Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 1. С. 55–79
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1528

УДК 517.927.4:519.624

Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Сообщение 2. Краевые задачи с граничными условиями второго и третьего рода

В. Н. Маклаков

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Представлено второе сообщение цикла из двух статей, в котором исследованы закономерности изменения порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования в зависимости от используемой степени в разложении в многочлен Тейлора решений краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами с граничными условиями второго и третьего рода.

Использование многочлена Тейлора второй степени при аппроксимации производных конечными разностями приводит ко второму порядку аппроксимации традиционного метода сеток во внутренних точках области интегрирования. В работе при исследовании краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка рассмотрен предложенный ранее метод численного интегрирования, использующий средства матричного исчисления, в котором аппроксимация производных конечными разностями не производилась. Согласно указанному методу при составлении системы разностных уравнений степень многочлена Тейлора может быть выбрана произвольно. Вычислена невязка и дана оценка порядка аппроксимации метода в зависимости от выбранной степени многочлена Тейлора.

Теоретически установлено следующее:

а) для краевых задач с граничными условиями второго и третьего рода порядок аппроксимации пропорционален используемой степени многочлена Тейлора и меньше этой степени, независимо от ее четности, на единицу;

Научная статья

Образец для цитирования

Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Сообщение 2. Краевые задачи с граничными условиями второго и третьего рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 55–79. doi: 10.14498/vsgtu1528.

Сведения об авторе

Владимир Николаевич Маклаков http://orcid.org/0000-0003-1644-7424
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики и прикладной информатики; e-mail: makvo63@yandex.ru

б) при четной степени порядок аппроксимации в граничных точках области интегрирования на единицу меньше порядка аппроксимации во внутренних точках;
в) при нечетной степени порядки аппроксимации в граничных точках и во внутренних точках области интегрирования совпадают и меньше этой степени на единицу.

Для четной степени дан метод повышения порядка аппроксимации на единицу в граничных точках области интегрирования до порядка аппроксимации во внутренних точках. Теоретические выводы подтверждены численным экспериментом для краевых задач с граничными условиями третьего рода.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, краевые задачи, граничные условия первого, второго и третьего рода, порядок аппроксимации, численные методы, многочлены Тейлора.

Получение: 21 января 2017 г. / Исправление: 3 марта 2017 г. / Принятие: 13 марта 2017 г. / Публикация онлайн:

Введение. При исследовании системы неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (ОДУ2) с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} u_1x'' + p_1x' + r_1x + v_1y'' + q_1y' + s_1y = f_1, \\ u_2x'' + p_2x' + r_2x + v_2y'' + q_2y' + s_2y = f_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t)$, $y(t)$ — неизвестные непрерывные функции; u_j, p_j, r_j, v_j, q_j, s_j, f_j — заданные функции аргумента t, дифференцируемые нужное число раз; $j = 1, 2$ — номер уравнения в системе (1). Будем, как и первом сообщении [1], придерживаться следующих принятых в [2] обозначений:

1) D — область интегрирования, ограниченная отрезком $[a, b]$, D_h — узлы сетки, определяемые значениями $t_i = t_0 + ih$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t_0 = a$, $t_n = b$, $h = (b - a)/n$, $n + 1$ — число узлов сетки;
2) $x(t)$, $y(t)$ — непрерывные функции, являющиеся точным решением системы (1) с теми или иными граничными условиями;
3) $[x]_h$, $[y]_h$ — сеточные функции, совпадающие с точным решением в узлах сетки D_h;
4) $x^{(h)}$, $y^{(h)}$ — искомые сеточные функции.

Для краткости примем для любой функции обозначение $\varphi(t_i) = \varphi_i$, где t_i — узел сетки D_h.

В дальнейшем опустим индекс h в наименованиях сеточных функций $[x]_h$, $[y]_h$, $x^{(h)}$, $y^{(h)}$.

В первом сообщении [1] представлены преобразования, приводящие дифференциальную краевую задачу для ОДУ2 с переменными коэффициентами (1) с граничными условиями первого рода

$$x_0 = \widetilde{x}_0, \quad y_0 = \widetilde{y}_0, \quad x_n = \widetilde{x}_n, \quad y_n = \widetilde{y}_n$$

к разностной краевой задаче, которая в компактной символической форме была записана, по аналогии с [2], как

$$L_{h,I}^{k} z = f_{h,I}^{k}, \tag{2}$$

где k — степень используемого многочлена Тейлора в разложениях в ряд Тейлора искомых функций $x(t), y(t)$;

$$L_{h,I}^{k} z \equiv L_{h,I}^{k} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} -\dfrac{b_{11}^{ki}}{b_{15}^{ki}} x_{i-1} - \dfrac{b_{12}^{ki}}{b_{15}^{ki}} y_{i-1} + \dfrac{x_i}{b_{15}^{ki}} - \dfrac{b_{13}^{ki}}{b_{15}^{ki}} x_{i+1} - \dfrac{b_{14}^{ki}}{b_{15}^{ki}} y_{i+1}, \\ -\dfrac{b_{21}^{ki}}{b_{26}^{ki}} x_{i-1} - \dfrac{b_{22}^{ki}}{b_{26}^{ki}} y_{i-1} + \dfrac{y_i}{b_{26}^{ki}} - \dfrac{b_{23}^{ki}}{b_{26}^{ki}} x_{i+1} - \dfrac{b_{24}^{ki}}{b_{26}^{ki}} y_{i+1}, \\ x_0, \\ y_0, \\ x_n, \\ y_n, \end{cases}$$

$$f_{h,I}^{k} = \begin{cases} f_{1i} + \dfrac{b_{16}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f_{2i} + \dfrac{b_{17}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f'_{1i} + \dfrac{b_{18}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f'_{2i} + \cdots + \dfrac{b_{1(2k+1)}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f_{1i}^{(k-2)} + \dfrac{b_{1(2k+2)}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f_{2i}^{(k-2)}, \\ \dfrac{b_{25}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f_{1i} + f_{2i} + \dfrac{b_{27}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f'_{1i} + \dfrac{b_{28}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f'_{2i} + \cdots + \dfrac{b_{2(2k+1)}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f_{1i}^{(k-2)} + \dfrac{b_{2(2k+2)}^{ki}}{b_{26}^{ki}} f_{2i}^{(k-2)}, \\ \widetilde{x}_0, \\ \widetilde{y}_0, \\ \widetilde{x}_n, \\ \widetilde{y}_n, \end{cases}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$, где i — номер узла сетки D_h; x_i, y_i — искомые сеточные функции; b_{1j}^{ki}, b_{2j}^{ki}, $j = 1, 2, \ldots, 2k+2$ — элементы обратных матриц от локальных матриц A^{ki}. Второй нижний индекс в записи задачи (2) указывает на использование граничных условий первого рода. Выше и далее верхний индекс k означает степень используемого многочлена Тейлора, если речь не идет о показателях алгебраических степеней, степенях производных и символов транспонирования. В дальнейшем наряду с обозначением (2) ту же разностную краевую задачу будем обозначать для краткости как $L_{h,I}^{k}$.

1. Краевые задачи с граничными условиями второго и третьего рода. В первом сообщении [1] показано, что в развернутом виде задача (2) есть система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящая из $(2n-2)$ уравнений, в которой x_0, y_0, x_n, y_n — заданные числа. В граничных условиях третьего рода

$$\begin{aligned} &\alpha_0 x_0 + \beta_0 x'_0 = \widetilde{x}_0, \quad \alpha_1 y_0 + \beta_1 y'_0 = \widetilde{y}_0, \\ &\alpha_2 x_n + \beta_2 x'_n = \widetilde{x}_n, \quad \alpha_3 y_n + \beta_3 y'_n = \widetilde{y}_n, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{y}_0$, $\widetilde{x}_n$, $\widetilde{y}_n$, α_j, β_j — заданные числа, $j = 0, 1, 2, 3$; значения x_0, y_0, x_n, y_n не заданы. Следовательно, в задачу (2) необходимо добавить четыре алгебраических уравнения, которые содержали бы величины x_0, y_0, x_n, y_n в качестве искомых неизвестных.

Локальные матрицы A^{ki}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, и их последующие преобразования оставим без изменения в виде, как это было выполнено в [1]. Составим локальную матрицу A^{k0} для двухточечного шаблона t_0, t_1 так, чтобы искомые решения задачи удовлетворяли граничным условиям (3) в левой границе $t_0 = a$ области интегрирования D.

Выполним преобразования. Запишем для функций $x(t), x'(t)$ в левой границе области интегрирования при фиксированном k следующие многочлены Тейлора:

$$x_0 = x_1 - hx_1' + \frac{h^2}{2!}x_1'' - \frac{h^3}{3!}x_1''' + \cdots + (-1)^k \frac{h^k}{k!}x_1^{(k)}, \tag{4}$$

$$x_0' = x_1' - hx_1'' + \frac{h^2}{2!}x_1''' - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}x_1^{(k)}. \tag{5}$$

Сложив умноженные на α_0 обе части равенства (4) и умноженные на β_0 обе части равенства (5), с учетом первого из граничных условий третьего рода (3) получим следующее:

$$\alpha_0 x_1 + \Big(-\alpha_0 h + \beta_0\Big)x_1' + \Big(\alpha_0\frac{h^2}{2!} - \beta_0 h\Big)x_1'' + \Big(-\alpha_0\frac{h^3}{3!} + \beta_0\frac{h^2}{2!}\Big)x_1''' + \\ + \cdots + (-1)^k\Big(\alpha_0\frac{h^k}{k!} - \beta_0\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}\Big)x_1^{(k)} = \alpha_0 x_0 + \beta_0 x_0' = \widetilde{x}_0. \tag{6}$$

Выполним аналогичные преобразования с многочленами Тейлора для функций $y(t)$, $y'(t)$ в левой границе области интегрирования:

$$y_0 = y_1 - hy_1' + \frac{h^2}{2!}y_1'' - \frac{h^3}{3!}y_1''' + \cdots + (-1)^k \frac{h^k}{k!}y_1^{(k)}, \tag{7}$$

$$y_0' = y_1' - hy_1'' + \frac{h^2}{2!}y_1''' - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}y_1^{(k)}. \tag{8}$$

С учетом второго из граничных условий третьего рода (3) получим

$$\alpha_1 y_1 + \Big(-\alpha_1 h + \beta_1\Big)y_1' + \Big(\alpha_1\frac{h^2}{2!} - \beta_1 h\Big)y_1'' + \Big(-\alpha_1\frac{h^3}{3!} + \beta_1\frac{h^2}{2!}\Big)y_1''' + \\ + \cdots + (-1)^k\Big(\alpha_1\frac{h^k}{k!} - \beta_1\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}\Big)y_1^{(k)} = \alpha_1 y_0 + \beta_1 y_0' = \widetilde{y}_0. \tag{9}$$

Введем обозначения

$$H_{jm} = (-1)^m\Big(\alpha_j\frac{h^m}{m!} - \beta_j\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}\Big), \quad j = 0, 1, \quad m = 1, 2, \ldots, k, \tag{10}$$

и равенства (6), (9) запишем компактно:

$$\alpha_0 x_1 + H_{01}x_1' + H_{02}x_1'' + H_{03}x_1''' + \cdots + H_{0k}x_1^{(k)} = \widetilde{x}_0, \tag{11}$$

$$\alpha_1 y_1 + H_{11}y_1' + H_{12}y_1'' + H_{13}y_1''' + \cdots + H_{1k}y_1^{(k)} = \widetilde{y}_0. \tag{12}$$

Производные по аргументу t от обеих частей уравнений системы (1) в узле t_1 запишем в виде

$$\begin{cases} \left(u_{11}x_1'' + p_{11}x_1' + r_{11}x_1 + v_{11}y_1'' + q_{11}y_1' + s_{11}y_1\right)^{(r)} = \left(f_{11}\right)^{(r)}, \\ \left(u_{21}x_1'' + p_{21}x_1' + r_{21}x_1 + v_{21}y_1'' + q_{21}y_1' + s_{21}y_1\right)^{(r)} = \left(f_{21}\right)^{(r)}, \end{cases} \tag{13}$$

где $r = 1, 2, \ldots, k-2$.

