\big)^4 < h(t_2-t_1)^2.$$

Таким образом, утверждение леммы следует из [9, теорема 2, § 1, гл. VI]. ■

Исходя из доказанной выше леммы можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ. Без ограничения общности можно предположить, что последовательность μ_k слабо сходится к μ. Рассмотрим некоторый координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0,T],\mathbb{R}^n), \mathcal{C}, \mu)$, то есть для каждого элементарного события $x(\cdot) \in C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$ по определению $\xi(t,x(\cdot)) = m(t)$. Напомним, $\mathcal{P}_t$ — «прошлое» $\xi(t)$, а $\mathcal{N}_t$ — «настоящее» для этого же координатного процесса.

По построению $\xi_k(t)$ его квадратичная производная равна $\alpha_k(\xi_k(t))$. Это означает, что для любой ограниченной непрерывной вещественной функции

f на $C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при всех k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}\Big[\frac{\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)^*}{\Delta t}- \\ -\alpha_k\big(m(t)\big)\Big]f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu_k=0.$$

Напомним (см. выше), что $\alpha_k(t,mt,m(\,\cdot\,))$ сходятся равномерно к $\alpha(t,m(\,\cdot\,))$ при $k\to\infty$ на компактах в $C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$.

По теореме Прохорова (см. [18]) для любого δ существует компакт $\tilde{K}_\delta\subset C^0([0,T],\mathcal{R}^n)$ такой, что $(\mu_k)(\tilde{K}_\delta)>1-\delta$ для всех μ_k. Так как $\tilde{K}_\delta$ — компакт, на нем имеется указанная равномерная сходимость.

Из ограниченности $f(m(\,\cdot\,))$ выводим, что при достаточно больших k

$$\|\int_{\tilde{K}_\delta}[\alpha_k(m(t))-\alpha(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k\|<\delta.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ ограничено, имеется некоторое число $\Xi>0$ такое, что $|f(m(\,\cdot\,))|<\Xi$ для всех $m(\,\cdot\,)$. Так как все $\alpha_k(m)$ и $\alpha(m)$ равномерно ограничены, их нормы не превосходят некоторого числа $Q>0$. И поскольку

$$\mu_k(C^0([0,T],\mathcal{R}^n)\backslash\tilde{K}_\delta)<\delta$$

для всех достаточно больших k, справедлива оценка

$$\Big\|\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)\backslash\tilde{K}_\delta}\big[\alpha_k\big(m(t)\big)-\alpha\big(m(t)\big)\big]f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu_k\Big\|<2\delta Q\Xi$$

при всех достаточно больших k. Так как δ — произвольное положительное число, существует

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}\big[\alpha_k\big(m(t)\big)-\alpha\big(m(t)\big)\big]f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu_k=0.$$

Функция $\alpha(m(t))$ — μ-п.н. непрерывна и ограничена на $C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$ (как показано выше). Ну и так как меры μ_k слабо сходятся к μ, согласно [9, теорема 2, § 1, гл. VI] существует

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}\alpha\big(m(t)\big)f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu_k=\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}\alpha\big(m(t)\big)f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu.$$

Очевидно,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}\big[\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)^*\big]f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu_k= \\ =\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}\big[\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)^*\big]f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}\Big[\frac{\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)^*}{\Delta t}-$$
$$-\alpha\big(m(t)\big)\Big]f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu=0.$$

Отметим, что $f(m(\,\cdot\,))$ — произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$. Это означает, что $D_2\xi(t)=\alpha(\xi(t))$. Но по построению $\alpha(\xi(t))\in\boldsymbol{\alpha}(\xi(t))$ μ-п.н.

Далее нас будет интересовать текущая скорость решения.

По построению $D_S\xi_k(t)=v_k(t,\xi_k(t))$ для всех k. Это означает, что для любой вещественной ограниченной непрерывной функции f на $C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при любом k

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}\Big[\frac{m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)}{\Delta t}-v_k\big(m(t)\big)\Big]f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu_k=0.$$

Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Так как μ_k слабо сходится к μ, существует $K(\varepsilon)$ такое, что при $k>K(\varepsilon)$

$$\Big\|\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}\big[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)\big]f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu_k-$$
$$-\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}\big[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)\big]f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu\Big\|<\varepsilon$$

и

$$\Big\|\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}f\big(m(\,\cdot\,)\big)v(m(t))d\mu_k-\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}f\big(m(\,\cdot\,)\big)v(m(t))d\mu\Big\|<\varepsilon.$$

Такими же рассуждениями, как и выше, докажем, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}\big[v_k\big(m(t)\big)-v\big(m(t)\big)\big]f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu_k=0,$$

т.е., что и v непрерывна. Напомним, что v ограничена как селектор ограниченного многозначного отображения.

