

УДК 539.378

КРИВЫЕ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ ТИПА МАКСВЕЛЛА И ПРАВИЛО СУММИРОВАНИЯ ПОВРЕЖДЕННОСТИ ПРИ СТУПЕНЧАТЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

*А. В. Хохлов*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики,
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

Аннотация

Исследуется нелинейное определяющее соотношение типа Максвелла для вязкоупругопластичных материалов с двумя произвольными материальными функциями одного аргумента с целью выявления арсенала его возможностей и области применимости, в частности, возможности подключения к нему критериев для описания разрушения при ползучести с постоянным или кусочно-постоянным напряжением. При минимальных первичных ограничениях на материальные функции выведены уравнения теоретических кривых длительной прочности, порожденных соотношением типа Максвелла в сочетании с деформационными и энергетическим (диссипативным) критериями разрушения, а также с интегральными критериями, учитывающими историю деформирования. Аналитически изучены и сопоставлены общие свойства этих кривых. Показано, что они адекватно описывают типичные свойства экспериментальных кривых длительной прочности вязкоупругопластических материалов. Для найденных зависимостей времен разрушения от напряжения проверено выполнение правила линейного накопления поврежденности при ступенчатом нагружении и выведены формулы для величины (и знака) отклонений от него. В частности доказано, что для нелинейного соотношения типа Максвелла в сочетании с диссипативным критерием разрушения всегда в точности выполняется правило линейного накопления поврежденности при любом ступенчатом нагружении, а для деформационного критерия оно, наоборот, никогда не выполняется, но дает оценку сверху или снизу для времени разрушения в зависимости от знака скачка напряжения.

Ключевые слова: вязкоупругопластичность, кривые ползучести, поврежденность, критерии разрушения, диссипация, время разрушения, кривые длительной прочности, сверхпластичность.

© 2016 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования

Хохлов А. В. Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования поврежденности при ступенчатых нагружениях // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 3. С. 524–543. doi: [10.14498/vsgtu1512](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1512).

Сведения об авторах

Андрей Владимирович Хохлов (к.т.н; andrey-khokhlov@ya.ru), старший научный сотрудник, лаб. упругости и пластичности.

Введение. Надежное моделирование кривых длительной прочности (КДП) материала или элемента конструкции по результатам испытаний на ползучесть при высоких напряжениях необходимо для оценки срока безопасной эксплуатации при низких напряжениях, когда время разрушения слишком велико, чтобы можно было получить экспериментальную информацию о нем.

Для прогнозирования длительной прочности материалов к выбранному (построенному) определяющему соотношению (ОС) необходимо добавить критерий разрушения (КР), задающий момент разрушения t_* (обрыва кривых ползучести) по достижению критических значений некоторой меры поврежденности (скалярной, векторной или тензорной [1–7]). Желательно, чтобы КР и ОС хорошо взаимодействовали, то есть позволяли вывести общее уравнение теоретической кривой ползучести $\varepsilon = \varepsilon(t; \sigma, T)$ и КДП $t_* = f(\sigma, T)$ (или $\sigma = F(t_*, T)$), где t_* — время разрушения при данном уровне напряжения σ и температуре T , *аналитически* исследовать в общем виде зависимость свойств КДП от материальных функций и параметров ОС и КР и указать ограничения на них, обеспечивающие совпадение качественных свойств теоретических КДП с типичными свойствами экспериментальных КДП.

Эта (идеальная) программа реализована в работах [8–11 и др.] для линейного ОС вязкоупругости, нелинейного ОС Ю. Н. Работнова и двух нелинейных ОС, построенных и исследованных в [8, 9] (каждое из перечисленных нелинейных ОС содержит две материальные функции одного аргумента в одноосном случае и несколько параметров). Эти ОС нацелены на описание комплекса основных механических эффектов, типичных для вязкоупругопластичных материалов, обладающих выраженной наследственностью и высокой чувствительностью к скорости деформирования (полимеры, твердое топливо, асфальтобетон, композиты, пены, титановые и алюминиевые сплавы, углеродные и керамические материалы при высоких температурах, связки, сухожилия и другие биологические ткани и т.п.).

В данной работе эта программа реализована для нелинейного ОС типа Максвелла [12]:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e + \varepsilon_v, \quad \varepsilon_e = F(\sigma)/E, \quad \dot{\varepsilon}_v = V(\sigma)/\eta, \quad t > 0. \quad (1)$$

Оно связывает истории напряжения $\sigma(t)$ и деформации $\varepsilon(t)$ в точке тела и содержит две материальные функции (МФ) $F(x)$ и $V(x)$ и две постоянные $E > 0$, $\eta > 0$ (см. подробнее п. 1). Ниже будут выведены и аналитически изучены уравнения теоретических кривых длительной прочности, порожденных ОС (1) в сочетании с деформационными и энергетическим КР, а также — с интегральными КР, учитывающими историю деформирования [10].

Классический деформационный критерий разрушения (ДКР) постулирует, что разрушение происходит в момент $t = t_*$, когда деформация $\varepsilon(t, \sigma)$ достигает критического значения ε_* :

$$\varepsilon(t_*, \sigma) = \varepsilon_*. \quad (2)$$

Он может описывать две разные ситуации: разрушение материала или элемента конструкции. Соответственно, ε_* обозначает либо материальную константу (зависящую только от температуры), либо предельную допустимую (по конструктивным соображениям) деформацию, рассчитанную по предель-

ному перемещению или напряжению (классический пример — разрушение турбины вследствие ползучести ее лопаток). В первом случае ДКР с постоянным $\varepsilon_* = \varepsilon_*(T)$ не всегда адекватен данным испытаний материалов на ползучесть: у многих материалов ε_* зависит от напряжения [1–7] (этот факт можно учесть, задавая $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\sigma)$ в (2)), причем эта зависимость может быть немонотонной [3, 4, 13, 14]. Во втором случае ДКР (2) адекватен «по определению», если конструктивный критерий срабатывает раньше, чем происходит разрушение материала.

В работе [10] предложены и исследованы два параметрических семейства скалярных критериев разрушения при монотонном одноосном деформировании, обобщающих ДКР (2), но учитывающих историю нарастания деформации и зависящих от характеристик кривых ползучести (они хранят информацию об условиях развития деформации и процессах, приводящих к разрушению). Их строение мотивировано желанием иметь арсенал более чутких и допускающих регулировку КР, позволяющих точнее описывать экспериментальные КДП различных материалов (или элементов конструкций) и учитывающих информацию, которой пренебрегает ДКР. Каждое из двух построенных в [10] семейств КР образует монотонную и непрерывную шкалу критериев (монотонно и непрерывно зависящих от параметра $u > 0$), включающую ДКР как предельный случай. При этом критерии первого семейства при всех $u > 0$ дают большее время разрушения, чем ДКР, критерии второго семейства при $u > 1$ — меньшее, а различие можно сделать сколь угодно малым за счет выбора значений управляющего параметра у края шкалы ($u \rightarrow \infty$ или $u = 1$).

Помимо КР, выраженных через меры поврежденности деформационного типа и их критические значения, уже полвека разрабатывается класс энергетических мер поврежденности и критериев разрушения, — например, в работах О. В. Соснина, А. Ф. Никитенко, Б. В. Горева, В. В. Федорова, В. П. Радченко [4, 14, 15–21 и др.] В частности в цикле нескольких десятков работ О. В. Соснина и его коллег предложена и экспериментально исследована (для титановых и алюминиевых сплавов) мера поврежденности, равная «удельной работе рассеяния» (то есть, удельной диссипации в точке тела), и КР, постулирующий, что разрушение материала наступает при достижении диссипацией $W(t, \sigma)$ критического значения $W_* = W_*(T)$ [15–18]:

$$W(t_*, \sigma) = W_*. \quad (3)$$

Основная цель данной статьи — аналитически исследовать общие свойства КДП $t_*(\sigma)$, порожденных ОС (1) в сочетании с КР (2) и (3), и доказать, что они совпадают с качественными свойствами типичных экспериментальных КДП вязкоупругопластических материалов. А именно: данные испытаний показывают, что КДП $t_*(\sigma)$ всегда убывают, $t_*(\sigma) \rightarrow +\infty$ при $\sigma \rightarrow \sigma_0$ и $t_*(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \sigma_*$, где $\sigma_0 \geq 0$ — порог ползучести, $\sigma_* > 0$ — предел мгновенной прочности σ_* . КДП многих материалов в координатах « $\lg \sigma - \lg t_*$ » представляются отрезком прямой линии с угловым коэффициентом $\mu < 0$ или двухзвенной ломаной. Это означает, что регистрируемые значения $t_*(\sigma_k)$ хорошо аппроксимируются (при достаточно больших напряжениях) степенной функцией

$$t_* = C\sigma^\mu,$$

где $\mu < 0$, $C > 0$, $\sigma > \sigma_0$, или двумя степенными функциями с различными показателями. Именно такими, как будет доказано, получаются и КДП, порожденные ОС (1) с указанными КР, при найденных ограничениях на МФ.