Из равенств (11), (12), многочленов Тейлора (4), (7), дифференциальных уравнений системы (1), записанных в узле t_1, и производных (13) составим следующую систему из $2k+2$ уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_0 x_1 + H_{01}x_1' + H_{02}x_1'' + H_{03}x_1''' + \cdots + H_{0k}x_1^{(k)} = \widetilde{x}_0, \\ \alpha_1 y_1 + H_{11}y_1' + H_{12}y_1'' + H_{13}y_1''' + \cdots + H_{1k}y_1^{(k)} = \widetilde{y}_0, \\ x_1 - hx_1' + \dfrac{h^2}{2!}x_1'' - \dfrac{h^3}{3!}x_1''' + \cdots + (-1)^k \dfrac{h^k}{k!}x_1^{(k)} = x_0, \\ y_1 - hy_1' + \dfrac{h^2}{2!}y_1'' - \dfrac{h^3}{3!}y_1''' + \cdots + (-1)^k \dfrac{h^k}{k!}y_1^{(k)} = y_0, \\ r_{11}x_1 + p_{11}x_1' + u_{11}x_1'' + s_{11}y_1 + q_{11}y_1' + v_{11}y_1'' = f_{11}, \\ r_{21}x_1 + p_{21}x_1' + u_{21}x_1'' + s_{21}y_1 + q_{21}y_1' + v_{21}y_1'' = f_{21}, \\ r_{11}'x_1 + (r_{11} + p_{11}')x_1' + (p_{11} + u_{11}')x_1'' + u_{11}x_1''' + s_{11}'y_1 + \\ \qquad + (s_{11} + q_{11}')y_1' + (q_{11} + v_{11}')y_1'' + v_{11}y_1''' = f_{11}', \\ r_{21}'x_1 + (r_{21} + p_{21}')x_1' + (p_{21} + u_{21}')x_1'' + u_{21}x_1''' + s_{21}'y_1 + \\ \qquad + (s_{21} + q_{21}')y_1' + (q_{21} + v_{21}')y_1'' + v_{21}y_1''' = f_{21}', \\ \quad \ldots \\ r_{11}^{(k-2)}x_1 + \cdots + u_{11}x_1^{(k)} + s_{11}^{(k-2)}y_1 + \cdots + v_{11}y_1^{(k)} = f_{11}^{(k-2)}, \\ r_{21}^{(k-2)}x_1 + \cdots + u_{21}x_1^{(k)} + s_{21}^{(k-2)}y_1 + \cdots + v_{21}y_1^{(k)} = f_{21}^{(k-2)}. \end{cases} \tag{14}$$

Система (14) является СЛАУ, имеющей в матричной форме вид

$$A^{k0}W^{k0} = G^{k0}$$

в обозначениях

$$A^{k0} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & H_{01} & 0 & H_{02} & 0 & \ldots & H_{0k} & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & H_{11} & 0 & H_{12} & \ldots & 0 & H_{1k} \\ 1 & 0 & -h & 0 & \dfrac{h^2}{2!} & 0 & \ldots & (-1)^k\dfrac{h^k}{k!} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -h & 0 & \dfrac{h^2}{2!} & \ldots & 0 & (-1)^k\dfrac{h^k}{k!} \\ r_{11} & s_{11} & p_{11} & q_{11} & u_{11} & v_{11} & \ldots & 0 & 0 \\ r_{21} & s_{21} & p_{21} & q_{21} & u_{21} & v_{21} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{11}^{(k-2)} & s_{11}^{(k-2)} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & u_{11} & v_{11} \\ r_{21}^{(k-2)} & s_{21}^{(k-2)} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & u_{21} & v_{21} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$W^{k0} = \left[x_1 \; y_1 \; x_1' \; y_1' \; x_1'' \; y_1'' \; \ldots \; x_1^{(k)} \; y_1^{(k)}\right]^\top,$$
$$G^{k0} = \left[\widetilde{x}_0 \; \widetilde{y}_0 \; x_0 \; y_0 \; f_{11} \; f_{21} \; \ldots \; f_{11}^{(k-2)} \; f_{21}^{(k-2)}\right]^\top,$$

где $\top$ — символ транспонирования.

Предполагая существование обратной матрицы $B^{k0} = (A^{k0})^{-1}$ от локальной матрицы (15), найдем матричное равенство

$$B^{k0} G^{k0} = W^{k0},$$

из которого выпишем два первых уравнения:

$$b_{11}^{k0}\widetilde{x}_0 + b_{12}^{k0}\widetilde{y}_0 + b_{13}^{k0}x_0 + b_{14}^{k0}y_0 + b_{15}^{k0}f_{11} + b_{16}^{k0}f_{21} + \cdots + \\ + b_{1(2k+1)}^{k0}f_{11}^{(k-2)} + b_{1(2k+2)}^{k0}f_{21}^{(k-2)} = x_1, \quad (16)$$

$$b_{21}^{k0}\widetilde{x}_0 + b_{22}^{k0}\widetilde{y}_0 + b_{23}^{k0}x_0 + b_{24}^{k0}y_0 + b_{25}^{k0}f_{11} + b_{26}^{k0}f_{21} + \cdots + \\ + b_{2(2k+1)}^{k0}f_{11}^{(k-2)} + b_{2(2k+2)}^{k0}f_{21}^{(k-2)} = y_1, \quad (17)$$

где b_{jm}^{k0} — элементы матрицы B^{k0}.

Из соотношений (16), (17) найдем

$$-\frac{b_{13}^{k0}}{b_{15}^{k0}}x_0 - \frac{b_{14}^{k0}}{b_{15}^{k0}}y_0 + \frac{x_1}{b_{15}^{k0}} = \frac{b_{11}^{k0}}{b_{15}^{k0}}\widetilde{x}_0 + \frac{b_{12}^{k0}}{b_{15}^{k0}}\widetilde{y}_0 + f_{11} + \frac{b_{16}^{k0}}{b_{15}^{k0}}f_{21} + \cdots + \\ + \frac{b_{1(2k+1)}^{k0}}{b_{15}^{k0}}f_{11}^{(k-2)} + \frac{b_{1(2k+2)}^{k0}}{b_{15}^{k0}}f_{21}^{(k-2)}, \quad (18)$$

$$-\frac{b_{23}^{k0}}{b_{26}^{k0}}x_0 - \frac{b_{24}^{k0}}{b_{26}^{k0}}y_0 + \frac{y_1}{b_{26}^{k0}} = \frac{b_{21}^{k0}}{b_{26}^{k0}}\widetilde{x}_0 + \frac{b_{22}^{k0}}{b_{26}^{k0}}\widetilde{y}_0 + \frac{b_{25}^{k0}}{b_{26}^{k0}}f_{11} + f_{21} + \cdots + \\ + \frac{b_{2(2k+1)}^{k0}}{b_{26}^{k0}}f_{11}^{(k-2)} + \frac{b_{2(2k+2)}^{k0}}{b_{26}^{k0}}f_{21}^{(k-2)}. \quad (19)$$

Выполним аналогичные преобразования в правой границе $t_n = b$ области интегрирования D:

$$\frac{x_{n-1}}{b_{15}^{kn}} - \frac{b_{13}^{kn}}{b_{15}^{kn}}x_n - \frac{b_{14}^{kn}}{b_{15}^{kn}}y_n = \frac{b_{11}^{kn}}{b_{15}^{kn}}\widetilde{x}_n + \frac{b_{12}^{kn}}{b_{15}^{kn}}\widetilde{y}_n + f_{1(n-1)} + \frac{b_{16}^{kn}}{b_{15}^{kn}}f_{2(n-1)} + \cdots + \\ + \frac{b_{1(2k+1)}^{kn}}{b_{15}^{kn}}f_{1(n-1)}^{(k-2)} + \frac{b_{1(2k+2)}^{kn}}{b_{15}^{kn}}f_{2(n-1)}^{(k-2)}, \quad (20)$$

$$\frac{y_{n-1}}{b_{26}^{kn}} - \frac{b_{23}^{kn}}{b_{26}^{kn}}x_n - \frac{b_{24}^{kn}}{b_{26}^{kn}}y_n = \frac{b_{21}^{kn}}{b_{26}^{kn}}\widetilde{x}_n + \frac{b_{22}^{kn}}{b_{26}^{kn}}\widetilde{y}_n + \frac{b_{25}^{kn}}{b_{26}^{kn}}f_{1(n-1)} + f_{2(n-1)} + \cdots + \\ + \frac{b_{2(2k+1)}^{kn}}{b_{26}^{kn}}f_{1(n-1)}^{(k-2)} + \frac{b_{2(2k+2)}^{kn}}{b_{26}^{kn}}f_{2(n-1)}^{(k-2)}, \quad (21)$$

где b_{jm}^{kn} — элементы матрицы $B^{kn}=(A^{kn})^{-1}$.

