Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 1. С. 94–111
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1479

УДК 517.956

К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах для двумерной системы высокого порядка*

Е. А. Созонтова

Елабужский институт (филиал) Казанского (Приволжского) федерального университета, Россия, 423600, Елабуга, ул. Казанская, 89.

Аннотация

Рассматривается задача Гурса для двумерной системы дифференциальных уравнений высокого порядка. Целью исследования является отыскание достаточных условий разрешимости рассматриваемой задачи в квадратурах. Предлагается способ отыскания решения указанной задачи в явном виде, основанный на факторизации уравнений системы. В результате исходная задача редуцируется к пяти более простым задачам: четырем задачам Гурса для уравнения и задаче Гурса для гиперболической системы второго порядка. Окончательный результат в терминах коэффициентов исходной системы формулируется в двух теоремах.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, задача Гурса, разрешимость в квадратурах.

Получение: 6 марта 2016 г. / Исправление: 18 ноября 2016 г. / Принятие: 9 декабря 2016 г. / Публикация онлайн: 16 апреля 2017 г.

Введение. В работах [2–18], [19, гл. 3], [20, гл. 1, 3] с различных точек зрения изучалось уравнение

$$u_{(r,s)} + \sum_{\substack{i=0\\ i+j<r+s}}^{r} \sum_{j=0}^{s} a^{(i,j)} u_{(i,j)} = f, \tag{1}$$

где

$$u_{(i,j)} = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}.$$

Научная статья

Образец для цитирования
Созонтова Е. А. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах для двумерной системы высокого порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 94–111. doi: 10.14498/vsgtu1479.

Сведения об авторе
Елена Александровна Созонтова http://orcid.org/0000-0003-4315-0669
ассистент; каф. математического анализа, алгебры и геометрии;
e-mail: sozontova-elena@rambler.ru

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного автором на 69 научной конференции «Герценовские чтения – 2016» (Россия, Санкт-Петербург, 11–15 апреля 2016).

В частности, в [7–9], [19, гл. 3], [20, гл. 1] для уравнения (1) при определенных r и s были исследованы варианты задачи Гурса: доказана однозначная разрешимость этой задачи, а для некоторых отдельных случаев получены достаточные условия разрешимости задачи Гурса в явном виде [19, гл. 3], [20, гл. 3]. В работах [13–17] на основе редукции к задаче Гурса изучены различные краевые задачи для уравнения (1).

Целью нашего исследования является выделение случаев разрешимости задачи Гурса в квадратурах для двумерной системы уравнений n-ного порядка:

$$u_{k(r,s)} + \sum_{\substack{i=0 \\ i+j<r+s}}^{r} \sum_{j=0}^{s} \left(a_{k1}^{(i,j)} u_{1(i,j)} + a_{k2}^{(i,j)} u_{2(i,j)}\right) = f_k, \quad k = 1, 2, \quad r > 1, \ s > 1, \tag{2}$$

где $u_{k(i,j)} = \dfrac{\partial^{i+j} u_k}{\partial x^i \partial y^j}$, $a_{kl}^{(i,j)}$, f_k являются функциями переменных x и y, причем $a_{kl}^{(i,j)} \in C^{(i,j)}(\overline{D})$, $f_k \in C^{(0,0)}(\overline{D})$, $k, l = 1, 2$, $D = \{x_0 < x < x_1, \ y_0 < y < y_1\}$.

1. Вспомогательные результаты. Рассмотрим сначала в области D систему (2) при $r = n - 1$, $s = 1$, т. е. систему вида

$$u_{k(n-1,1)} + \sum_{\substack{i=0 \\ i+j<n}}^{n-1} \sum_{j=0}^{1} \left(a_{k1}^{(i,j)} u_{1(i,j)} + a_{k2}^{(i,j)} u_{2(i,j)}\right) = f_k, \quad k = 1, 2, \quad n > 2 \tag{3}$$

(результаты исследования системы (3) необходимы нам для исследования (2) при произвольных r и s).

Задача 1. *В области D найти регулярное решение системы (3), удовлетворяющее условиям*

$$u_{k(0,0)}(x, y_0) = \psi_{k0}(x), \quad u_{k(p,0)}(x_0, y) = \varphi_{kp}(y), \quad k = 1, 2, \quad p = \overline{0, n-2}. \tag{4}$$

Предполагается, что $\varphi_{kp} \in C^1(\overline{X})$, $\psi_{k0} \in C^{n-1}(\overline{Y})$ (X, Y — стороны характеристического прямоугольника D при $x = x_0$, $y = y_0$ соответственно), и выполняются условия согласования

$$\varphi_{kp}(y_0) = \psi_{k0}^{(p)}(x_0), \quad k = 1, 2, \quad p = \overline{0, n-2}.$$