Вторая задача анализа — проверить, выполняется ли для теоретических КДП ОС (1) (для каких КР, при каких условиях на МФ) «закон» линейного накопления поврежденности при ступенчатых нагружениях, т.е. условие разрушения

$$S = 1,$$

где S — сумма парциальных времен:

$$S := \frac{t_*(i, \sigma) - t_{i-1}}{t_*(\sigma_i)} + \sum_{m=1}^{i-1} \frac{t_m - t_{m-1}}{t_*(\sigma_m)}, \quad (4)$$

i — число ступеней, $\sigma = \{(\sigma_m, t_m) \mid m = 1, \dots, i\}$, σ_m — уровни напряжений на интервалах $(t_{m-1}; t_m)$ ($t_0 = 0$, $t_i > t_{i-1}$), $t_*(i, \sigma)$ — время разрушения на ступени с $\sigma = \sigma_i$; $t_*(\sigma_i)$ — время разрушения при ползучести с постоянным напряжением σ_i . В многочисленных испытаниях разных материалов (сталей, алюминиевых сплавов, композитов и т.п.) на ползучесть до разрушения при двухступенчатом нагружении ($i = 2$) обнаружены значительные отклонения от условия $S = 1$ и два основных типа поведения материала [3, с. 117–119]:

- 1) $S > 1$ для любых $\sigma_1, \sigma_2 > 0$;
- 2) $S > 1$ при $\sigma_2 < \sigma_1$ и $S < 1$ при $\sigma_2 > \sigma_1$.

В данной работе выведены общие формулы для отклонения $S - 1$, порожденные ОС (1) в сочетании с разными КР, и исследован его знак в зависимости от знака разности $\sigma_2 - \sigma_1$.

1. Нелинейная модель типа Максвелла. Будем рассматривать изотермические одномерные процессы, характеризующиеся в точке тела историей напряжения $\sigma(t)$ и (логарифмической) деформации $\varepsilon(t)$, $t > 0$. Связь между процессами $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ зададим по аналогии с реологической моделью Максвелла (последовательным соединением линейных упругого и вязкого элементов), т.е. постулируем, что деформация $\varepsilon(t)$ представима суммой упругой и вязкопластической компонент, каждая из которых зависит от (безразмерного) напряжения $\sigma(t)$, но нелинейно. Это приводит к ОС (1); его можно записать в интегральной и дифференциальной формах:

$$\varepsilon(t) = E^{-1}F(\sigma(t)) + \eta^{-1} \int_0^t V(\sigma(\tau))d\tau, \quad (5)$$

или

$$\dot{\varepsilon} = E^{-1}(F'(\sigma)\dot{\sigma} + \tau_r^{-1}V(\sigma)), \quad t > 0,$$

где $\tau_r = \eta/E$ — время релаксации линейной модели Максвелла. ОС (5) содержит две МФ $F(x)$ и $V(x)$, $x \in (\omega_-; \omega_+)$, $\omega_- < 0$, $\omega_+ > 0$, и две постоянные: «модуль упругости» $E > 0$ и коэффициент вязкости $\eta > 0$. Параметры ω_+ и ω_- могут быть интерпретированы как пределы прочности при растяжении и сжатии. Параметры E и η выделены из МФ F и V для удобства сопоставления с линейной моделью Максвелла (получающейся при $V(x) = F(x) = x$) и учета влияния температуры в форме $E = E(T)$, $\eta = \eta(T)$ [22, 23]. Процессы $\sigma(t)$ предполагаются кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими (при

$t < 0$ считаем, что $\sigma = 0$). Обезразмеривание напряжения можно производить делением на cE , $c > 0$, или на характерное напряжение материала (предел упругости, ползучести, текучести, прочности и т.п.). Безразмерное время вводится делением на характерное время, например, на τ_r при фиксированной температуре (при таком масштабировании $\tau_r = 1$ и $\eta = E$ во всех последующих формулах при данной T).

МФ F определяет в (1) упругую деформацию $\varepsilon_e(\sigma)$. Поэтому первичные ограничения на $F(x)$ (естественные с точки зрения феноменологии и минимальные математические [23]) таковы: $F(x)$ — непрерывная кусочно-гладкая строго возрастающая функция на интервале $(\omega_-; \omega_+)$, такая, что $F(0) = 0$ (тогда $x F(x) > 0$, т.е. $\text{sgn } F(x) = \text{sgn } x$). Последние два условия обеспечивают совпадение знаков упругой деформации $\varepsilon_e(\sigma)$ и σ и соблюдение условия $\varepsilon_e(0) = 0$. Из строгого возрастания F следует возрастание $\varepsilon_e(\sigma)$ и существование обратной функции $f = F^{-1}$ на промежутке $(\underline{y}; \bar{y})$, где

$$\bar{y} := \sup F(x) = F(\omega_+ - 0), \quad \underline{y} := \inf F(x) = F(\omega_- + 0).$$

Функция вязкости $V(x)/\eta$ в ОС (1) регулирует чувствительность напряжения к скорости деформации, наследственные свойства, скорость диссипации, ползучести и накопления пластической деформации [22, 23]. Чем больше $|V(\sigma)|/\eta$, тем меньше вязкое сопротивление (больше $|\dot{\varepsilon}_v|$ и $|\dot{\varepsilon}|$ при том же σ) и тем ближе поведение моделируемого материала к поведению жидкости. Минимальные первичные ограничения на $V(x)$: $V(x)$ — непрерывная (нестрого) возрастающая функция на интервале $(\omega_-; \omega_+)$, такая, что $V(0) = 0$ (тогда $xV(x) \geq 0$).

Исследование кривых релаксации, ползучести и деформирования, порожденных ОС (5), показывает [22, 23], что следует различать два основных случая, в которых ОС (5) (моделируемый материал) ведет себя по-разному:

- 1) $|V(x)| > 0$ при $x \neq 0$;
- 2) $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-; \sigma_+] \subset (\omega_-; \omega_+)$, $\sigma_- \leq 0$, $\sigma_+ \geq 0$, $\sigma_+ \neq \sigma_-$.

Во втором случае при $\sigma \in [\sigma_-; \sigma_+]$ ОС (1) моделирует (нелинейно) упругое поведение материала, σ_- , σ_+ — пределы упругости материала при сжатии и растяжении (и пороги ползучести), а при $\sigma > \sigma_+$ (или $\sigma < \sigma_-$) начинают проявляться диссипативные и вязкопластические свойства. Для материалов с одинаковым поведением при растяжении и сжатии обе МФ в (5) должны быть нечетными.

Наложенные на МФ ОС (5) первичные ограничения обеспечивают, в частности, термодинамическую согласованность модели, т.е. положительность работы напряжений в любом процессе деформирования и неотрицательность диссипации (соблюдение диссипативного неравенства). Действительно, работа напряжений $\sigma(\tau)$ в процессе деформирования $\varepsilon(\tau)$, связанном с $\sigma(\tau)$ соотношением (5), выражается следующей формулой:

$$A = \int_0^t \sigma(\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau = \int_0^t E^{-1} \sigma F'(\sigma) \dot{\sigma} d\tau + \int_0^t kV(\sigma) \sigma d\tau = U + W,$$

$$U := E^{-1} \int_0^\sigma x F'(x) dx, \quad W = \eta^{-1} \int_0^t \sigma(\tau) V(\sigma(\tau)) d\tau, \quad (6)$$

где $U = U(\sigma)$ — энергия упругой деформации, $W = W[t; \sigma(\tau)]$ — диссипация. Энергия $U(\sigma)$ положительна и возрастает при $\sigma \neq 0$ в силу ограничения $F'(x) > 0$ ($U'(\sigma) = E^{-1}\sigma F'(\sigma) > 0$ при $\sigma > 0$). Скорость диссипации выражается формулой

$$\dot{W}(t) = \eta^{-1}\sigma(t)V(\sigma(t)).$$

В силу непрерывности МФ $V(x)$ и ограничения $xV(x) \geq 0$ при $x \neq 0$ справедливости неравенства $\dot{W}(t) \geq 0$ и $W(t) \geq 0$ при всех $t > 0$. Равенство $W(t_0) = 0$ возможно лишь в случае, когда $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-; \sigma_+] \subset (\omega_-; \omega_+)$ и $\sigma(\tau) \in [\sigma_-; \sigma_+]$ для всех $\tau < t_0$ (т.е. модуль напряжения не превышает пределов упругости).