Теперь рассматриваемую разностную краевую задачу с граничными условиями третьего рода с учетом (18)–(21) запишем в компактной символической форме:

$$L_{h,\mathtt{III}}^{k} z = f_{h,\mathtt{III}}^{k}, \tag{22}$$

где

$$L_{h,\mathtt{III}}^{k} z \equiv L_{h,\mathtt{III}}^{k}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} -\dfrac{b_{11}^{ki}}{b_{15}^{ki}}x_{i-1} - \dfrac{b_{12}^{ki}}{b_{15}^{ki}}y_{i-1} + \dfrac{x_i}{b_{15}^{ki}} - \dfrac{b_{13}^{ki}}{b_{15}^{ki}}x_{i+1} - \dfrac{b_{14}^{ki}}{b_{15}^{ki}}y_{i+1}, \\ -\dfrac{b_{21}^{ki}}{b_{26}^{ki}}x_{i-1} - \dfrac{b_{22}^{ki}}{b_{26}^{ki}}y_{i-1} + \dfrac{y_i}{b_{26}^{ki}} - \dfrac{b_{23}^{ki}}{b_{26}^{ki}}x_{i+1} - \dfrac{b_{24}^{ki}}{b_{26}^{ki}}y_{i+1}, \\ -\dfrac{b_{13}^{k0}}{b_{15}^{k0}}x_0 - \dfrac{b_{14}^{k0}}{b_{15}^{k0}}y_0 + \dfrac{x_1}{b_{15}^{k0}}, \\ -\dfrac{b_{23}^{k0}}{b_{26}^{k0}}x_0 - \dfrac{b_{24}^{k0}}{b_{26}^{k0}}y_0 + \dfrac{y_1}{b_{26}^{k0}}, \\ \dfrac{x_{n-1}}{b_{15}^{kn}} - \dfrac{b_{13}^{kn}}{b_{15}^{kn}}x_n - \dfrac{b_{14}^{kn}}{b_{15}^{kn}}y_n, \\ \dfrac{y_{n-1}}{b_{26}^{kn}} - \dfrac{b_{23}^{kn}}{b_{26}^{kn}}x_n - \dfrac{b_{24}^{kn}}{b_{26}^{kn}}y_n, \end{cases}$$

$$f_{h,\mathtt{III}}^{k} = \begin{cases} f_{1i} + \dfrac{b_{16}^{ki}}{b_{15}^{ki}}f_{2i} + \dfrac{b_{17}^{ki}}{b_{15}^{ki}}f_{1i}' + \dfrac{b_{18}^{ki}}{b_{15}^{ki}}f_{2i}' + \dots + \dfrac{b_{1(2k+1)}^{ki}}{b_{15}^{ki}}f_{1i}^{(k-2)} + \dfrac{b_{1(2k+2)}^{ki}}{b_{15}^{ki}}f_{2i}^{(k-2)}, \\ \dfrac{b_{25}^{ki}}{b_{26}^{ki}}f_{1i} + f_{2i} + \dfrac{b_{27}^{ki}}{b_{26}^{ki}}f_{1i}' + \dfrac{b_{28}^{ki}}{b_{26}^{ki}}f_{2i}' + \dots + \dfrac{b_{2(2k+1)}^{ki}}{b_{26}^{ki}}f_{1i}^{(k-2)} + \dfrac{b_{2(2k+2)}^{ki}}{b_{26}^{ki}}f_{2i}^{(k-2)}, \\ \dfrac{b_{11}^{k0}}{b_{15}^{k0}}\widetilde{x}_0 + \dfrac{b_{12}^{k0}}{b_{15}^{k0}}\widetilde{y}_0 + f_{11} + \dfrac{b_{16}^{k0}}{b_{15}^{k0}}f_{21} + \dots + \dfrac{b_{1(2k+1)}^{k0}}{b_{15}^{k0}}f_{11}^{(k-2)} + \dfrac{b_{1(2k+2)}^{k0}}{b_{15}^{k0}}f_{21}^{(k-2)}, \\ \dfrac{b_{21}^{k0}}{b_{26}^{k0}}\widetilde{x}_0 + \dfrac{b_{22}^{k0}}{b_{26}^{k0}}\widetilde{y}_0 + \dfrac{b_{25}^{k0}}{b_{26}^{k0}}f_{11} + f_{21} + \dots + \dfrac{b_{2(2k+1)}^{k0}}{b_{26}^{k0}}f_{11}^{(k-2)} + \dfrac{b_{2(2k+2)}^{k0}}{b_{26}^{k0}}f_{21}^{(k-2)}, \\ \dfrac{b_{11}^{kn}}{b_{15}^{kn}}\widetilde{x}_n + \dfrac{b_{12}^{kn}}{b_{15}^{kn}}\widetilde{y}_n + f_{1(n-1)} + \dfrac{b_{16}^{kn}}{b_{15}^{kn}}f_{2(n-1)} + \dots + \\ \qquad\qquad + \dfrac{b_{1(2k+1)}^{kn}}{b_{15}^{kn}}f_{1(n-1)}^{(k-2)} + \dfrac{b_{1(2k+2)}^{kn}}{b_{15}^{kn}}f_{2(n-1)}^{(k-2)}, \\ \dfrac{b_{21}^{kn}}{b_{26}^{kn}}\widetilde{x}_n + \dfrac{b_{22}^{kn}}{b_{26}^{kn}}\widetilde{y}_n + \dfrac{b_{25}^{kn}}{b_{26}^{kn}}f_{1(n-1)} + f_{2(n-1)} + \dots + \\ \qquad\qquad + \dfrac{b_{2(2k+1)}^{kn}}{b_{26}^{kn}}f_{1(n-1)}^{(k-2)} + \dfrac{b_{2(2k+2)}^{kn}}{b_{26}^{kn}}f_{2(n-1)}^{(k-2)}, \end{cases}$$

для всех $i=1,2,\dots,n-1$. Система (22) состоит из $(2n+2)$ уравнений с $(2n+2)$ неизвестными, включая и x_0, y_0, x_n, y_n.

Положим в (10) и в аналогичном обозначении постоянных в локальной матрице A^{kn} значения $\alpha_j = 0$, $\beta_j = 1$, $j = 0, 1, 2, 3$. Тогда задача (22) превратится в разностную краевую задачу

$$L^k_{h,\mathtt{II}} z = f^k_{h,\mathtt{II}},$$

в которой использованы граничные условия второго рода

$$x'_0 = \widetilde{x}_0, \quad y'_0 = \widetilde{y}_0, \quad x'_n = \widetilde{x}_n, \quad y'_n = \widetilde{y}_n. \tag{23}$$

2. Оценка порядка аппроксимации разностной краевой задачи с граничными условиями второго и третьего рода. При исследовании дифференциальной краевой задачи для одного ОДУ2 относительно $x(t)$ сеточная функция x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, являющаяся решением разностной краевой задачи, при подстановке в уравнения этой разностной краевой задачи обратит их в верные равенства. В [2] показано, что подстановка в уравнения задачи сеточной функции $[x_i]$, совпадающей с точным решением в узлах сетки D_h и отличающейся от x_i, приведет к некоторому отличию от верных равенств. Эти отличия и характеризует невязка δf^k_h [2]. Иными словами, подстановка $[x]$ в

$$L^k_h x = f^k_h$$

приводит к

$$L^k_h [x] = f^k_h + \delta f^k_h.$$

Согласно [2, 3], разностная краевая задача аппроксимирует дифференциальную краевую задачу на точном решении x, если $\|\delta f^k_h\| \to 0$ при $h \to 0$. Если при этом имеет место неравенство

$$\|\delta f^k_h \mid \leqslant C h^k,$$

где $C > 0$, $k > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от h, то говорят, что имеет место аппроксимация порядка k относительно величины h.

Подстановка $[z]$ в задачу (22) приводит к

$$L^k_{h,\mathtt{III}}[z] = f^k_{h,\mathtt{III}} + \delta f^k_{h,\mathtt{III}}. \tag{24}$$

При оценке порядка аппроксимации задачи (2) в [1] были использованы лишь внутренние узлы сетки D_h в силу того, что в граничных узлах сетки невязка в этой задаче обращается в нуль [1, 2].

В [2] для оценки порядка аппроксимации обоснована целесообразность разбиения разностной задачи на подзадачи (подсистемы); в частности, граничные точки области интегрирования можно выделить в отдельные подзадачи. В силу того, что во внутренних узлах сетки D_h разностные уравнения задач $L^k_{h,\mathtt{I}}$ и $L^k_{h,\mathtt{III}}$ совпадают, а невязка задачи $L^k_{h,\mathtt{I}}$ вычислена в [1], для вычисления невязки задачи (22) остается исследовать лишь граничные точки области интегрирования. Поэтому задачу (22) разобьем на три подзадачи в зависимости от области изменения независимого аргумента t:

– внутренние точки области интегрирования исследуются в первой подзадаче — это рассмотренная в [1] задача $L^k_{h,\mathtt{I}}$;

– левая граница $t_0 = a$ области интегрирования исследуется во второй подзадаче:

$$L_{h,\text{III}}^{k0} z = f_{h,\text{III}}^{k0}, \tag{25}$$

где

$$L_{h,\text{III}}^{k0} z \equiv L_{h,\text{III}}^{k0} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} -\dfrac{b_{13}^{k0}}{b_{15}^{k0}} x_0 - \dfrac{b_{14}^{k0}}{b_{15}^{k0}} y_0 + \dfrac{x_1}{b_{15}^{k0}}, \\ -\dfrac{b_{23}^{k0}}{b_{26}^{k0}} x_0 - \dfrac{b_{24}^{k0}}{b_{26}^{k0}} y_0 + \dfrac{y_1}{b_{26}^{k0}}, \end{cases}$$

$$f_{h,\text{III}}^{k0} = \begin{cases} \dfrac{b_{11}^{k0}}{b_{15}^{k0}} \widetilde{x}_0 + \dfrac{b_{12}^{k0}}{b_{15}^{k0}} \widetilde{y}_0 + f_{11} + \dfrac{b_{16}^{k0}}{b_{15}^{k0}} f_{21} + \dots + \\ \qquad + \dfrac{b_{1(2k+1)}^{k0}}{b_{15}^{k0}} f_{11}^{(k-2)} + \dfrac{b_{1(2k+2)}^{k0}}{b_{15}^{k0}} f_{21}^{(k-2)}, \\ \dfrac{b_{21}^{k0}}{b_{26}^{k0}} \widetilde{x}_0 + \dfrac{b_{22}^{k0}}{b_{26}^{k0}} \widetilde{y}_0 + \dfrac{b_{25}^{k0}}{b_{26}^{k0}} f_{11} + f_{21} + \dots + \\ \qquad + \dfrac{b_{2(2k+1)}^{k0}}{b_{26}^{k0}} f_{11}^{(k-2)} + \dfrac{b_{2(2k+2)}^{k0}}{b_{26}^{k0}} f_{21}^{(k-2)}; \end{cases}$$

– правая граница $t_n = b$ — в третьей подзадаче

$$L_{h,\text{III}}^{kn} z = f_{h,\text{III}}^{kn}. \tag{26}$$

Рассмотрим задачу (25). При составлении локальной матрицы A^{k0} используем дифференциальные уравнения системы (1), записанные в узле t_1, и производные (13), а вместо приближенных равенств (4), (5), (7), (8) используем следующие точные равенства:

$$[x_0] - R_{x,0}^{k} = [x_1] - h[x_1'] + \frac{h^2}{2!}[x_1''] - \frac{h^3}{3!}[x_1'''] + \dots + (-1)^k \frac{h^k}{k!}[x_1^{(k)}], \tag{27}$$

$$[x_0'] - R_{x,0}^{k-1} = [x_1'] - h[x_1''] + \frac{h^2}{2!}[x_1'''] - \dots + (-1)^{k-1} \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}[x^{(k)}], \tag{28}$$

$$[y_0] - R_{y,0}^{k} = [y_1] - h[y_1'] + \frac{h^2}{2!}[y_1''] - \frac{h^3}{3!}[y_1'''] + \dots + (-1)^k \frac{h^k}{k!}[y_1^{(k)}], \tag{29}$$

$$[y_0'] - R_{y,0}^{k-1} = [y_1'] - h[y_1''] + \frac{h^2}{2!}[y_1'''] - \dots + (-1)^{k-1} \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}[y_1^{(k)}]. \tag{30}$$