Тогда на основании [9, теорема 2, § 1, гл. VI] получаем

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}v\big(m(t)\big)f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu_k=\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}v\big(m(t)\big)f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu.$$

Очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}\big[\big(m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)\big)\big]f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu_k=$$
$$=\int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)}\big[\big(m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)\big)\big]f\big(m(\,\cdot\,)\big)d\mu.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{C^0([0,T],\mathbb{R}^n)} \Big[\frac{(m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{\Delta t} - v\big(m(t)\big) \Big] f\big(m(\,\cdot\,)\big) d\mu = 0.$$

Напомним, что $f(m(\cdot))$ — произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$. Это означает, что $D_S\xi(t) = v(\xi(t))$. Но по построению $v(\xi(t)) \in \mathbf{v}(\xi(t))$ μ-п.н. $\square$

Конкурирующие интересы. Мы не имеем конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15–01–00620_а).

Библиографический список

1. Гликлих Ю. Е. Стохастические уравнения в производных в среднем и их приложения. I // *Изв. Росс. Акад. Естеств. наук. Сер. Мат., Мат. модел., Информ., Управл.*, 1997. Т. 1, № 4. С. 26–52.
2. Azarina S. V., Gliklikh Yu. E. On existence of solutions to stochastic differential equations with current velocities // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2015. Т. 8, № 4. С. 100–106. doi: 10.14529/mmp150408.
3. Gliklikh Yu. E., Makarova A. V. On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities // *Applicable Analysis*, 2012. vol. 91, no. 9. pp. 1731–1739. doi: 10.1080/00036811.2011.579565.
4. Гликлих Ю. Е., Макарова А. В. Теорема существования решений для стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями // *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика*, 2012. Т. 28, № 17(136). С. 5–15.
5. Makarova A. V. On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities. II // *Global and Stochastic Analysis*, 2012. vol. 2, no. 1. pp. 101–112.
6. Gliklikh Yu. E., Makarova A. V. On stochastic differential inclusions with current velocities // *J. Comp. Eng. Math.*, 2015. vol. 2, no. 3. pp. 25–33. doi: 10.14529/jcem150303.
7. Макарова А. В. О разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями с полунепрерывной снизу правой частью // *Вестник Липецкого государственного педагогического университета. Серия МИФЕ: математика, информационные технологии, физика, естествознание*, 2015. № 1(16). С. 22–29.
8. Gliklikh Yu. E., Makarova A. V. On existence of solutions to stochastic differential inclusions with current velocities. II // *J. Comp. Eng. Math.*, 2016. vol. 3, no. 1. pp. 48–60. doi: 10.14529/jcem160106.
9. Гихман И. И., Скороход А. В. *Теория случайных процессов.* Т. 1. М.: Физматлит, 1971. 664 с.
10. Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics // *Phys. Rev.*, 1966. vol. 150, no. 4. pp. 1079–1085. doi: 10.1103/PhysRev.150.1079.
11. Nelson E. *Dynamical theory of Brownian motion.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1967. 142 pp.
12. Nelson E. *Quantum fluctuations* / Princeton Series in Physics. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1985. viii+146 pp.

13. Gliklikh Yu. E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics* / Theoretical and Mathematical Physics. London: Springer, 2011. xxiii+436 pp. doi: 10.1007/978-0-85729-163-9.
14. Партасарати К. *Введение в теорию вероятностей и теорию меры.* М.: Мир, 1988. 344 с.
15. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений.* М.: Комкнига, 2005. 215 с.
16. Yosida K. *Functional Analysis*: Reprint of the 1980 Edition (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 123) / Classics in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1995. xvi+504 pp. doi: 10.1007/978-3-642-61859-8
17. Azarina S. V., Gliklikh Yu. E. Differential inclusions with mean derivatives // *Dynamic Systems and Applications*, 2007. vol. 16. pp. 49–71.
18. Billingsley P. *Convergence of probability measures* / Wiley Series in Probability and Statistics. Chichester: Wiley, 1999. x+277 pp.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 42–54
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1532

MSC: 58J65, 60H30, 60H10

On existence of solution in $\mathbb{R}^n$ of stochastic differential inclusions with current velocities in the presence of approximations with uniformly bounded first partial derivatives

A. V. Makarova, A. A. Demchuk, S. S. Novikova

Russian Air Force Military Educational and Scientific Center
of the “N. E. Zhukovskiy and Yu. A. Gagarin Air Force Academy”,
54a, Starykh Bolshevikov st., Voronezh, 394064, Russian Federation.

Abstract

Notion of mean derivatives was introduced by Edward Nelson for the needs of stochastic mechanics (a version of quantum mechanics). Nelson introduced forward and backward mean derivatives while only their half-sum, symmetric mean derivative called current velocity, is a direct analog of ordinary velocity for deterministic processes. Another mean derivative called quadratic, was introduced by Yuri E. Gliklikh and Svetlana V. Azarina. It gives information on the diffusion coefficient of the process and using Nelson's and quadratic mean derivatives together, one can in principle recover the process from its mean derivatives. Since the current velocities are natural analogs of ordinary velocities of deterministic processes, investigation of equations and especially inclusions with current velocities is very much important for applications since there are a lot of models of various physical, economical etc. processes based on such equations and inclusions. Existence of solution theorems are obtained for stochastic differential inclusions given in terms of the so-called current velocities (symmetric mean derivatives, a direct analogs of ordinary velocity of deterministic systems) and quadratic mean derivatives (giving information on the diffusion coefficient) on $\mathbb{R}^n$. Right-hand sides in both the current velocity part and the quadratic part are set-valued but satisfy some natural conditions.