Базовые свойства нелинейного оператора

$$\Pi : \sigma(t) \mapsto \varepsilon(t)$$

из ОС (5), вытекающие из общих ограничений на МФ F и V , и результаты исследования свойств теоретических квазистатических кривых (ползучести, релаксации, ступенчатой ползучести, деформирования при постоянных и кусочно-постоянных скоростях нагружения и деформирования и др.), порождаемых ОС (5) с произвольными МФ F , V , приведены в [12, 22, 23].

Нелинейное ОС (5) нацелено на описание комплекса основных реологических эффектов, типичных для материалов, обладающих наследственностью и высокой чувствительностью к скорости деформирования (таких как полимеры, их расплавы и растворы, композиты, твердое топливо, асфальтобетон, титановые и алюминиевые сплавы, углеродные и керамические материалы при высоких температурах и др.); материалов, имеющих выраженную стадию установившейся ползучести, «площадку текучести» на диаграмме деформирования и предел текучести, зависящий от скорости деформирования; материалов, проявляющих (в определенных состояниях и при определенных режимах деформирования) свойства как твердого тела, так и жидкости. В частности, ОС (5) (и его модификации) могут быть полезны для моделирования материалов в режимах сверхпластического деформирования [23].

Общая тензорная формулировка нелинейных ОС максвелловского типа для (больших деформаций) вязкоупругих сред, родственных ОС (5), описание кинематики, термодинамические аспекты и способы конкретизации ОС изучались в работах [24–29]. Внимание авторов было сосредоточено на описании поведения жидкостей, они обсуждали эксперименты и эффекты, присущие жидкостям (расплавам и растворам полимеров и т.п.), не рассматривали кривые ползучести, релаксации и деформирования, порождаемые ОС, не задавали многих вопросов, специфичных для механики деформируемого твердого тела.

Зафиксировав $F(x) = x$ и $V(x) = x|x|^{n-1}$, $n > 1$, в (5), получим трехпараметрическую модель с линейной упругостью и степенной вязкостью (будем ее называть полулинейной):

$$\dot{\varepsilon} = E^{-1}\dot{\sigma} + \eta^{-1}\sigma|\sigma|^{n-1}. \quad (7)$$

Модель (7) применялась, например, в работах [30, 31]. В статье [32] исследовались кривые ползучести и обратной ползучести параллельного соединения двух таких моделей с различными показателями n . Более подробный обзор

литературы и родственных моделей (в теории ползучести, сверхпластичности и реологии полимеров) приведен в [22, 23].

2. Кривые ползучести при постоянном и кусочно-постоянном напряжении. При $\sigma(t) = \bar{\sigma} = \text{const}$, $t > 0$, ОС (5) дает уравнение семейства кривых ползучести (КП):

$$\varepsilon(t, \bar{\sigma}) = kV(\bar{\sigma})t + E^{-1}F(\bar{\sigma}) \quad \text{или} \quad \varepsilon(t, \sigma) = E^{-1} (V(\bar{\sigma})\tau_r^{-1}t + F(\bar{\sigma})), \quad (8)$$

где $k := \eta^{-1}$, $\tau_r := \eta/E$. Если $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-; \sigma_+]$, $\sigma_- < 0$, $\sigma_+ > 0$, то при $\sigma \in [\sigma_-; \sigma_+]$ ОС (1) моделирует (нелинейно) упругое поведение материала и при $\bar{\sigma} \in [\sigma_-; \sigma_+]$ ползучесть отсутствует (пределы упругости на сжатие и растяжение совпадают с пределами ползучести). Если $V(\bar{\sigma}) \neq 0$, то все КП линейны по времени при $t > 0$, т.е. при любых МФ ОС (5) моделирует только ползучесть с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon}(t) = kV(\sigma)$. ОС (5) неспособно описывать стадии замедленной и ускоренной ползучести, а также ограниченную ползучесть (свойственную, например, многим полимерам). Так как $V(x) > 0$ при $x > 0$ и $V(x)$ возрастает, то КП (8) возрастает по t (при $\bar{\sigma} > 0$) и по $\bar{\sigma}$, что совпадает с типичными качественными свойствами экспериментальных КП структурно стабильных однородных материалов.

Выраженная стадия установившейся ползучести характерна для многих пластичных металлов (в частности, в состоянии сверхпластичности) и полимеров в вязкотекучем состоянии.

Любую программу нагружения из N ступеней

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i [h(t - t_{i-1}) - h(t - t_i)] + \sigma_N h(t - t_{N-1}),$$

где $\sigma_i \in (\omega_-; \omega_+)$ и $t_i > 0$ ($t_0 = 0$, $t_i > t_{i-1}$), оператор Π , задающий ОС (5), переводит в сумму откликов на каждую ступеньку [22]:

$$\varepsilon(t) = E^{-1} [V(\sigma_N)\tau_r^{-1}(t - t_{N-1}) + F(\sigma_N)] h(t - t_{N-1}) + \sum_{i=1}^{N-1} S(t - t_{i-1}; t_i - t_{i-1}, \sigma_i). \quad (9)$$

Здесь

$$S(t; t_s, \bar{\sigma}) := E^{-1} [V(\bar{\sigma})\tau_r^{-1}t + F(\bar{\sigma})] [h(t) - h(t - t_s)] + E^{-1}V(\bar{\sigma})t_s\tau_r^{-1}h(t - t_s)$$

— отклик на импульс напряжения $\bar{\sigma}$ с носителем $[0; t_s]$ (задающий кривую обратной ползучести [22]: $N = 2$, $\sigma_1 = \bar{\sigma}$, $\sigma_2 = 0$), $S(t - t_{i-1}; t_i - t_{i-1}, \sigma_i)$ — его сдвиги по времени на t_{i-1} . Так как все слагаемые кусочно линейны, то КП (9) кусочно-линейна и имеет на интервалах $(t_{i-1}; t_i)$, $i = 1, \dots, N$, вид

$$\varepsilon(t) = E^{-1} [V(\sigma_i)\tau_r^{-1}(t - t_{i-1}) + F(\sigma_i)] + p_{i-1}, \quad t \in (t_{i-1}; t_i), \quad (10)$$

$$p_{i-1} := E^{-1}\tau_r^{-1} \sum_{m=1}^{i-1} V(\sigma_m)(t_m - t_{m-1}), \quad i = 2, \dots, N. \quad (11)$$

Накопленная пластическая (необратимая) деформация (11) выражает влияние предыдущих $(i - 1)$ ступеней нагружения ($p_0 := 0$). Отклонение КП (10) при $t > t_{N-1}$ от обычной КП $\sigma(t) = \sigma_N h(t - t_{N-1})$ при мгновенном нагружении в момент $t = t_{N-1}$ (с нулевой предысторией) равно постоянной p_{N-1} . В общем случае $p_{N-1} \neq 0$, следовательно, ОС (5) не обладает свойством затухающей памяти. Скачки деформации в точках $t = t_i$, порожденные скачками напряжения $\sigma_{i+1} - \sigma_i$, равны $[F(\sigma_{i+1}) - F(\sigma_i)]/E$, скачки скорости ползучести $\dot{\varepsilon}(t)$ равны $kV(\sigma_{i+1}) - kV(\sigma_i)$. Общие свойства семейства КП (10) и условия моделирования рэтчетинга изучены в [22].

3. Кривые длительной прочности для деформационных критериев разрушения. Если к ОС (5) с произвольным пределом упругости $\sigma_+ \geq 0$ добавить деформационный КР (2), то время разрушения t_* при ползучести с постоянным напряжением (ниже будем для краткости обозначать постоянный уровень напряжения $\bar{\sigma}$ через σ), таким, что $\sigma > \sigma_+$ и $F(\sigma) < E\varepsilon_*$, находится из (8) и (2):

$$\eta^{-1}V(\sigma)t_* + E^{-1}F(\sigma) = \varepsilon_*,$$

т.е. КДП имеет вид

$$t_*(\sigma) = \tau_r [E\varepsilon_* - F(\sigma)]/V(\sigma), \quad \sigma \in (\sigma_+; f(E\varepsilon_*)), \quad (12)$$

где $\tau_r = \eta/E$, $f = F^{-1}$.

При $\sigma \in [0; \sigma_+]$ ползучести нет, при $F(\sigma) \geq E\varepsilon_*$ разрушение происходит в момент $t = 0$. КДП (12) определена при $\sigma \in (\sigma_+; f(E\varepsilon_*))$ и убывает (так как F и V возрастают), $t_* \rightarrow +\infty$ при $\sigma \rightarrow \sigma_+ + 0$ и $t_* \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow f(E\varepsilon_*) - 0$ (т.е. свойства КДП (12) совпадают с типичными качественными свойствами экспериментальных КДП).