В равенствах (27)–(30) вторые слагаемые в левых частях есть дополнительные члены разложений в ряд Тейлора в форме Лагранжа [4] соответствующих функций, например,

$$R_{0,x}^{k} = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} x^{(k+1)}(\xi) = O(h^{k+1}), \quad \xi \in (t_0, t_1).$$

В итоге получим матричное равенство

$$A^{k0} W^{k0} = G^{k0},$$

в котором локальная матрица A^{k0}, как и ранее, определяется формулой (15) и

$$[W^{k0}] = \begin{bmatrix} [x_1] \\ [y_1] \\ [x'_1] \\ [y'_1] \\ [x''_1] \\ [y''_1] \\ [x'''_1] \\ [y'''_1] \\ \dots \\ [x_1^{(k)}] \\ [y_1^{(k)}] \end{bmatrix}, \quad [G^{k0}] = \begin{bmatrix} \widetilde{x}_0 - \alpha_0 R^k_{x,0} - \beta_0 R^{k-1}_{x,0} \\ \widetilde{y}_0 - \alpha_1 R^k_{y,0} - \beta_1 R^{k-1}_{y,0} \\ [x_0] - R^k_{x,0} \\ [y_0] - R^k_{y,0} \\ f_{11} \\ f_{21} \\ f'_{11} \\ f'_{21} \\ \dots \\ f_{11}^{(k-2)} \\ f_{21}^{(k-2)} \end{bmatrix}.$$

Выполняя преобразования, аналогичные приведенным выше при исследовании задачи (22), получим в граничной точке $t_0 = a$ вместо (18), (19) следующие равенства:

$$\begin{aligned} -\frac{b^{k0}_{13}}{b^{k0}_{15}}[x_0] - \frac{b^{k0}_{14}}{b^{k0}_{15}}[y_0] + \frac{[x_1]}{b^{k0}_{15}} = \frac{b^{k0}_{11}}{b^{k0}_{15}}\widetilde{x}_0 + \frac{b^{k0}_{12}}{b^{k0}_{15}}\widetilde{y}_0 + f_{11} + \frac{b^{k0}_{16}}{b^{k0}_{15}}f_{21} + \dots + \\ + \frac{b^{k0}_{1(2k+1)}}{b^{k0}_{15}}f_{11}^{(k-2)} + \frac{b^{k0}_{1(2k+2)}}{b^{k0}_{15}}f_{21}^{(k-2)} - \frac{b^{k0}_{11}(\alpha_0 R^k_{x,0} + \beta_0 R^{k-1}_{x,0}) + b^{k0}_{13} R^k_{x,0}}{b^{k0}_{15}} - \\ - \frac{b^{k0}_{12}(\alpha_1 R^k_{y,0} + \beta_1 R^{k-1}_{y,0}) + b^{k0}_{14} R^k_{y,0}}{b^{k0}_{15}}, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} -\frac{b^{k0}_{23}}{b^{k0}_{26}}[x_0] - \frac{b^{k0}_{24}}{b^{k0}_{26}}[y_0] + \frac{[y_1]}{b^{k0}_{26}} = \frac{b^{k0}_{21}}{b^{k0}_{26}}\widetilde{x}_0 + \frac{b^{k0}_{22}}{b^{k0}_{26}}\widetilde{y}_0 + \frac{b^{k0}_{25}}{b^{k0}_{26}}f_{11} + f_{21} + \dots + \\ + \frac{b^{k0}_{2(2k+1)}}{b^{k0}_{26}}f_{11}^{(k-2)} + \frac{b^{k0}_{2(2k+2)}}{b^{k0}_{26}}f_{21}^{(k-2)} - \frac{b^{k0}_{21}(\alpha_0 R^k_{x,0} + \beta_0 R^{k-1}_{x,0}) + b^{k0}_{23} R^k_{x,0}}{b^{k0}_{26}} - \\ - \frac{b^{k0}_{22}(\alpha_1 R^k_{y,0} + \beta_1 R^{k-1}_{y,0}) + b^{k0}_{24} R^k_{y,0}}{b^{k0}_{26}}. \end{aligned} \tag{32}$$

Отбрасывание двух последних дробей в равенствах (31), (32), что равносильно переходу от точного решения $[x_i]$, $[y_i]$, $i = 0, 1$, к искомому приближенному x_i, y_i, $i = 0, 1$, приводит к задаче (25). Следовательно, в соответствии с (24), последние две дроби в равенствах (31), (32) характеризуют величины невязок в левой границе области интегрирования; в итоге для рассматриваемой задачи (25) имеем

$$\delta f^{k0}_{h,\mathtt{III}} = \begin{cases} \delta f^{k0}_{1h,\mathtt{III}}, \\ \delta f^{k0}_{2h,\mathtt{III}}, \end{cases}$$

где

$$\delta f^{k0}_{1h,\mathrm{III}} = -\frac{b^{k0}_{11}(\alpha_0 R^k_{x,0} + \beta_0 R^{k-1}_{x,0}) + b^{k0}_{13} R^k_{x,0}}{b^{k0}_{15}} - \\ - \frac{b^{k0}_{12}(\alpha_1 R^k_{y,0} + \beta_1 R^{k-1}_{y,0}) + b^{k0}_{14} R^k_{y,0}}{b^{k0}_{15}}, \qquad (33)$$

$$\delta f^{k0}_{2h,\mathrm{III}} = -\frac{b^{k0}_{21}(\alpha_0 R^k_{x,0} + \beta_0 R^{k-1}_{x,0}) + b^{k0}_{23} R^k_{x,0}}{b^{k0}_{26}} - \\ - \frac{b^{k0}_{22}(\alpha_1 R^k_{y,0} + \beta_1 R^{k-1}_{y,0}) + b^{k0}_{24} R^k_{y,0}}{b^{k0}_{26}}. \qquad (34)$$

Первое слагаемое в равенствах (33), (34) характеризует величину невязки, появление которой обусловлено функцией x, второе — функцией y.

Исследуем невязки $\delta f^{k0}_{1h,\mathrm{III}}$ и $\delta f^{k0}_{2h,\mathrm{III}}$. В узле t_0 введем, как в [1], компактные обозначения для определителей второго порядка, например,

$$U_0 V_0 = \begin{vmatrix} u_{10} & v_{10} \\ u_{20} & v_{20} \end{vmatrix}. \qquad (35)$$

В дальнейшем будем опускать индекс 0 в левой части в обозначениях определителей вида (35).

Отметим, что вычисление точных значений алгебраических дополнений элементов первой и второй строк матрицы $(A^{20})^\top$, как это было сделано в [1], не является особо трудоемкой процедурой; тем не менее нет строгой необходимости в нахождении точных значений в силу того, что для вычисления невязок необходимы лишь главные части этих алгебраических дополнений в их разложениях по степеням h; поэтому допустим, лишь для сокращения объема выкладок, пренебрежение старшими степенями в каждом элементе локальной матрицы A^{20} при нахождении алгебраических дополнений элементов первой и второй строк матрицы $(A^{20})^\top$.

Для задачи (25) непосредственными вычислениями можно для любого $k \geqslant 3$ убедиться в справедливости оценки

$$M^{k0}_{11} \approx (UV)^{k-2} M^{20}_{11}, \qquad (36)$$

где M^{k0}_{11} — алгебраическое дополнение элемента a^{k0}_{11} транспонированной локальной матрицы A^{k0}. Частный случай равенства (36) при $k = 3$, где для матрицы A^{30} учтено приведенное выше допущение для матрицы A^{20}, пренебрегая старшими степенями и опуская номер 0 узла сетки, запишем, используя обозначения (10), как

$$M^3_{11} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 1 & s_1 & s_2 & s'_1 & s'_2 \\ 0 & h & 0 & p_1 & p_2 & \widetilde{p}_1 & \widetilde{p}_2 \\ H_{11} & 0 & h & q_1 & q_2 & \widetilde{q}_1 & \widetilde{q}_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & 0 & u_1 & u_2 & \widetilde{u}_1 & \widetilde{u}_2 \\ H_{12} & 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 & \widetilde{v}_1 & \widetilde{v}_2 \\ 0 & \frac{h^3}{3!} & 0 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ H_{13} & 0 & \frac{h^3}{3!} & 0 & 0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 1 & s_1 & s_2 & s_1' & s_2' \\ 0 & h & 0 & p_1 & p_2 & \widetilde{p}_1 & \widetilde{p}_2 \\ \beta_1 & 0 & h & q_1 & q_2 & \widetilde{q}_1 & \widetilde{q}_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & 0 & u_1 & u_2 & \widetilde{u}_1 & \widetilde{u}_2 \\ -\beta_1 h & 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 & \widetilde{v}_1 & \widetilde{v}_2 \\ 0 & \frac{h^3}{3!} & 0 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ \beta_1\frac{h^2}{2} & 0 & \frac{h^3}{3!} & 0 & 0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \frac{h^3}{3!}\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & s_1 & s_2 & s_1' & s_2' \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 & \widetilde{p}_1 & \widetilde{p}_2 \\ \beta_1 & h & q_1 & q_2 & \widetilde{q}_1 & \widetilde{q}_2 \\ 0 & 0 & u_1 & u_2 & \widetilde{u}_1 & \widetilde{u}_2 \\ -\beta_1 h & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 & \widetilde{v}_1 & \widetilde{v}_2 \\ \beta_1\frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{3!} & 0 & 0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ u_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 1 & s_1 & s_2 & s_2' \\ 0 & h & 0 & p_1 & p_2 & \widetilde{p}_2 \\ \beta_1 & 0 & h & q_1 & q_2 & \widetilde{q}_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & 0 & u_1 & u_2 & \widetilde{u}_2 \\ -\beta_1 h & 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 & \widetilde{v}_2 \\ \beta_1\frac{h^2}{2} & 0 & \frac{h^3}{3!} & 0 & 0 & v_2 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 1 & s_1 & s_2 & s_1' \\ 0 & h & 0 & p_1 & p_2 & \widetilde{p}_1 \\ \beta_1 & 0 & h & q_1 & q_2 & \widetilde{q}_1 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & 0 & u_1 & u_2 & \widetilde{u}_1 \\ -\beta_1 h & 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 & \widetilde{v}_1 \\ \beta_1\frac{h^2}{2} & 0 & \frac{h^3}{3!} & 0 & 0 & v_1 \end{vmatrix} =$$

$$= c_3 h^5 + O(h^6) + u_1\left(d_3 h^3 + O(h^4) + v_2 M_{11}^2\right) -$$
$$- u_2\left(g_3 h^3 + O(h^4) + v_1 M_{11}^2\right) \approx (u_1 v_2 - u_2 v_1)\, M_{11}^2 = UV M_{11}^2,$$

где $\widetilde{p}_j$, $\widetilde{q}_j$, $\widetilde{u}_j$, $\widetilde{v}_j$, $j = 1, 2$, есть функции от p_j, q_j, u_j, v_j и их первых производных; c_3, d_3, g_3 — независящие от h величины.