Keywords: mean derivatives, current velocities, differential inclusions.

Received: 21st February, 2017 / Revised: 18th April, 2017 /
Accepted: 15th May, 2017 / First online: 18th May, 2017

Short Communication

Please cite this article in press as:
Makarova A. V., Demchuk A. A., Novikova S. S. On existence of solution in $\mathbb{R}^n$ of stochastic differential inclusions with current velocities in the presence of approximations with uniformly bounded first partial derivatives, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 42–54. doi: 10.14498/vsgtu1532 (In Russian).

Authors' Details:
Alla V. Makarova
Cand. Phys. & Math. Sci.; Lecturer; the 206 Department of Mathematics;
e-mail: allagm@mail.ru

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15–01–00620_a).

References

1. Gliklikh Yu. E. Stochastic equations in mean derivatives and their applications. I, *Izv. Ross. Akad. Estestv. Nauk, Mat. Mat. Model. Inform. Upr.*, 1997, vol. 1, no. 4, pp. 26–52 (In Russian).
2. Azarina S. V., Gliklikh Yu. E. On existence of solutions to stochastic differential equations with current velocities, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 100–106. doi: 10.14529/mmp150408.
3. Gliklikh Yu. E., Makarova A. V. On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities, *Applicable Analysis*, 2012, vol. 91, no. 9, pp. 1731–1739. doi: 10.1080/00036811.2011.579565.
4. Gliklikh Yu. E., Makarova A. V. On solution existence theorem for stochastic differential inclusions with current velocities, *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia: Matematika. Fizika*, 2012, vol. 28, no. 17(136), pp. 5–15 (In Russian).
5. Makarova A. V. On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities. II, *Global and Stochastic Analysis*, 2012, vol. 2, no. 1, pp. 101–112.
6. Gliklikh Yu. E., Makarova A. V. On stochastic differential inclusions with current velocities, *J. Comp. Eng. Math.*, 2015, vol. 2, no. 3, pp. 25–33. doi: 10.14529/jcem150303.
7. Makarova A. V. On the solvability of differential inclusions with current velocities with a lower semicontinuous right-hand side, *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Seriia MIFE: matematika, informatsionnye tekhnologii, fizika, estestvoznanie*, 2015, no. 1(16), pp. 22–29 (In Russian).
8. Gliklikh Yu. E., Makarova A. V. On existence of solutions to stochastic differential inclusions with current velocities. II, *J. Comp. Eng. Math.*, 2016, vol. 3, no. 1, pp. 48–60. doi: 10.14529/jcem160106.
9. Gihman I. I., Skorokhod A. V. *The Theory of Stochastic Processes I*, Classics in Mathematics, vol. 210. Berlin, Springer, 2004, viii+574 pp. doi: 10.1007/978-3-642-61943-4
10. Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics, *Phys. Rev.*, 1966, vol. 150, no. 4, pp. 1079–1085. doi: 10.1103/PhysRev.150.1079.
11. Nelson E. *Dynamical theory of Brownian motion.* Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1967, 142 pp.
12. Nelson E. *Quantum fluctuations*, Princeton Series in Physics. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1985, viii+146 pp.
13. Gliklikh Yu. E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*, Theoretical and Mathematical Physics. London, Springer, 2011, xxiii+436 pp. doi: 10.1007/978-0-85729-163-9.

Anzhelika A. Demchuk
Cand. Pedagogy Sci.; Associate Proffesor; the 206 Department of Mathematics;
e-mail: angel2268@mail.ru

Svetlana S. Novikova ✉
Cand. Pedagogy Sci.; Senior Researcher; the 21 Scientific and Research Department of Scientific and Research Center; e-mail: sv281174@rambler.ru

14. Partasarati K. *Vvedenie v teoriiu veroiatnostei i teoriiu mery* [An Introduction to Probability Theory and Measure Theory]. Moscow, Mir, 1988, 344 pp. (In Russian)
15. Borisovich Yu. G., Gel'man B. D., Myshkis A. D., Obukhovskii V. V. *Vvedenie v teoriiu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vkliuchenii* [Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions]. Moscow, Komkniga, 2005, 215 pp. (In Russian)
16. Yosida K. *Functional Analysis*, Reprint of the 1980 Edition (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 123), Classics in Mathematics. Berlin, Springer-Verlag, 1995, xvi+504 pp. doi: 10.1007/978-3-642-61859-8
17. Azarina S. V., Gliklikh Yu. E. Differential inclusions with mean derivatives, *Dynamic Systems and Applications*, 2007, vol. 16, pp. 49–71.
18. Billingsley P. *Convergence of probability measures*, Wiley Series in Probability and Statistics. Chichester, Wiley, 1999, x+277 pp.