Время разрушения $t_*(i, \sigma)$ при ползучести с кусочно-постоянным напряжением, если оно происходит на i -той ступени нагружения (тогда $\sigma_i > \sigma_+$, иначе деформация постоянна и разрушения быть не может), находится из (10) и (2):

$$\begin{aligned} kV(\sigma_i)(t_*(i, \sigma) - t_{i-1}) + F(\sigma_i)E^{-1} + p_{i-1} &= \varepsilon_*, \\ t_*(i, \sigma) - t_{i-1} &= \tau_r^{-1} [E\varepsilon_* - F(\sigma_i) - Ep_{i-1}]/V(\sigma_i). \end{aligned} \quad (13)$$

Проверим соблюдение «закона» линейного накопления поврежденности при ступенчатом нагружении, т.е. условия разрушения $S = 1$, где S — сумма парциальных времен (4) с учетом (12). В многочисленных испытаниях различных материалов на ползучесть до разрушения при двухступенчатом нагружении обнаружены значительные отклонения от условия $S = 1$ и два основных типа поведения материала [3, с. 117–119]:

- 1) $S > 1$ для любых $\sigma_1, \sigma_2 > 0$;
- 2) $S > 1$ при $\sigma_2 < \sigma_1$ и $S < 1$ при $\sigma_2 > \sigma_1$.

Если разрушение происходит на второй ступени нагружения (тогда $\sigma_2 > \sigma_+$), то при $i = 2$ из (13) находим

$$t_*(\sigma) - t_1 = \eta [\varepsilon_* - E^{-1}F(\sigma_2) - p_1]/V(\sigma_2), \quad p_1 = kV(\sigma_1)t_1,$$

а по (4) —

$$S := t_1/t_*(\sigma_1) + (t_*(\sigma) - t_1)/t_*(\sigma_2),$$

т.е.

$$S = \frac{t_1 V(\sigma_1)}{\eta [\varepsilon_* - E^{-1} F(\sigma_1)]} + \frac{\eta [\varepsilon_* - E^{-1} F(\sigma_2) - k V(\sigma_1) t_1]}{\eta [\varepsilon_* - E^{-1} F(\sigma_2)]} =$$

$$= 1 + \frac{t_1 V(\sigma_1) [F(\sigma_1) - F(\sigma_2)]}{\tau_r [E \varepsilon_* - F(\sigma_1)] [E \varepsilon_* - F(\sigma_2)]}. \quad (14)$$

Отклонение $S - 1$ пропорционально разности $F(\sigma_1) - F(\sigma_2)$ и пластической деформации p_1 , накопленной к моменту $t = t_1$. Очевидно, $S = 1$ тогда и только тогда, когда $V(\sigma_1) = 0$, т.е. это возможно лишь для ОС с $\sigma_+ > 0$, когда $\sigma_1 < \sigma_+$ (на первой ступени отсутствуют неупругие деформации). Так как $E \varepsilon_* - F(\sigma_i) > 0$ (в противном случае разрушение происходит сразу в момент приложения нагрузки: при $t = 0$ или $t = t_1$), из (14) следует, что $S > 1$ при $\sigma_2 < \sigma_1$ и $S < 1$ при $\sigma_2 > \sigma_1$ (и $\sigma_1 > \sigma_+$). Т.е. правило линейного суммирования поврежденностей $S = 1$ для ОС (5) в сочетании с ДКР (2) никогда не соблюдается (за исключением тривиального случая $\sigma_1 < \sigma_+$), отклонение от него возможно в обе стороны в зависимости от знака $\sigma_2 - \sigma_1$ (при $\sigma_2 < \sigma_1$ оно дает для времени разрушения оценку снизу, а при $\sigma_2 > \sigma_1$ — сверху). Обнаруженное свойство — полезный индикатор применимости ОС (5) в сочетании с ДКР для описания длительной прочности: такая модель не может описать разрушение тех материалов, у которых всегда $S > 1$ при любом знаке $\sigma_2 - \sigma_1$.

Если, применяя ДКР (2), пренебречь упругой деформацией и взять в качестве меры поврежденности только вязкопластическую компоненту деформации (деформацию ползучести), то (положив $F \equiv 0$ в (12)) получим время разрушения

$$\bar{t}_*(\sigma) = \tau_r E \varepsilon_* / V(\sigma), \quad \sigma \in (\sigma_+; \omega_+), \quad \sigma_+ \geq 0. \quad (15)$$

Очевидно,

$$t_*(\sigma) / \bar{t}_*(\sigma) = 1 - F(\sigma) (E \varepsilon_*)^{-1}, \quad \bar{t}_*(\sigma) > t_*(\sigma) \quad \text{и} \quad \bar{t}_*(\sigma) > 0,$$

т.е. $\bar{t}_*(\sigma) \neq 0$ при конечном напряжении (в отличие от (12)). Формула (14) при $F \equiv 0$ превратится в

$$S = 1 + E^{-2} \varepsilon_*^{-2} \tau_r^{-1} t_1 V(\sigma_1),$$

т.е. $S > 1$ для любых $\sigma_1, \sigma_2 > \sigma_+$ (тогда $V(\sigma_1) > 0$), и знак отклонения $S - 1$ от правила линейного суммирования в этом случае уже не зависит от знака разности $\sigma_2 - \sigma_1$.

4. Время разрушения для критериев, учитывающих историю деформирования. В работе [10] предложены и исследованы два параметрических семейства критериев разрушения при монотонном одноосном деформировании, обобщающих ДКР (2):

$$\omega(t, u) = \varepsilon_*, \quad u > 0. \quad (16)$$

В качестве меры поврежденности $\omega(t, u)$ предлагается использовать одно из двух семейств средних значений деформации за время t , зависящих от параметра $u > 0$:

$$\omega(t, u) = \tilde{\varepsilon}_u(t) := \left(t^{-1} \int_0^t |\varepsilon(\tau)|^u d\tau \right)^{1/u}, \quad t > 0, \quad (17)$$

$$\omega(t, u) = \hat{\varepsilon}_u(t) := \varepsilon(0) + v_u(t)t, \quad v_u(t) := \left(t^{-1} \int_0^t |\dot{\varepsilon}(\tau)|^u d\tau \right)^{1/u}. \quad (18)$$

В основе КР (16), (18) лежит идея определения средней деформации через среднюю скорость $v_u(t)$ на интервале $(0; t)$. Целесообразность использования критерия (16), (18) связана с тем, что он обобщает и формализует эмпирический факт [2]: в испытаниях на ползучесть для разных материалов произведение t_* на скорость установившейся ползучести $v(\sigma)$ — величина постоянная, не зависящая (или слабо зависящая) от напряжения: $vt_* = \text{const}$. КР (16), (18) обобщает это наблюдение на неустановившуюся ползучесть, а при $\dot{\varepsilon} = v = \text{const}$ дает $\hat{\varepsilon}_u(t) = \varepsilon(t)$ и $vt_* = \text{const}$. Критическое значение поврежденности $\omega_* = \varepsilon_*$ в (16) может быть константой (зависящей только от температуры) или функцией напряжения.

Детальное аналитическое исследование КР (16), (17) и (16), (18) позволило обнаружить ряд полезных свойств, подтверждающих их пригодность для описания разрушения материалов при ползучести и прогнозирования длительной прочности. В работе [10] доказано, что для любого неубывающего процесса деформации $\varepsilon(t)$ справедливы следующие утверждения:

- 1) средние $\tilde{\varepsilon}_u(t)$, $u > 0$, и $\hat{\varepsilon}_u(t)$, $u \geq 1$, возрастают по t и потому их можно использовать как меру поврежденности в КР для монотонных процессов деформирования (требование возрастания $\omega(t)$ формализует представление о том, что процессы разрушения и нарастания деформации ползучести, связанные общими структурными механизмами, «сонаправлены»);
- 2) скорости роста поврежденностей (17) и (18) выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\varepsilon}}_u(t) &= \tilde{\varepsilon}_u(t)(ut)^{-1} [(\varepsilon(t)/\tilde{\varepsilon}_u(t))^u - 1], \\ \dot{\hat{\varepsilon}}_u(t) &= v_u(t)u^{-1} [u - 1 + (\dot{\varepsilon}(t)/v_u(t))^u], \quad t > 0; \end{aligned}$$

- 3) семейства функций $\tilde{\varepsilon}_u(t)$ и $\hat{\varepsilon}_u(t)$ непрерывны и возрастают по параметру $u > 0$;
- 4) для всех $t > 0$ $\tilde{\varepsilon}_u(t) < \varepsilon(t)$ при $u > 0$ и $\hat{\varepsilon}_u(t) \geq \varepsilon(t)$ при $u > 1$ ($\hat{\varepsilon}_u(t) = \varepsilon(t)$ лишь при $\dot{\varepsilon} = \text{const}$);
- 5) $\tilde{\varepsilon}_u(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ при $u \rightarrow \infty$, т.е. КР (16), (17) при достаточно большом u дает значение t_* , сколь угодно близкое к ДКР (2); при $u = 1$ $\hat{\varepsilon}_1(t) = \varepsilon(t)$, $t > 0$, и КР (16), (18) совпадает с ДКР (2).