Формулы, аналогичные (36), имеют место, по крайней мере, для первых шести элементов первой и второй строк матрицы $(A^{k0})^\top$; на основании чего и очевидных равенств

$$\frac{b_{1j}^{k0}}{b_{15}^{k0}} = \frac{M_{1j}^k}{M_{15}^k}, \quad \frac{b_{2j}^{k0}}{b_{26}^{k0}} = \frac{M_{2j}^k}{M_{26}^k}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

следуют оценки

$$\frac{b_{1j}^{k0}}{b_{15}^{k0}} \approx \frac{M_{1j}^2}{M_{15}^2}, \quad \frac{b_{2j}^{k0}}{b_{26}^{k0}} \approx \frac{M_{2j}^2}{M_{26}^2}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{37}$$

Невязка (33) с учетом соотношений (37) примет вид

$$\delta f_{1h,III}^{k0} \approx -\frac{M_{11}^2(\alpha_0 R_{x,0}^k + \beta_0 R_{x,0}^{k-1}) + M_{13}^2 R_{x,0}^k}{M_{15}^2} - \\ - \frac{M_{12}^2(\alpha_1 R_{y,0}^k + \beta_1 R_{y,0}^{k-1}) + M_{14}^2 R_{y,0}^k}{M_{15}^2}. \tag{38}$$

Найдем оценки алгебраических дополнений первых пяти элементов первой строки матрицы $(A^{20})^\top$. С учетом приведенного выше допущения имеем

$$M_{11}^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 1 & s_1 & s_2 \\ 0 & h & 0 & p_1 & p_2 \\ H_{11} & 0 & h & q_1 & q_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & 0 & u_1 & u_2 \\ H_{12} & 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 1 & s_1 & s_2 \\ 0 & h & 0 & p_1 & p_2 \\ \beta_1 & 0 & h & q_1 & q_2 \\ 0 & \frac{h^2}{2} & 0 & u_1 & u_2 \\ -\beta_1 h & 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$= h\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & s_1 & s_2 \\ \beta_1 & h & q_1 & q_2 \\ 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ -\beta_1 h & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} + \frac{h^2}{2}\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & s_1 & s_2 \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 \\ \beta_1 & h & q_1 & q_2 \\ -\beta_1 h & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix}. \quad (39)$$

Вычислим оценку первого определителя последнего равенства:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & s_1 & s_2 \\ \beta_1 & h & q_1 & q_2 \\ 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ -\beta_1 h & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & s_2 \\ \beta_1 & h & q_2 \\ -\beta_1 h & \frac{h^2}{2} & v_2 \end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & s_1 \\ \beta_1 & h & q_1 \\ -\beta_1 h & \frac{h^2}{2} & v_1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\beta_1 UV + h(\alpha_1 UV + \beta_1 QU) + h^2\Big(\alpha_1 QU - \frac{3}{2}\beta_1 SU\Big) \approx -\beta_1 UV.$$

Заметим, что в равенстве (39) значение второго определителя отличается знаком от первого определителя, в котором элементы u_1, u_2 заменены на p_1, p_2 соответственно. Тогда с учетом замечания получим оценку

$$M_{11}^2 \approx -\beta_1 hUV + \beta_1 h^2 PV \approx -\beta_1 hUV, \quad (40)$$

$$M_{13}^2 = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & 1 & s_1 & s_2 \\ H_{01} & 0 & 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & H_{11} & h & q_1 & q_2 \\ H_{02} & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & H_{12} & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx \beta_0\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & 1 & s_1 & s_2 \\ 1 & 0 & 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & \beta_1 & h & q_1 & q_2 \\ -h & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & -\beta_1 h & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \approx \beta_0\beta_1 UV, \quad (41)$$

$$M_{12}^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & s_1 & s_2 \\ H_{01} & h & 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & h & q_1 & q_2 \\ H_{02} & \frac{h^2}{2} & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \approx -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & s_1 & s_2 \\ \beta_0 & h & 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & h & q_1 & q_2 \\ -\beta_0 h & \frac{h^2}{2} & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{3}{2}\beta_0 h^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & s_1 & s_2 \\ 1 & 0 & 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & h & q_1 & q_2 \\ -h & 1 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \approx \frac{3}{2}\beta_0 h^2 QV, \quad (42)$$

$$M_{14}^2 = -\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & s_1 & s_2 \\ H_{01} & 0 & h & p_1 & p_2 \\ 0 & H_{11} & 0 & q_1 & q_2 \\ H_{02} & 0 & \frac{h^2}{2} & u_1 & u_2 \\ 0 & H_{12} & 0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx -\frac{3}{2}\beta_0 h^2 \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & s_1 & s_2 \\ 1 & 0 & 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & \beta_1 & 0 & q_1 & q_2 \\ -h & 0 & 1 & u_1 & u_2 \\ 0 & -\beta_1 h & 0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \approx -\frac{3}{2}\beta_0 h^2(\alpha_1 QV - \beta_1 SV), \quad (43)$$

$$M_{15}^2 = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 1 & s_2 \\ H_{01} & 0 & h & 0 & p_2 \\ 0 & H_{11} & 0 & h & q_2 \\ H_{02} & 0 & \frac{h^2}{2} & 0 & u_2 \\ 0 & H_{12} & 0 & \frac{h^2}{2} & v_2 \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx \frac{3}{2}\beta_0 h^2 \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 1 & s_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & \beta_1 & 0 & h & q_2 \\ -h & 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & -\beta_1 h & 0 & h^2 & v_2 \end{vmatrix} \approx -\frac{3}{2}\beta_0\beta_1 h^2 v_2. \quad (44)$$

При точном вычислении соответствующих определителей результаты оценок значений алгебраических дополнений совпали с полученными выше оценками (40)—(44); указанный факт является прямым следствием принятого выше допущения о главных частях в разложениях алгебраических дополнений по степеням h.

С учетом оценок (40)—(44) запишем величину невязки (38):

$$\delta f_{1h,\mathrm{III}}^{k0} \approx -\frac{2\beta_1 hUV(\alpha_0 R_{x,0}^k + \beta_0 R_{x,0}^{k-1}) - 2\beta_0\beta_1 UVR_{x,0}^k}{3\beta_0\beta_1 h^2 v_2} -$$
$$- \frac{-\beta_0 h^2 QV(\alpha_1 R_{y,0}^k + \beta_1 R_{y,0}^{k-1}) + \beta_0 h^2(\alpha_1 QV - \beta_1 SV)R_{y,0}^k}{\beta_0\beta_1 h^2 v_2} =$$
$$= O(h^k) + O(h^{k-1}) + O(h^{k-1}) + O(h^{k+1}) + O(h^k) + O(h^{k+1}) = O(h^{k-1}) \quad (45)$$

для произвольного $k \geqslant 2$. Заметим, что главенствующую роль во вкладе в величину невязки $\delta f_{1h,\mathrm{III}}^{k0}$ играет функция x независимо от четности k. Оценка невязки $\delta f_{2h,\mathrm{III}}^{k0}$ оказалась схожей с тем лишь отличием, что главенствующую роль во вкладе в величину этой невязки играет функция y. Тогда, в соответствии с [2],

$$\|\delta f_{h,\mathrm{III}}^{k0}\| = \max\bigl(\|\delta f_{1h,\mathrm{III}}^{k0}\|, \|\delta f_{2h,\mathrm{III}}^{k0}\|\bigr) =$$
$$= \max\bigl(O(h^{k-1}), O(h^{k-1})\bigr) = O(h^{k-1}). \quad (46)$$

Выполненные расчеты показали совпадение главенствующих ролей функций x, y и оценок невязок задач (25) и (26):

$$\|\delta f_{h,\mathrm{III}}^{kn}\| = O(h^{k-1}). \tag{47}$$

Анализ оценки (45) показывает ее справедливость при $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, что соответствует граничным условиям второго рода (23). Сделанный вывод очевиден в силу того, что в оценке (45) слагаемые, обеспечивающие порядок $O(h^{k-1})$, содержат в качестве сомножителей произведения чисел β_0, β_1, которые отличны от нуля одновременно и не содержат α_0, α_1 в качестве сомножителей.

Вернемся к оценке порядка аппроксимации задачи (22). Определим итоговую норму невязки этой задачи в соответствии с [2] следующим образом:

$$\|\delta f_{h,\mathrm{III}}^{k}\| = \max\bigl(\|\delta f_{h,I}^{k}\|, \|\delta f_{h,\mathrm{III}}^{k0}\|, \|\delta f_{h,\mathrm{III}}^{kn}\|\bigr). \tag{48}$$

При вычислении порядка аппроксимации задачи (2) в [1] показана зависимость оценки нормы невязки от четности k:

– для четного k

$$\|\delta f_{h,I}^{k}\| = O(h^{k}), \tag{49}$$

– для нечетного k

$$\|\delta f_{h,I}^{k}\| = O(h^{k-1}). \tag{50}$$

Порядок аппроксимации той или иной разностной задачи будем компактно обозначать как $E\bigl(O(h^k)\bigr) = k$. Тогда оценка (49) для четного k дает

$$E_{\mathrm{I}}^{k} = k, \tag{51}$$

а оценка (50) для нечетного k —

$$E_{\mathrm{I}}^{k} = k - 1. \tag{52}$$

Из оценок (46), (47) имеем

$$E_{\mathrm{III}}^{k0} = E_{\mathrm{III}}^{kn} = k - 1. \tag{53}$$

Соотношения (48), (51)–(53) для задачи (22) для четного k дают оценку

$$E_{\mathrm{III}}^{k} = \min(k, k-1, k-1) = k - 1, \tag{54}$$

а для нечетного k —

$$E_{\mathrm{III}}^{k} = \min(k-1, k-1, k-1) = k - 1,$$

т. е. порядок аппроксимации задачи (22) оказался на единицу меньше степени k используемого многочлена Тейлора независимо от ее четности. Аналогичная ситуация имела место при исследовании краевых задач для одного ОДУ2 с граничными условиями второго или третьего рода [5].

Из (48) для четного k и (54) видно, что, повысив порядок аппроксимации на единицу в граничных узлах t_0, t_n, тем самым повысим порядок аппроксимации всей задачи $L^k_{h,\mathrm{III}}$ на единицу.