Эти свойства показывают, что критерии (16), (17) образуют монотонную и непрерывную шкалу критериев (монотонно и непрерывно зависящих от параметра $u > 0$), более мягких, чем ДКР, но сколь угодно мало отличающихся от него при больших значениях u , а КР (16), (18) с $u > 1$ — шкалу критериев, более жестких, чем ДКР и включающую ДКР как предельный случай при $u = 1$. КР семейства (16), (17) при всех $u > 0$ дают большее время разрушения, чем ДКР, семейства (16), (18) при $u > 1$ — меньшее, а различие можно сделать сколь угодно малым за счет выбора значений параметра u у края шкалы ($u \rightarrow \infty$ или $u = 1$). Это свойство очень полезно для точной настройки модели на имеющиеся экспериментальные данные о зависимости времени разрушения от уровня напряжения, температуры и других факторов: если

эти данные плохо описывает ДКР, то можно выбрать более подходящий КР из построенных семейств (16), (17) или (16), (18), плавно и монотонно изменяя значение u .

Так как скорость ползучести $\dot{\varepsilon}(t) = kV(\sigma)$ не зависит от времени, средняя скорость равна $v_u(t) = kV(\sigma)$, и (18) дает поврежденность

$$\omega = \hat{\varepsilon}_u(t) := \varepsilon(0) + v_u(t)t,$$

совпадающую с полной деформацией (8). Таким образом, при любом u КР (16), (18) в сочетании с ОС (5) порождает такую же КДП, как и деформационный КР (2), т.е. КДП (12).

Подстановка КП (8) в (17) дает для поврежденности (17) выражение

$$\tilde{\varepsilon}_u(t) = E^{-1}F(\sigma)(q(\sigma)t/\tau_r)^{-1/u} [(q(\sigma)t/\tau_r + 1)^{u+1} - 1]^{1/u} (u + 1)^{-1/u},$$

$q(x) := V(x)/F(x)$, а КР (16), (17), т.е. $(\tilde{\varepsilon}_u(t_*))^u = \varepsilon_*^u$, дает для времени разрушения $t_*(\sigma) = \tau_r T_*(\sigma)$ уравнение:

$$\left[(q(\sigma)T_* + 1)^{u+1} - 1 \right] (q(\sigma)T_*)^{-1} = (u + 1)(E\varepsilon_*)^u (F(\sigma))^{-u}, \quad \sigma > 0. \quad (19)$$

Если пренебречь упругой составляющей деформации и применять КР (16), (17) к вязкопластической компоненте деформации (деформации ползучести) $p(t) = kV(\sigma)t$, то формулы для поврежденности и времени разрушения упростятся:

$$\tilde{p}_u(t) = kV(\sigma)(u + 1)^{-1/u}t,$$

и

$$\tilde{t}_* = \varepsilon_* \eta (u + 1)^{1/u} V^{-1}(\sigma) \quad \text{или} \quad \tilde{t}_* = \tau_r E \varepsilon_* (u + 1)^{1/u} (V(\sigma))^{-1}, \quad \sigma \in (\sigma_+; \omega_+). \quad (20)$$

Свойства КДП (20) совпадают со свойствами КДП (15), так как

$$\tilde{t}_*(\sigma)/\bar{t}_*(\sigma) = (u + 1)^{1/u} = c(u), \quad u > 0;$$

функция $c(u)$ убывает, $c(0+) = e$, $c(+\infty) = \inf c(u) = 1$, и потому

$$1 < \tilde{t}_*(\sigma)/\bar{t}_*(\sigma) < e.$$

5. Кривая длительной прочности для энергетического КР и сравнение КДП. В цикле работ О. В. Соснина и его коллег [15–18] предложена и экспериментально исследована мера поврежденности, равная «удельной работе рассеяния» (то есть удельной диссипации в точке тела), и энергетический КР (3), постулирующий, что разрушение материала наступает при достижении диссипацией $W(t, \sigma)$ критического значения $W_* = W_*(T)$.

В силу (6) скорость диссипации при ползучести постоянна:

$$\dot{W}(t) = k\sigma V(\sigma) = \sigma r,$$

где $r = kV(\sigma)$ — скорость установившейся ползучести. Так как

$$W(t) = k\sigma V(\sigma)t,$$

энергетический КР (ЭКР) (3) дает для времени разрушения \hat{t}_* уравнение

$$k\sigma V(\sigma)\hat{t}_* = W_*,$$

т.е. порождает КДП

$$\hat{t}_* = W_*\eta/[\sigma V(\sigma)] \quad \text{или} \quad \hat{t}_*(\sigma) = \tau_r EW_* / [\sigma V(\sigma)], \quad \sigma \in (\sigma_+; \omega_+). \quad (21)$$

КДП (21) убывает, как и (12), и $\hat{t}_*(\sigma_+ + 0) = +\infty$ (как в случае $\sigma_+ = 0$, так и при $\sigma_+ > 0$). КДП (21) отличается от КДП (12), порожденной ДКР, тем, что на нее не влияет МФ F (упругая деформация), и тем, что $\hat{t}_*(\sigma) \neq 0$ ($\hat{t}_*(\sigma) > 0$ и $\hat{t}_*(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow +\infty$, если $\omega_+ = +\infty$). Их поведение в правой окрестности предела упругости-ползучести $\sigma = \sigma_+$ однотипно: при $\sigma \rightarrow \sigma_+ + 0$ $t_*(\sigma) \rightarrow +\infty$ и для (21), и для (12) (см. рис.), так как $V(\sigma_+) = 0$.

Отношение времен разрушения (12) и (21) для ДКР и ЭКР следующее:

$$t_*(\sigma)/\hat{t}_*(\sigma) = [E\varepsilon_* - F(\sigma)]\sigma/(W_*E), \quad \sigma \in (\sigma_+; f(E\varepsilon_*)).$$

Если $\sigma_+ = 0$, то оно обращается в нуль при $\sigma = 0$ и $\sigma = f(E\varepsilon_*)$, т.е. в окрестностях этих точек время разрушения по ДКР (2) значительно меньше, чем по ЭКР (3), а при $\sigma \rightarrow 0$ абсолютное и относительное отклонения $\hat{t}_*(\sigma) - t_*(\sigma)$ и $[\hat{t}_*(\sigma) - t_*(\sigma)]/t_*(\sigma)$ стремятся к бесконечности. Отношение времен разрушения (15) (ДКР без учета упругой деформации) и (21) задается так:

$$\bar{t}_*(\sigma)/\hat{t}_*(\sigma) = \varepsilon_*\sigma/W_*, \quad \sigma \in (\sigma_+; \omega_+).$$

Если $V = x^n$, то уравнения (21), (15) и (20) дают степенные зависимости времени разрушения от напряжения:

$$\hat{t}_* = \eta W_* \sigma^{-n-1}, \quad \bar{t}_* = \eta \varepsilon_* \sigma^{-n}, \quad \tilde{t}_* = \eta \varepsilon_* (u + 1)^{1/u} \sigma^{-n},$$

т.е. в логарифмических координатах « $\lg \sigma - \lg t_*$ » эти КДП изображаются прямыми линиями с угловыми коэффициентами $-(n + 1)$ и $-n$ (см. правый рисунок), что типично для экспериментальных КДП многих материалов. Если МФ V склеена из двух степенных функций, определенных на $[0; x_1]$ и $[x_1; x_2]$, то зависимости $\hat{t}_*(\sigma)$, $\bar{t}_*(\sigma)$ и $\tilde{t}_*(\sigma)$ тоже будут склеены из двух степенных функций вида с отрицательными показателями, и в координатах « $\lg \sigma - \lg t_*$ » КДП будет изображаться двузвенными ломаными. Если $\sigma_+ > 0$, $V(x) = 0$ при $x < \sigma_+$ и $V(x) = (x - \sigma_+)^n$ при $x > \sigma_+$, то КДП (21) превращается в

$$\hat{t}_* = \tau_r EW_*(\sigma - \sigma_+)^{-n} \sigma^{-1}, \quad \sigma \in (\sigma_+; \omega_+).$$

На левом рисунке приведены КДП полулинейной модели (7) с $\sigma_+ = 0$, $V(x) = x|x|$, $F(x) = x$, $E = 100$, $\eta = 100$ (тогда $\tau_r = 1$), $\varepsilon_* = 0.02$, $W_* = 0.02$. Черная кривая — КДП (12) для ДКР, голубая — КДП (15) для ДКР без учета упругой деформации, красная — КДП (21) для ЭКР (3) (эта КДП растет быстрее остальных при $\sigma \rightarrow 0+$), желтые кривые — КДП (20) с $u = 0.1; 1; 10; 30$ для интегрального КР (16), (17) без учета упругой деформации (всегда $\tilde{t}_*(\sigma, u) > \bar{t}_*(\sigma) > t_*(\sigma)$). Голубая штриховая линия — предельная кривая

для семейства КДП (20) при $u \rightarrow 0$ (она получается из КДП (15) умножением на e); при $u \rightarrow +\infty$ семейство КДП (20) сходится к КДП (15). Синяя штрихпунктирная линия — КДП (19) (порожденная КР (16), (17) с учетом полной деформации): для выбранных МФ $q(\sigma) = \sigma$, и уравнение КДП (19), принимает вид

$$[(\sigma T_* + 1)^{u+1} - 1] (\sigma T_*)^{-1} = (u + 1)(E\varepsilon_*)^u \sigma^{-u};$$

для $u = 1$

$$\tilde{t}_* = 2\tau_r(E\varepsilon_* - \sigma)\sigma^{-2}, \quad \sigma \in (0; E\varepsilon_*).$$

Все КДП имеют вертикальную асимптоту $\sigma = 0$, так как $\sigma_+ = 0$. Четыре штриховые линии — КДП модели с положительным пределом упругости (ползучести) $\sigma_+ = 1$ и МФ $V(x) = 0$ при $x < \sigma_+$, $V = (x - \sigma_+)^2$ при $x > \sigma_+$ (по-прежнему $F(x) = x$, $x > 0$). Цвета КДП соответствуют тем же КР, желтая штриховая — КДП (20) при $u = 1$. Все эти КДП имеют вертикальную асимптоту $\sigma = \sigma_+$.

На правом рисунке приведены те же самые КДП, но в координатах « $\lg \sigma - \lg t_*$ » (степенные КДП (15), (20) и (21) в них становятся прямолинейными). У КДП, которые обращались в нуль в точке $\sigma = E\varepsilon_* = 2$, появляется вертикальная асимптота $x = \lg(E\varepsilon_*)$.

Отметим, что так как

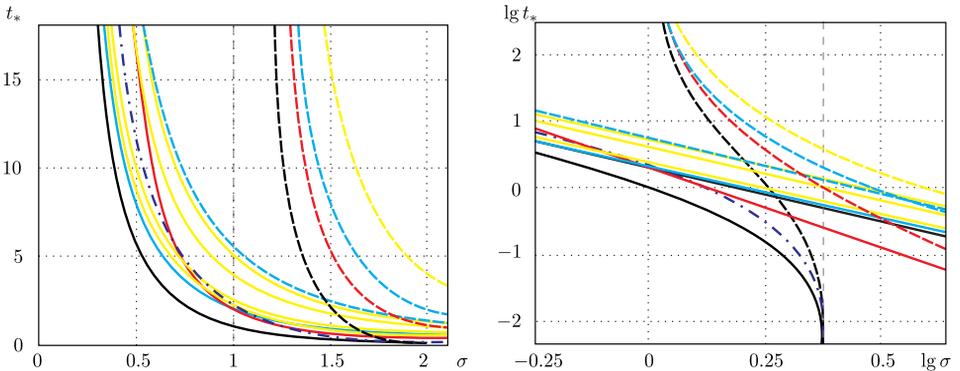
$$W(t) = k\sigma V(\sigma)t,$$

для ОС (1) в сочетании с ЭКР выполняется гипотеза единой кривой ползучести Никитенко—Соснина [15, 16] в координатах « $W - t/t_*$ »: по (21)

$$x := t/\hat{t}_* = t\sigma V(\sigma)/(W_*\eta),$$

и КП (8) имеет вид

$$W = W_*x,$$



Кривые длительной прочности полулинейной модели (7) с $\sigma_+ = 0$, $V = x^2$ и с $\sigma_+ > 0$, $V = (x - \sigma_+)^2$, $x > \sigma_+$ для разных критериев разрушения (онлайн в цвете) [Long-term strength curves of the semilinear model (7) for different failure criteria when $\sigma_+ = 0$, $V = x^2$, and $\sigma_+ > 0$, $V = (x - \sigma_+)^2$, $x > \sigma_+$ (color online)]

т.е. не зависит от напряжения. Для ДКР (2) и других рассмотренных КР эта гипотеза не выполняется, так как $t_*(\sigma)$ и $x(\sigma) := t/t_*$ имеют иной вид: например, для (15) получим

$$x := t/\bar{t}_* = tV(\sigma)/(\eta\varepsilon_*)$$

и

$$W = \varepsilon_*\sigma x.$$

При ползучести с кусочно-постоянным напряжением скорость диссипации постоянна на каждом интервале $(t_{i-1}; t_i)$:

$$\dot{W}(t) = k\sigma_i V(\sigma_i) > 0,$$

поэтому диссипация выражается следующей формулой:

$$W(t) = \sum_{m=1}^{i-1} k\sigma_m V(\sigma_m)(t_m - t_{m-1}) + k\sigma_i V(\sigma_i)(t - t_{i-1}), \quad t \in (t_{i-1}; t_i). \quad (22)$$

Время разрушения $\hat{t}_*(i, \sigma)$ на i -той ступени нагружения находится из (22) и ЭКР (3):

$$\hat{t}_*(i, \sigma) - t_{i-1} = W_*\eta/\sigma_i V(\sigma_i) - \sum_{m=1}^{i-1} \frac{\sigma_m V(\sigma_m)}{\sigma_i V(\sigma_i)}(t_m - t_{m-1}). \quad (23)$$

Проверим, соблюдается ли «закон» линейного накопления поврежденности при ступенчатом нагружении, т.е. условие разрушения $S = 1$, где сумма парциальных времен вычисляется по (4), а $t_*(\sigma_m) = \hat{t}_*(\sigma_m)$ — по (21):

$$\hat{t}_*(\sigma_m) = W_*\eta/[\sigma_m V(\sigma_m)].$$

Подставим (23) в (4):

$$S = \frac{W_*\eta}{[\sigma_i V(\sigma_i)\hat{t}_*(\sigma_i)]} - \sum_{m=1}^{i-1} \frac{\sigma_m V(\sigma_m)}{\sigma_i V(\sigma_i)\hat{t}_*(\sigma_i)}(t_m - t_{m-1}) + \sum_{m=1}^{i-1} \frac{(t_m - t_{m-1})}{\hat{t}_*(\sigma_m)},$$

т.е. в точности $S = 1$ (ведь $\hat{t}_*(\sigma_i)/\hat{t}_*(\sigma_m) = \sigma_m V(\sigma_m)/\sigma_i V(\sigma_i)$). Таким образом, для ОС (1) (с произвольными МФ) в сочетании с ЭКР (3) всегда выполняется правило линейного накопления поврежденности при ступенчатых нагружениях, и критерий $S = 1$ дает в точности такое же время разрушения (23).

Закключение. Исследовано нелинейное определяющее соотношение типа Максвелла (1) для вязкоупругопластичных материалов с целью выявления его возможностей и области применимости. Одна материальная функция соотношения (1) управляет упругими свойствами, вторая — вязкопластическими: регулирует наследственные свойства, вязкость, скорость диссипации, чувствительность напряжения к скорости деформации, зависимость скорости ползучести и релаксации от величины и знака напряжения, величину и скорость накопления необратимой деформации.