3. Метод повышения порядка аппроксимации разностной краевой задачи с граничными условиями второго и третьего рода для четного k. Метод повышения порядка аппроксимации разностной краевой задачи с граничными условиями второго и третьего рода рассмотрим на примере задачи $L^2_{h,\mathrm{III}}$.

При составлении локальной матрицы A^{20} используем дифференциальные уравнения системы (1), записанные в узле t_1, вместо приближенных равенств (4), (5), (7), (8) используем точные равенства (27)–(30), положив в них $k = 3$. В итоге получим систему

$$
\begin{cases}
\alpha_0[x_1] + H_{01}[x_1'] + H_{02}[x_1''] + H_{03}[x_1'''] = \widetilde{x}_0 - \alpha_0 R^3_{x,0} - \beta_0 R^2_{x,0},\\
\alpha_1[y_1] + H_{11}[y_1'] + H_{12}[y_1''] + H_{13}[y_1'''] = \widetilde{y}_0 - \alpha_1 R^3_{y,0} - \beta_1 R^2_{y,0},\\
[x_1] + h[x_1'] + \dfrac{h^2}{2!}[x_1''] + \dfrac{h^3}{3!}[x_1'''] = [x_0] - R^3_{x,0},\\
[y_1] + h[y_1'] + \dfrac{h^2}{2!}[y_1''] + \dfrac{h^3}{3!}[y_1'''] = [y_0] - R^3_{y,0},\\
r_{11}[x_1] + s_{11}[y_1] + p_{11}[x_1'] + q_{11}[y_1'] + u_{11}[x_1''] + v_{11}[y_1''] = f_{11},\\
r_{21}[x_1] + s_{21}[y_1] + p_{21}[x_1'] + q_{21}[y_1'] + u_{21}[x_1''] + v_{21}[y_1''] = f_{21}.
\end{cases}
\tag{55}
$$

Отметим, что локальная матрица задачи (55) содержит шесть строк и восемь столбцов вследствие наличия в левых частях первых четырех уравнений третьих производных x''', y'''. Выразим третьи производные через производные меньших степеней.

Дифференциальные уравнения системы (1) запишем в форме

$$
\begin{cases}
u_1 x'' + v_1 y'' = z_1,\\
u_2 x'' + v_2 y'' = z_2,
\end{cases}
\tag{56}
$$

где $z_j = f_j - r_j x - s_j y - p_j x' - q_j y'$, $j = 1, 2$. Решение системы (56) относительно x'', y'' имеет вид

$$
x'' = \frac{ZV}{UV}, \quad y'' = \frac{z_1}{v_1} - \frac{u_1}{v_1}\frac{ZV}{UV},
\tag{57}
$$

где, например, определитель

$$
UV = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}
\tag{58}
$$

является функцией t, в отличие от определителя (35). Определитель ZV вычисляется аналогичной (58) формулой с заменой $U = [u_1\ u_1]^\top$ на $Z = [z_1\ z_2]^\top$.

Непосредственными вычислениями можно убедиться в справедливости равенств

$$\begin{gathered}(UV)' = U'V + UV',\\ \Big(\frac{PQ}{UV}\Big)' = \frac{(PQ)'UV - PQ(UV)'}{(UV)^2},\\ PU + PV = P(U+V),\\ PV + RV = (P+R)V,\end{gathered} \tag{59}$$

где, например, $P(U+V)$ — вычисляемый аналогичной (58) формулой определитель, в котором $(U+V) = [u_1+v_1 \; u_2+v_2]^\top$; $U' = [u'_1 \; u'_1]^\top$; $(UV)^2$ — квадрат определителя UV.

Вычисление производной по t с использованием формул (59) от обеих частей первого соотношения (57) дает точное равенство

$$x''' = L_0^x + L_1^x x + L_2^x y + L_3^x x' + L_4^x y' + L_5^x x'' + L_6^x y'', \tag{60}$$

где верхний индекс x в коэффициентах L_j^x, $j = 0, 1, \ldots, 6$, означает принадлежность этого коэффициента к третьей производной x''';

$$L_0^x = \frac{(FV)'}{UV} - \frac{(UV)'\,FV}{(UV)^2}, \quad L_1^x = -\frac{R\,(V+V')}{UV} + \frac{(UV)'\,RV}{(UV)^2},$$

$$L_2^x = -\frac{RV + PV'}{UV} + \frac{(UV)'\,PV}{(UV)^2}, \quad L_3^x = -PV,$$

$$L_4^x = -\frac{S\,(V+V')}{UV} + \frac{(UV)'\,SV}{(UV)^2}, \quad L_5^x = -\frac{SV + QV'}{UV} + \frac{(UV)'\,QV}{(UV)^2}, \quad L_6^x = -QV.$$

Аналогичное равенству (60) дает дифференцирование по t обеих частей второго соотношения в (57):

$$y''' = L_0^y + L_1^y x + L_2^y y + L_3^y x' + L_4^y y' + L_5^y x'' + L_6^y y''. \tag{61}$$

Заметим, что все коэффициенты L_j^x, L_j^y, $j = 0, 1, \ldots, 6$, равенств (60), (61) не зависят от h и являются лишь функциями t.

Подстановка в систему (55) точных равенств (60), (61), записанных в узле t_1, дает старшую степень производной функций x и y, равной двум в этой СЛАУ, матричную форму которой запишем как

$$A^{20}[W^{20}] = [G^{20}]$$

в обозначениях

$$A^{20} = \begin{bmatrix} \alpha_0 + KL_1^x & KL_2^x & I + KL_3^x & KL_4^x & J + KL_5^x & KL_6^x \\ NL_1^y & \alpha_1 + NL_2^y & NL_3^y & L + NL_4^y & NL_5^y & M + NL_6^y \\ \dfrac{h^3}{3!}L_1^x + 1 & \dfrac{h^3}{3!}L_2^x & \dfrac{h^3}{3!}L_3^x + h & \dfrac{h^3}{3!}L_4^x & \dfrac{h^3}{3!}L_5^x + \frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{3!}L_6^x \\ \dfrac{h^3}{3!}L_1^y & \dfrac{h^3}{3!}L_2^y + 1 & \dfrac{h^3}{3!}L_3^y & \dfrac{h^3}{3!}L_4^y + h & \dfrac{h^3}{3!}L_5^y & \frac{h^3}{3!}L_6^y + \frac{h^2}{2} \\ r_1 & s_1 & p_1 & q_1 & u_1 & v_1 \\ r_2 & s_2 & p_2 & q_2 & u_2 & v_2 \end{bmatrix},$$

$$[W^{20}] = \begin{bmatrix} [x_1] \\ [y_1] \\ [x_1'] \\ [y_1'] \\ [x_1''] \\ [y_1''] \end{bmatrix}, \quad [G^{20}] = \begin{bmatrix} \widetilde{x}_0 - \alpha_0 R^3_{x,0} - \beta_0 R^2_{x,0} - KL^x_0 \\ \widetilde{y}_0 - \alpha_1 R^3_{y,0} - \beta_1 R^2_{y,0} - NL^y_0 \\ [x_0] - R^3_{x,0} - \dfrac{h^3}{3!} L^x_0 \\ [y_0] - R^3_{y,0} - \dfrac{h^3}{3!} L^y_0 \\ f_{11} \\ f_{21} \end{bmatrix},$$

где с использованием (10) принято $I = H_{01}$, $J = H_{02}$, $K = H_{03}$, $L = H_{11}$, $M = H_{12}$, $N = H_{13}$. Отметим, что локальная матрица A^{20} теперь содержит шесть строк и шесть столбцов.

В предположении существования обратной матрицы $B^{20} = (A^{20})^{-1}$ от матрицы A^{20} найдем

$$B^{20}[G^{20}] = [W^{20}].$$

Выпишем первые два уравнения последнего матричного равенства:

$$b^{20}_{11}\left(\widetilde{x}_0 - \alpha_0 R^3_{x,0} - \beta_0 R^2_{x,0} - KL^x_0\right) + b^{20}_{12}\left(\widetilde{y}_0 - \alpha_1 R^3_{y,0} - \beta_1 R^2_{y,0} - NL^y_0\right) +$$
$$+ b^{20}_{13}\left([x_0] - R^3_{x,0} - \frac{h^3}{3!}L^x_0\right) + b^{20}_{14}\left([y_0] - R^3_{y,0} - \frac{h^3}{3!}L^y_0\right) + b^{20}_{15} f_{11} + b^{20}_{16} f_{21} = [x_1],$$
$$b^{20}_{21}\left(\widetilde{x}_0 - \alpha_0 R^3_{x,0} - \beta_0 R^2_{x,0} - KL^x_0\right) + b^{20}_{22}\left(\widetilde{y}_0 - \alpha_1 R^3_{y,0} - \beta_1 R^2_{y,0} - NL^y_0\right) +$$
$$+ b^{20}_{23}\left([x_0] - R^3_{x,0} - \frac{h^3}{3!}L^x_0\right) + b^{20}_{24}\left([y_0] - R^3_{y,0} - \frac{h^3}{3!}L^y_0\right) + b^{20}_{25} f_{11} + b^{20}_{26} f_{21} = [y_1].$$

Здесь b^{20}_{jm}, $j = 1, 2$ — элементы матрицы B^{20}. Эти же уравнения после преобразований будут иметь вид

$$- \frac{b^{20}_{13}}{b^{20}_{15}}[x_0] - \frac{b^{20}_{14}}{b^{20}_{15}}[y_0] + \frac{[x_1]}{b^{20}_{15}} = \frac{b^{20}_{11}}{b^{20}_{15}}\widetilde{x}_0 + \frac{b^{20}_{12}}{b^{20}_{15}}\widetilde{y}_0 +$$
$$+ f_{11} + \frac{b^{20}_{16}}{b^{20}_{15}} f_{21} - \frac{L^x_0\left(6b^{20}_{11}K + b^{20}_{13}h^3\right) + L^y_0\left(6b^{20}_{12}N + b^{20}_{14}h^3\right)}{6b^{20}_{15}} -$$
$$- \frac{b^{20}_{11}\left(\alpha_0 R^3_{x,0} + \beta_0 R^2_{x,0}\right) + b^{20}_{13} R^3_{x,0}}{b^{20}_{15}} - \frac{b^{20}_{12}\left(\alpha_1 R^3_{y,0} + \beta_1 R^2_{y,0}\right) + b^{20}_{14} R^3_{y,0}}{b^{20}_{15}}, \quad (62)$$

$$\frac{b^{20}_{23}}{b^{20}_{26}}[x_0] - \frac{b^{20}_{24}}{b^{20}_{26}}[y_0] + \frac{[y_1]}{b^{20}_{26}} = \frac{b^{20}_{21}}{b^{20}_{26}}\widetilde{x}_0 + \frac{b^{20}_{22}}{b^{20}_{26}}\widetilde{y}_0 +$$
$$+ \frac{b^{20}_{25}}{b^{20}_{26}} f_{11} + f_{21} - \frac{L^x_0\left(6b^{20}_{21}K + b^{20}_{23}h^3\right) + L^y_0\left(6b^{20}_{22}N + b^{20}_{24}h^3\right)}{6b^{20}_{26}} -$$
$$- \frac{b^{20}_{21}\left(\alpha_0 R^3_{x,0} + \beta_0 R^2_{x,0}\right) + b^{20}_{23} R^3_{x,0}}{b^{20}_{26}} - \frac{b^{20}_{22}\left(\alpha_1 R^3_{y,0} + \beta_1 R^2_{y,0}\right) + b^{20}_{24} R^3_{y,0}}{b^{20}_{26}}. \quad (63)$$

Две последние дроби в равенствах (62), (63) характеризуют величины невязок в узле t_0, причем, как и ранее, первая из них характеризует величину невязки, появление которой обусловлено функцией x, вторая — функцией y. Заметим, что две последние дроби в равенствах (62), (63) совпали по форме с невязками (33), (34) задачи (25) при $k = 3$.