При минимальных первичных ограничениях на материальные функции выведены уравнения теоретических кривых длительной прочности (КДП), порожденных соотношением (1) в сочетании с деформационными и энергетическим критериями разрушения (2) и (3), а также — с интегральными критериями (16)–(18), учитывающими историю деформирования; аналитически изучены и сопоставлены общие свойства этих кривых, доказано, что они адекватно описывают типичные свойства экспериментальных КДП вязкоупруго-пластических материалов. Для найденных зависимостей времен разрушения от напряжения проверено выполнение правила линейного накопления поврежденности при ступенчатом нагружении и выведены формулы для отклонения от него. В частности, доказано, что для определяющего соотношения (1) в сочетании с энергетическим КР (3) всегда выполняется правило линейного накопления поврежденности при ступенчатом нагружении, и условие разрушения $S = 1$ (см. (4)) дает точное время разрушения (23), а для соотношения (1) в сочетании с деформационным критерием разрушения (2) оно никогда не выполняется, но дает оценку сверху или снизу в зависимости от соотношения между уровнями напряжения на ступенях нагружения (для произвольных материальных функций). Если же, применяя деформационный критерий разрушения (2), пренебречь упругой деформацией, то знак отклонения $S - 1$ уже не будет зависеть от знака разности $\sigma_2 - \sigma_1$: будет выполняться неравенство $S > 1$ для любых σ_2 и σ_1 (превосходящих предел упругости $\sigma_+ \geq 0$).

Создание арсенала критериев разрушения, хорошо согласованных с построенным (или выбранным) определяющим соотношением, аналитическое исследование уравнений порожденных ими КДП в общем виде и их настройка за счет параметров, изменяющих КДП известным (в силу результатов анализа) образом, полезны для аттестации определяющего соотношения, обработки результатов испытаний, моделирования и прогнозирования длительной прочности вязкоупруго-пластических материалов и конструкций.

Декларация о финансовых и других взаимоотношениях. Исследование не имело спонсорской поддержки. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена автором. Автор не получал гонорар за статью.

ORCID

Андрей Владимирович Хохлов: <http://orcid.org/0000-0002-9212-2579>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Качанов Л. М. *Теория ползучести*. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.
2. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
4. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкции*. М.: Машиностроение-1, 2004. 265 с.
5. Betten J. *Creep Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 367 pp.
6. Bergstrom J. S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. Amsterdam: William Andrew is an imprint of Elsevier, 2015. 520 pp.
7. Махутов Н. А. *Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность*. М.: Машиностроение, 1981. 272 с.
8. Хохлов А. В. Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти // *Известия РАН. МТТ*, 2007. № 2. С. 147–166.

9. Хохлов А. В. Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения. Кривые ползучести и длительной прочности // *Изв. РАН. МТТ*, 2008. № 2. С. 140–160.
10. Хохлов А. В. Критерии разрушения при ползучести, учитывающие историю деформирования, и моделирование длительной прочности // *Изв. РАН. МТТ*, 2009. № 4. С. 121–135.
11. Хохлов А. В. *Общие свойства кривых ползучести и длительной прочности, порождаемых нелинейной теорией наследственности Ю. Н. Работнова*: Отчет о НИР № 5288. М.: НИИ механики МГУ, 2015. 74 с.
12. Хохлов А. В. Свойства нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла с двумя материальными функциями // *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика*, 2016. № 6. С. 36–41.
13. Локощенко А. М., Шестериков С. А. К проблеме оценки длительной прочности при ступенчатом нагружении // *ПМТФ*, 1982. № 2. С. 139–143.
14. Радченко В. П., Кичаев П. Е. *Энергетическая концепция ползучести и виброползучести металлов*. Самара: СамГТУ, 2011. 157 с.
15. Никитенко А. Ф., Соснин О. В. О разрушении при ползучести // *ПМТФ*, 1967. № 3. С. 74–75.
16. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. *Энергетический вариант теории ползучести*. Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1986. 95 с.
17. Никитенко А. Ф. *Ползучесть и длительная прочность металлических материалов*. Новосибирск: НГАСУ, 1997. 278 с.
18. Соснин О. В., Никитенко А. Ф., Горев Б. В. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести и длительной прочности металлов // *ПМТФ*, 2010. С. 188–197. 4 с.
19. Федоров В.В. Термодинамический метод оценки длительной прочности // *Пробл. прочн.*, 1972. № 9. С. 45–47.
20. Радченко В.П. Энергетический вариант одноосной теории ползучести и длительной прочности // *ПМТФ*, 1991. № 4. С. 172–179.
21. Радченко В. П., Кичаев Е. К., Симонов А. В. Энергетический вариант модели реологического деформирования и разрушения металлов при совместном действии статических и циклических нагрузок // *ПМТФ*, 2000. № 3. С. 169–175.
22. Хохлов А. В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства кривых ползучести при ступенчатых нагружениях и условия накопления пластической деформации // *Машиностроение и инженерное образование*, 2016. № 3. С. 35–48.
23. Хохлов А. В. *Нелинейные модели вязкоупругости типа Максвелла. Особенности их поведения, скоростная чувствительность и возможность использования для описания ползучести и сверхпластичности материалов*: Отчет о НИР № 5193. М.: НИИ механики МГУ, 2013. 108 с.
24. Городцов В. А., Леонов А. И. О кинематике, неравновесной термодинамике и реологических соотношениях в нелинейной теории вязкоупругости // *ПММ*, 1968. Т. 32, № 1. С. 70–94.
25. Leonov A. I., Lipkina E. Ch., Pashkin E. D., Prokunin A. N. Theoretical and experimental investigations of shearing in elastic polymer liquids // *Rheol. Acta*, 1976. vol. 15, no. 7/8. pp. 411–426. doi: [10.1007/BF01574496](https://doi.org/10.1007/BF01574496).
26. Пальмов В. А. Реологические модели в нелинейной механике деформируемых тел // *Успехи механики*, 1980. Т. 3, № 3. С. 75–115.
27. Прокунин А. Н. О нелинейных определяющих соотношениях максвелловского типа для описания движения полимерных жидкостей // *ПММ*, 1984. Т. 48, № 6. С. 957–965.
28. Leonov A. I., Prokunin A. N. *Non-linear Phenomena in Flows of Viscoelastic Polymer Fluids*. London: Chapman and Hall, 1994. xvii+475 pp. doi: [10.1007/978-94-011-1258-1](https://doi.org/10.1007/978-94-011-1258-1).
29. Leonov A. I. Constitutive equations for viscoelastic liquids: Formulation, analysis and comparison with data // *Rheology Series*, 1999. vol. 8. pp. 519–575. doi: [10.1016/S0169-3107\(99\)80040-9](https://doi.org/10.1016/S0169-3107(99)80040-9).

30. Cao Y. Determination of the creep exponent of a power-law creep solid using indentation tests // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2007. vol. 11, no. 2. pp. 159–172. doi: [10.1007/s11043-007-9033-6](https://doi.org/10.1007/s11043-007-9033-6).
31. Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y. Creep Analysis with a Stress Range Dependent Constitutive Model // *Arch. Appl. Mech.*, 2009. vol. 79, no. 6. pp. 619–630. doi: [10.1007/s00419-008-0287-5](https://doi.org/10.1007/s00419-008-0287-5).
32. Радченко В. П., Шапиевский Д. В. Анализ нелинейной обобщенной модели Максвелла // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005. № 38. С. 55–64. doi: [10.14498/vsgtu372](https://doi.org/10.14498/vsgtu372).

Поступила в редакцию 15/VII/2016;
в окончательном варианте — 04/IX/2016;
принята в печать — 09/IX/2016.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 524–543

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1512>

MSC: 74R20, 74D99, 74C99

LONG-TERM STRENGTH CURVES GENERATED BY THE NONLINEAR MAXWELL-TYPE MODEL FOR VISCOELASTOPLASTIC MATERIALS AND THE LINEAR DAMAGE RULE UNDER STEP LOADING

A. V. Khokhlov

Lomonosov Moscow State University,
Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

Abstract

The nonlinear Maxwell-type constitutive relation with two arbitrary material functions is formulated for viscoelastoplastic materials and studied analytically in uni-axial case to reveal capabilities of the model and its applicability scope. Its coupling with a number of fracture criteria is analyzed in order to simulate creep rupture under constant and piecewise-constant loading and to compare creep life estimates arising as a result. The limit strain criterion, the critical dissipation criterion and two proposed new families of failure criteria taking into account a strain history (i.e. a whole creep curve) are considered. Long-term strength curves equations generated by each one of the four chosen failure criteria are derived. Their general qualitative properties are analyzed and compared to each other under minimal restrictions on material

© 2016 Samara State Technical University.

Please cite this article in press as:

Khokhlov A. V. Long-term strength curves generated by the nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials and the linear damage rule under step loading, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 524–543. doi: [10.14498/vsgtu1512](https://doi.org/10.14498/vsgtu1512). (In Russian)

Authors Details:

Andrew V. Khokhlov (Cand. Techn. Sci.; andrey-khokhlov@ya.ru), Senior Researcher, Lab. of Elasticity and Plasticity.

functions of the constitutive relation. It is proved that qualitative properties of all theoretic long-term strength curves coincide with basic properties of typical test long-term strength curves of viscoelastoplastic materials. For every failure criteria considered herein, rupture time under step-wise loading is evaluated for arbitrary material functions and compared to the lifetime yielding from the linear damage accumulation rule (i.e. “Miner’s rule”). General formulas for cumulative damage (“Miner’s sum”) deviations from unity are obtained for all failure criteria coupled with the nonlinear Maxwell-type constitutive relation. Their dependences on material functions and loading program parameters are examined. In particular, it is proved that the linear damage rule is exactly valid for the critical dissipation criterion whatever material functions, number of loading steps and stress levels are chosen. On the contrary, for the limit strain criterion, the linear damage rule is never valid for two-step loading and cumulative damage at rupture instant is greater or less than unity depending on the sign of stress jump.

Keywords: viscoelastoplasticity, creep curves, damage, failure criteria, dissipation, creep rupture, creep lifetime, long-term strength curves, superplasticity.

Declaration of Financial and Other Relationships. The research has not had any sponsorship. The author is absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. The author has approved the final version of manuscript. The author has not received any fee for the article.

ORCID

Andrew V. Khokhlov: <http://orcid.org/0000-0002-9212-2579>

REFERENCES

1. Kachanov L. M. *Teoriia polzuchesti* [Creep theory]. Moscow, Fizmatgiz, 1960, 456 pp. (In Russian)
2. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.
3. Lokoshchenko A. M. *Polzuchest' i dlitel'naiia prochnost' metallov* [Creep and Long-Term Strength of Metals]. Moscow, Fizmatlit, 2016, 504 pp. (In Russian)
4. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruksii* [Rheological deformation and fracture of materials and structural elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 265 pp. (In Russian)
5. Betten J. *Creep Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2008, 367 pp.
6. Bergstrom J. S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. Amsterdam, William Andrew is an imprint of Elsevier, 2015, 520 pp.
7. Makhutov N. A. *Deformatsionnye kriterii razrusheniia i raschet elementov konstruksii na prochnost'* [Deformation and fracture criteria for the calculation of structural elements of strength]. Moscow, Mashinostroenie, 1981, 272 pp. (In Russian)
8. Khokhlov A. V. Constitutive relation for rheological processes: Properties of theoretic creep curves and simulation of memory decay, *Mech. Solids*, 2007, vol.42, no. 2, pp. 291–306. doi: [10.3103/S0025654407020148](https://doi.org/10.3103/S0025654407020148).
9. Khokhlov A. V. Constitutive relation for rheological processes with known loading history. Creep and long-term strength curves, *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, no. 2, pp. 283–299. doi: [10.3103/S0025654408020155](https://doi.org/10.3103/S0025654408020155).
10. Fracture criteria under creep with strain history taken into account, and long-term strength modelling, *Mech. Solids*, 2009, vol.44, no.4, pp. 596–607. doi: [10.3103/S0025654409040104](https://doi.org/10.3103/S0025654409040104).

11. Khokhlov A. V. *The general properties of curves and creep rupture strength generated by the nonlinear theory of heredity* by Yu. N. Rabotnov, Research report no. 5288. Moscow, Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, 2015, 74 pp. (In Russian)
12. Khokhlov A. V. Properties of nonlinear Maxwell-type models of the visco material with two functions, *Vestnik MGU. Ser. 1. Matematika, mekhanika*, 2016, no. 6, pp. 36–41 (In Russian).
13. Lokoshchenko A. M., Shesterikov S. A. Problem of estimating the creep strength under step loading, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1982, vol. 23, no. 2, pp. 289–292. doi: [10.1007/BF00911015](https://doi.org/10.1007/BF00911015).
14. Radchenko V. P., Kichaev P. E. *Energeticheskaya kontseptsia polzuchesti i vibropolzuchesti metallov* [Energy Concept of Creep and Vibrocreep of Metals]. Samara, Samara State Technical Univ., 2011, 157 pp. (In Russian)
15. Nikitenko A. F., Sosnin O. V. Fracture in creep, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1967, vol. 8, no. 3, pp. 50–51. doi: [10.1007/BF00913209](https://doi.org/10.1007/BF00913209).
16. Sosnin O. V., Gorev B. V., Nikitenko A. F. *Energeticheskii variant teorii polzuchesti* [Energetic variant of the creep theory]. Novosibirsk, Inst. of Hydrodynamics, USSR Acad. of Sci., 1986, 95 pp. (In Russian)
17. Nikitenko A. F. *Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallicheskih materialov* [Creep and long-term strength of metallic materials]. Novosibirsk, Novosibirsk State University of architecture and Civil Engineering Publ., 1997, 278 pp. (In Russian)
18. Sosnin O. V., Nikitenko A. F., Gorev B. V. Justification of the energy variant of the theory of creep and long-term strength of metals, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2010, vol. 51, no. 4, pp. 608–614. doi: [10.1007/s10808-010-0078-y](https://doi.org/10.1007/s10808-010-0078-y).
19. Fedorov V. V. Thermodynamic method of estimating long-term strength, *Strength Mater.*, 1972, vol. 4, no. 9, pp. 1076–1079. doi: [10.1007/BF01529581](https://doi.org/10.1007/BF01529581).
20. Radchenko V. P. Energy variant of the uniaxial theory of creep and rupture strength, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1991, vol. 32, no. 4, pp. 632–640. doi: [10.1007/BF00851575](https://doi.org/10.1007/BF00851575).
21. Radchenko V. P., Kichaev E. K., Simonov A. V. Energetic variant of the model of rheological deformation and destruction of metals under a joint action of static and cyclic loads, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2000, vol. 41, no. 3, pp. 531–537. doi: [10.1007/BF02465307](https://doi.org/10.1007/BF02465307).
22. Khokhlov A. V. Nonlinear Maxwell-type model of viscoelastoplasticity: the properties of creep curves at step loadings and conditions for the accumulation of plastic deformation, *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2016, no. 3, pp. 35–48 (In Russian).
23. Khokhlov A. V. *Nonlinear Maxwell-type models of viscoelasticity. Features of their behavior, rate sensitivity, and the possibility of using to describe the creep and superplastic materials*, Research report no. 5193. Moscow, Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, 2013, 108 pp. (In Russian)
24. Gorodtsov V. A., Leonov A. I. On the kinematics, nonequilibrium thermodynamics, and rheological relationships in the nonlinear theory of viscoelasticity, *J. Appl. Math. Mech.*, 1968, vol. 32, no. 1, pp. 62–84. doi: [10.1016/0021-8928\(68\)90148-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(68)90148-2).
25. Leonov A. I., Lipkina E. Ch., Pashkin E. D., Prokunin A. N. Theoretical and experimental investigations of shearing in elastic polymer liquids, *Rheol. Acta*, 1976, vol. 15, no. 7/8, pp. 411–426. doi: [10.1007/BF01574496](https://doi.org/10.1007/BF01574496).
26. Pal'mov V. A. Rheological models in the nonlinear mechanics of deformable bodies, *Uspekhi mekhaniki*, 1980, vol. 3, no. 3, pp. 75–115 (In Russian).
27. Prokunin A. N. On the non-linear Maxwell-type defining equations for describing the motions of polymer liquids, *J. Appl. Math. Mech.*, 1984, vol. 48, no. 6, pp. 699–706. doi: [10.1016/0021-8928\(84\)90037-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(84)90037-6).
28. Leonov A. I., Prokunin A. N. *Non-linear Phenomena in Flows of Viscoelastic Polymer Fluids*. London, Chapman and Hall, 1994, xvii+475 pp. doi: [10.1007/978-94-011-1258-1](https://doi.org/10.1007/978-94-011-1258-1).
29. Leonov A. I. Constitutive equations for viscoelastic liquids: Formulation, analysis and comparison with data, *Rheology Series*, 1999, vol. 8, pp. 519–575. doi: [10.1016/S0169-3107\(99\)80040-9](https://doi.org/10.1016/S0169-3107(99)80040-9).

30. Cao Y. Determination of the creep exponent of a power-law creep solid using indentation tests, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2007, vol.11, no.2, pp. 159–172. doi: [10.1007/s11043-007-9033-6](https://doi.org/10.1007/s11043-007-9033-6).
31. Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y. Creep Analysis with a Stress Range Dependent Constitutive Model, *Arch. Appl. Mech.*, 2009, vol.79, no.6, pp. 619–630. doi: [10.1007/s00419-008-0287-5](https://doi.org/10.1007/s00419-008-0287-5).
32. Radchenko V. P., Shapievskii D. V. Analysis of a nonlinear generalized Maxwell model, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2005, no.38, pp. 55–64 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu372](https://doi.org/10.14498/vsgtu372).

Received 15/VII/2016;
received in revised form 04/IX/2016;
accepted 09/IX/2016.