Вычислим оценки алгебраических дополнений, останавливаясь лишь на их главных частях, первых пяти элементов первой строки матрицы $\left(A^{20}\right)^{\top}$, упрощенной указанным выше способом. Имеем

$$M_{11}^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \frac{h^3}{3!}L_2^x & 1 & s_1 & s_2 \\ \beta_1\frac{h^2}{2}L_3^y & h & \frac{h^3}{3!}L_3^y & p_1 & p_2 \\ \beta_1 & \frac{h^3}{3!}L_4^x & h & q_1 & q_2 \\ \beta_1\frac{h^2}{2}L_5^y & \frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{3!}L_5^y & u_1 & u_2 \\ -\beta_1 h & \frac{h^3}{3!}L_6^x & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \approx$$
$$\approx (-1)^{\gamma_1} m_{13}m_{22}m_{31}m_{44}m_{55} + (-1)^{\gamma_2} m_{13}m_{22}m_{31}m_{45}m_{54} =$$
$$= -\beta_1 h u_1 v_2 + \beta_1 h u_2 v_1 = -\beta_1 h\left(u_1v_2 - u_2v_1\right) = -\beta_1 hUV, \quad (64)$$

где UV определяется формулой (35) с последующим допущением для нее об индексе 0; m_{ij} — элементы определителя M_{11}^2, $i, j = 1, 2, \ldots, 5$; γ_1, γ_2 — число инверсий в парах вторых индексов сомножителей в произведениях первого и второго слагаемых соответственно, при условии, что первые индексы сомножителей в произведениях расположены по возрастанию [6];

$$M_{13}^2 = \begin{vmatrix} \beta_0\frac{h^2}{2}L_2^x & \alpha_1 & 1 & s_1 & s_2 \\ \beta_0 & \beta_1\frac{h^2}{2}L_3^y & \frac{h^3}{3!}L_3^y & p_1 & p_2 \\ \beta_0\frac{h^2}{2}L_4^x & \beta_1 & h & q_1 & q_2 \\ -\beta_0 h & \beta_1\frac{h^2}{2}L_5^y & \frac{h^3}{3!}L_5^y & u_1 & u_2 \\ \beta_0\frac{h^2}{2}L_6^x & -\beta_1 h & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \approx \beta_0\beta_1 UV, \quad (65)$$

$$M_{12}^2 = -\begin{vmatrix} \beta_0\frac{h^2}{2}L_2^x & \frac{h^3}{3!}L_2^x & 1 & s_1 & s_2 \\ \beta_0 & h & \frac{h^3}{3!}L_3^y & p_1 & p_2 \\ \beta_0\frac{h^2}{2}L_4^x & \frac{h^3}{3!}L_4^x & h & q_1 & q_2 \\ -\beta_0 h & \frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{3!}L_5^y & u_1 & u_2 \\ \beta_0\frac{h^2}{2}L_6^x & \frac{h^3}{3!}L_6^x & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$
$$= -\beta_0 h\begin{vmatrix} \frac{h^2}{2}L_2^x & -\frac{h^2}{3}L_2^x & 1 & s_1 & s_2 \\ 1 & 0 & \frac{h^3}{3!}L_3^y & p_1 & p_2 \\ \frac{h^2}{2}L_4^x & -\frac{h^2}{3}L_4^x & h & q_1 & q_2 \\ -h & \frac{3h}{2} & \frac{h^3}{3!}L_5^y & u_1 & u_2 \\ \frac{h^2}{2}L_6^x & -\frac{h^2}{3}L_6^x & \frac{h^2}{2} & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \approx \frac{3}{2}\beta_0 h^2 QV, \quad (66)$$

$$M_{14}^2 = -\begin{vmatrix} \beta_0\frac{h^2}{2}L_2^x & \alpha_1 & \frac{h^3}{3!}L_2^x & s_1 & s_2 \\ \beta_0 & \beta_1\frac{h^2}{2}L_3^y & h & p_1 & p_2 \\ \beta_0\frac{h^2}{2}L_4^x & \beta_1 & \frac{h^3}{3!}L_4^x & q_1 & q_2 \\ -\beta_0 h & \beta_1\frac{h^2}{2}L_5^y & \frac{h^2}{2} & u_1 & u_2 \\ \beta_0\frac{h^2}{2}L_6^x & -\beta_1 h & \frac{h^3}{3!}L_6^x & v_1 & v_2 \end{vmatrix} \approx -\frac{3}{2}\beta_0 h^2\left(\alpha_1 QV - \beta_1 SV\right), \quad (67)$$

$$M_{15}^2 = \begin{vmatrix} \beta_0 \frac{h^2}{2} L_2^x & \alpha_1 & \frac{h^3}{3!} L_2^x & 1 & s_2 \\ \beta_0 & \beta_1 \frac{h^2}{2} L_3^y & h & \frac{h^3}{3!} L_3^y & p_2 \\ \beta_0 \frac{h^2}{2} L_4^x & \beta_1 & \frac{h^3}{3!} L_4^x & h & q_2 \\ -\beta_0 h & \beta_1 \frac{h^2}{2} L_5^y & \frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{3!} L_5^y & u_2 \\ \beta_0 \frac{h^2}{2} L_6^x & -\beta_1 h & \frac{h^3}{3!} L_6^x & \frac{h^2}{2} & v_2 \end{vmatrix} \approx -\frac{3}{2} \beta_0 \beta_1 h^2 v_2. \qquad (68)$$

Очевидные соотношения (37), при построении которых использованы приближенные равенства (64)–(68), дают оценку невязки из равенства (62) в форме

$$\begin{aligned} \delta f_{1h,\mathrm{III}}^{20} \approx & -\frac{2\beta_1 h UV(\alpha_0 R_{x,0}^3 + \beta_0 R_{x,0}^2) - 2\beta_0\beta_1 UV R_{x,0}^3}{3\beta_0\beta_1 h^2 v_2} - \\ & - \frac{-\beta_0 h^2 QV(\alpha_1 R_{y,0}^3 + \beta_1 R_{y,0}^2) + \beta_0 h^2(\alpha_1 QV - \beta_1 SV) R_{y,0}^3}{\beta_0\beta_1 h^2 v_2} = \\ & = O(h^3) + O(h^2) + O(h^2) + O(h^4) + O(h^3) + O(h^4) = O(h^2). \end{aligned} \qquad (69)$$

Заметим, что, как и ранее, главенствующую роль во вкладе в величину невязки $\delta f_{1h,\mathrm{III}}^{20}$ играет функция x. Оценка невязки $\delta f_{2h,\mathrm{III}}^{20}$ оказалась схожей с тем лишь отличием, что главенствующую роль во вкладе в величину этой невязки играет функция y. Тогда в соответствии с [2] имеем

$$\|\delta f_{h,\mathrm{III}}^{20}\| = O(h^2).$$

Выполненные расчеты показали совпадение оценок невязки задач $L_{h,\mathrm{III}}^{20}$ и $L_{h,\mathrm{III}}^{2n}$, т.е. оказалось, что

$$\|\delta f_{h,\mathrm{III}}^{2n}\| = O(h^2).$$

Следовательно, порядок аппроксимации рассматриваемой задачи $L_{h,\mathrm{III}}^2$ стал равным степени $k = 2$ используемого многочлена Тейлора.

Аналогичным образом может быть повышен порядок аппроксимации на единицу для любого четного значения k использованием операции дифференцирования обеих частей равенств (57) $k-1$ раз с последующей подстановкой результатов дифференцирования в многочлены Тейлора степени k в системе вида (55).

Анализ оценки (69) показывает ее справедливость при $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, что соответствует граничным условиям второго рода (23). Сделанный вывод очевиден в силу того, что в оценке (69) слагаемые, обеспечивающие порядок $O(h^2)$, содержат в качестве сомножителей произведения чисел β_0, β_1, которые отличны от нуля одновременно и не содержат α_0, α_1 в качестве сомножителей.

4. Оценка погрешностей. При выполнении численного эксперимента, как и в [1], использованы следующие нормы — в качестве суммарной оценки относительных погрешностей:

$$D_x^k = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - [x_i])^2}}{\sum_{i=0}^n \big|[x_i]\big|} 100\%, \quad D_y^k = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n (y_i - [y_i])^2}}{\sum_{i=0}^n \big|[y_i]\big|} 100\%, \qquad (70)$$

которые можно трактовать как некий аналог коэффициента вариации в статистике, характеризующий меру разброса в процентах [7]; и в качестве максимальной оценки абсолютных погрешностей [2,8]:

$$E_x^k = \max\bigl|x_i - [x_i]\bigr|, \quad E_y^k = \max\bigl|y_i - [y_i]\bigr|, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{71}$$

В качестве примера использована имеющая аналитическое решение система нелинейных ОДУ2 вида (1)

$$\begin{cases} x'' - tx' - \dfrac{t^2+2}{t^2}x - ty'' = 2t\cos t, \\ \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{x}{t} + y'' + \dfrac{t^2-4}{2t^2}y = -2t\sin t \end{cases} \tag{72}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} x(2\pi) + x'(2\pi) = 4\pi^2, & y(2\pi) + 2y'(2\pi) = 4\pi(\pi+2), \\ 3x(3\pi) + 2x'(3\pi) = -18\pi^2, & 2y(3\pi) + 3y'(3\pi) = -18\pi(\pi+1). \end{cases} \tag{73}$$

В вычислениях использовались следующие параметры сетки: $n = 15$, $h = 0.20944$. Расчеты выполнялись без использования метода повышения порядка аппроксимации. Результаты численного эксперимента для краевой задачи (72) с граничными условиями (73) приведены в табл. 1, 2.

Данные табл. 1 свидетельствуют об уменьшении погрешностей при увеличении числа k, что имело место при исследовании краевых задач для одного ОДУ2 [5,9].

В табл. 2 нормы $D_{x'}^k$, $D_{y'}^k$, $E_{x'}^k$, $E_{y'}^k$ для производных $x'(t)$, $y'(t)$ характеризуют суммарные оценки относительных погрешностей. Максимальные оценки абсолютных погрешностей, соответственно, вычислены по формулам (70), (71), в которых значения функций заменены на значения своих первых производных, найденным по формулам

$$b_{j1}^{ki}x_{i-1} + b_{j2}^{ki}y_{i-1} + b_{j3}^{ki}x_{i+1} + b_{j4}^{ki}y_{i+1} + b_{j5}^{ki}f_{1i} + b_{j6}^{ki}f_{2i} + \\ + \cdots + b_{j(2k+1)}^{ki}f_{1i}^{(k-2)} + b_{j(2k+2)}^{ki}f_{2i}^{(k-2)} = x_i^{((j-1)/2)}, \tag{74}$$

$$b_{(j+1)1}^{ki}x_{i-1} + b_{(j+1)2}^{ki}y_{i-1} + b_{(j+1)3}^{ki}x_{i+1} + b_{(j+1)4}^{ki}y_{i+1} + b_{(j+1)5}^{ki}f_{1i} \\ + b_{(j+1)6}^{ki}f_{2i} + \cdots + b_{(j+1)(2k+1)}^{ki}f_{1i}^{(k-2)} + b_{(j+1)(2k+2)}^{ki}f_{2i}^{(k-2)} = y_i^{((j-1)/2)}, \tag{75}$$

$i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 3, 5, \ldots, 2k+1$, полученным в [1]. Первые производные в левой границе $t_0 = a$ области интегрирования вычислены с помощью равенств (5), (8), в которых использованы результаты вычислений производных по формулам (74), (75) при $i = 1$, $j = 3, 5, \ldots, 2k+1$. Выполнение в правой границе $t_n = b$ преобразований, аналогичных преобразованиям в левой границе, позволило вычислить первые производные x_n', y_n'.

Таблица 1

Значения погрешностей для решения краевой задачи (72), (73) [The values of the errors for the solution of the boundary value problem (72), (73)]

k	2	3	4	5	6	7
$D_x^k, \%$	$4.83 \cdot 10^{-1}$	$1.35 \cdot 10^{-1}$	$2.64 \cdot 10^{-3}$	$3.93 \cdot 10^{-4}$	$8.29 \cdot 10^{-5}$	$8.70 \cdot 10^{-5}$
$D_y^k, \%$	$7.01 \cdot 10^{-1}$	$3.52 \cdot 10^{-1}$	$2.51 \cdot 10^{-3}$	$2.56 \cdot 10^{-4}$	$8.10 \cdot 10^{-5}$	$8.18 \cdot 10^{-5}$
E_x^k	1.03	$4.50 \cdot 10^{-1}$	$5.72 \cdot 10^{-3}$	$7.65 \cdot 10^{-4}$	$1.66 \cdot 10^{-4}$	$1.72 \cdot 10^{-4}$
E_y^k	1.52	$6.54 \cdot 10^{-1}$	$5.80 \cdot 10^{-3}$	$7.24 \cdot 10^{-4}$	$1.50 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2

Значения погрешностей для первых производных решения краевой задачи (72), (73) [The values of the errors for the first derivatives of the boundary value problem (72), (73)]

k	2	3	4	5	6	7
$D_{x'}^k, \%$	$8.05 \cdot 10^{-1}$	$1.06 \cdot 10^{-1}$	$3.60 \cdot 10^{-3}$	$2.48 \cdot 10^{-4}$	$7.87 \cdot 10^{-5}$	$8.16 \cdot 10^{-5}$
$D_{y'}^k, \%$	$6.64 \cdot 10^{-1}$	$1.39 \cdot 10^{-1}$	$3.03 \cdot 10^{-3}$	$2.94 \cdot 10^{-4}$	$6.18 \cdot 10^{-5}$	$6.52 \cdot 10^{-5}$
$E_{x'}^k$	1.33	$2.28 \cdot 10^{-1}$	$6.06 \cdot 10^{-3}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$	$1.44 \cdot 10^{-4}$	$1.50 \cdot 10^{-4}$
$E_{y'}^k$	1.53	$4.33 \cdot 10^{-1}$	$7.03 \cdot 10^{-3}$	$7.65 \cdot 10^{-4}$	$1.38 \cdot 10^{-4}$	$1.44 \cdot 10^{-4}$

Практически аналогичный характер изменения погрешностей (динамика и абсолютные значения) имел место для ряда систем ОДУ2, в частности для системы

$$\begin{cases} (1+t)x'' + 2x + ty'' - 2y = 2\sin 2t, \\ x'' + 2x - 2ty' = 2(1+t^2)\sin 2t, \end{cases}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} x(2\pi) + x'(2\pi) = 0, & y(2\pi) + 2y'(2\pi) = 2(\pi+1), \\ 3x(3\pi) + 2x'(3\pi) = 0, & 2y(3\pi) + 3y'(3\pi) = 3(2\pi+1). \end{cases}$$

Данные табл. 1 указывают на линейную зависимость порядка аппроксимации задачи $L_{h,\mathtt{III}}^k$ от степени k используемого многочлена Тейлора. Эта зависимость отсутствует для задачи $L_{h,\mathtt{I}}^k$, подтверждение чему приведено в [1].

Заключение. По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы.

1. Теоретически выявлены закономерности между порядком аппроксимации матричного метода и степенью k используемого многочлена Тейлора в разностных краевых задачах для систем линейных ОДУ2 с граничными условиями второго и третьего рода. Установлено следующее:
   а) порядок аппроксимации пропорционален используемой степени многочлена Тейлора и меньше этой степени, независимо от ее четности, на единицу;
   б) при четной степени порядок аппроксимации в граничных точках области интегрирования на единицу меньше порядка аппроксимации во внутренних точках;
   в) при нечетной степени порядки аппроксимации в граничных точках и во внутренних точках области интегрирования совпадают и меньше этой степени на единицу.

2. Главенствующую роль во вкладах в величины невязок $\delta f^{k0}_{1h,\mathrm{III}}$, $\delta f^{kn}_{1h,\mathrm{III}}$ играет функция x; главенствующую роль во вкладах в величины невязок $\delta f^{k0}_{2h,\mathrm{III}}$, $\delta f^{kn}_{2h,\mathrm{III}}$ играет функция y.
3. Для четной степени используемого многочлена Тейлора дан метод повышения порядка аппроксимации на единицу в граничных точках области интегрирования до порядка аппроксимации во внутренних точках.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Сообщение 1. Краевые задачи с граничными условиями первого рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 3. С. 389–409. doi: 10.14498/vsgtu1511.
2. Годунов С. К., Рябенький В. С. *Разностные схемы.* М.: Наука, 1977. 439 с.
3. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1977. 656 с.
4. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
5. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 36. С. 143–160. doi: 10.14498/vsgtu1364.
6. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры.* М.: Наука, 1975. 431 с.
7. Закс Л. *Статистическое оценивание.* М.: Статистика, 1976. 598 с.
8. Формалеев В. Ф., Ревизников Д. Л. *Численные методы.* М.: Физматлит, 2004. 400 с.
9. Радченко В. П., Усов А. А. Модификация сеточных методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на основе тейлоровских разложений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 60–65. doi: 10.14498/vsgtu646.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 55–79
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1528

MSC: 34B99

The evaluation of the order of approximation of the matrix method for numerical integration of the boundary value problems for systems of linear non-homogeneous ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. Message 2. Boundary value problems with boundary conditions of the second and third kind

V. N. Maklakov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

We present the second message of the cycle from two articles where the rearrangement of the order of approximation of the matrix method of numerical integration depending on the degree in the Taylor's polynomial expansion of solutions of boundary value problems for systems of ordinary differential equations of the second order with variable coefficients with boundary conditions of the second kind were investigated.

Using the Taylor polynomial of the second degree at the approximation of derivatives by finite differences leads to the second order of approximation of the traditional method of nets in inner points of the integration domain. In the study of boundary value problems for systems of ordinary differential equations of the second order we offer the previously proposed method of numerical integration with the use of matrix calculus where the approximation of derivatives by finite differences was not performed. According to this method a certain degree of Taylor polynomial can be selected at random for the construction of the difference equations system. The disparity is calculated and the order of the method of approximation is assessed depending on the chosen degree of Taylor polynomial.

It is theoretically shown that

a) for the boundary value problem with boundary conditions of the second and third kind the order of approximation is linearly proportional to the Taylor polynomial used and less than this level by 1 without regard to its parity;

Research Article

Please cite this article in press as:
Maklakov V. N. The evaluation of the order of approximation of the matrix method for numerical integration of the boundary value problems for systems of linear non-homogeneous ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. Message 2. Boundary value problems with boundary conditions of the second and third kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 55–79. doi: 10.14498/vsgtu1528 (In Russian).

Author's Details:
Vladimir N. Maklakov http://orcid.org/0000-0003-1644-7424
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Hight Mathematics & Applied Computer Science; e-mail: makvo63@yandex.ru

b) at even degree the order of approximation at boundary points of the integration domain is less by 1 than the order of approximation of the inner points;
c) at uneven degree the orders of approximation at boundary points and in inner points of the integration domain are the same and less than this level by 1.

For even degree the method of increasing of the order of approximation by 1 at boundary points of the integration domain to the order of approximation in inner points is performed. The theoretical conclusions are confirmed by a numerical experiment for boundary value problems with boundary conditions of the third kind.

Keywords: ordinary differential equations, boundary value problems, boundary conditions of the first, second and third types, order of approximation, numerical methods, Taylor polynomials.

Received: 21st January, 2017 / Revised: 3rd March, 2017 / Accepted: 13th March, 2017 / First online:

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any sponsorship.

References

1. Maklakov V. N. The evaluation of the order of approximation of the matrix method for numerical integration of the boundary value problems for systems of linear non-homogeneous ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. Message 1. Boundary value problems with boundary conditions of the first kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 389–409 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1511.
2. Godunov S. K., Ryaben'kii V. S. *Raznostnye skhemy* [Difference Scheme]. Moscow, Nauka, 1977, 439 pp. (In Russian)
3. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977, 656 pp. (In Russian)
4. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniia* [Course of Differential and Integral Calculus], vol. 1. Moscow, Nauka, 1970, 608 pp. (In Russian)
5. Maklakov V. N. Estimation of the Order of the Matrix Method Approximation of Numerical Integration of Boundary-Value Problems for Inhomogeneous Linear Ordinary Differential Equations of the Second Order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 36, pp. 143–160 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1364.
6. Kurosh A. G. *Kurs vysshei algebry* [A Course of Higher Algebra]. Moscow, Nauka, 1975, 431 pp. (In Russian)
7. Zaks L. *Statisticheskoe otsenivanie* [Statistical estimation]. Moscow, Statistika, 1976, 598 pp. (In Russian)
8. Formaleev V. F., Reviznikov D. L. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 400 pp. (In Russian)
9. Radchenko V. P., Usov A. A. Modified grid method for solving linear differential equation equipped with variable coefficients based on Taylor series, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2008, no. 2(17), pp. 60–65 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu646.