Теорема 1. *Пусть коэффициенты системы (3) удовлетворяют условиям*

$$\begin{aligned} &C_{n-2}^{i} \frac{\partial^{n-2-i}}{\partial x^{n-2-i}} \left(a_{kl}^{(n-2,1)}\right) - a_{kl}^{(i,1)} \equiv 0, \\ &C_{n-2}^{i} \frac{\partial^{n-2-i}}{\partial x^{n-2-i}} \left(a_{kl}^{(n-2,0)} - (n-2) a_{klx}^{(n-1,0)}\right) + \\ &\qquad + h_{11} C_{n-2}^{n-1-i} \frac{\partial^{n-1-i}}{\partial x^{n-1-i}} \left(a_{kl}^{(n-1,0)}\right) - a_{kl}^{(i,0)} \equiv 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$k,l=1,2$, $i=\overline{0,n-3}$, $h_{11}=0$, если $i=0$ и $h_{11}=1$ в остальных случаях. Тогда система (3) представима в виде

$$\Big(\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\Big)\Big(u_{k(1,1)}+\sum_{\substack{i=0\\ i+j<2}}^{1}\sum_{j=0}^{1}\big(\beta_{k1}^{(i,j)}u_{1(i,j)}+\beta_{k2}^{(i,j)}u_{2(i,j)}\big)\Big)=f_k,\quad k=1,2,\tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}\beta_{kl}^{(1,0)}&=a_{kl}^{(n-1,0)},\\ \beta_{kl}^{(0,1)}&=a_{kl}^{(n-2,1)},\\ \beta_{kl}^{(0,0)}&=a_{kl}^{(n-2,0)}-(n-2)a_{klx}^{(n-1,0)},\quad k,l=1,2.\end{aligned}\tag{7}$$

Доказательство. Перепишем (3) в виде

$$u_{k(n-1,1)}+\sum_{\substack{i=n-2\\ i+j<n}}^{n-1}\sum_{j=0}^{1}\big(a_{k1}^{(i,j)}u_{1(i,j)}+a_{k2}^{(i,j)}u_{2(i,j)}\big)+\\ +\sum_{i=0}^{n-3}\sum_{l=1}^{2}a_{kl}^{(i,0)}u_{l(i,0)}+\sum_{i=0}^{n-3}\sum_{l=1}^{2}a_{kl}^{(i,1)}u_{l(i,1)}=f_k,\quad k=1,2.$$

Применяя тождества (5), получим

$$u_{k(n-1,1)}+\sum_{\substack{i=n-2\\ i+j<n}}^{n-1}\sum_{j=0}^{1}\big(a_{k1}^{(i,j)}u_{1(i,j)}+a_{k2}^{(i,j)}u_{2(i,j)}\big)+\\ +\sum_{i=0}^{n-3}\sum_{l=1}^{2}\Big[C_{n-2}^{i}\frac{\partial^{n-2-i}}{\partial x^{n-2-i}}\big(a_{kl}^{(n-2,0)}-(n-2)a_{klx}^{(n-1,0)}\big)+\\ +h_{11}C_{n-2}^{n-1-i}\frac{\partial^{n-1-i}}{\partial x^{n-1-i}}\big(a_{kl}^{(n-1,0)}\big)\Big]u_{l(i,0)}+\\ +\sum_{i=0}^{n-3}\sum_{l=1}^{2}C_{n-2}^{i}\frac{\partial^{n-2-i}}{\partial x^{n-2-i}}\big(a_{kl}^{(n-2,1)}\big)u_{l(i,1)}=f_k,\quad k=1,2.\tag{8}$$

Используя формулу Лейбница, преобразуем слагаемые в (8):

$$u_{k(n-1,1)}=\frac{\partial^{n-2}u_{k(1,1)}}{\partial x^{n-2}};$$

$$\sum_{i=0}^{n-3}\sum_{l=1}^{2}\big(C_{n-2}^{i}\frac{\partial^{n-2-i}}{\partial x^{n-2-i}}\big(a_{kl}^{(n-2,0)}-(n-2)a_{klx}^{(n-1,0)}\big)u_{l(i,0)}=\\ =\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\big(a_{kl}^{(n-2,0)}-(n-2)a_{klx}^{(n-1,0)}\big)u_{l(0,0)}-$$

$$-\sum_{l=1}^{2}\big(a_{kl}^{(n-2,0)}-(n-2)a_{klx}^{(n-1,0)}\big)u_{l(n-2,0)}; \tag{9}$$

$$\sum_{i=0}^{n-3}\sum_{l=1}^{2}h_{11}C_{n-2}^{n-1-i}\frac{\partial^{n-1-i}}{\partial x^{n-1-i}}\big(a_{kl}^{(n-1,0)}\big)u_{l(i,0)}=\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\big(a_{kl}^{(n-1,0)}\big)u_{l(1,0)}-$$

$$-\sum_{l=1}^{2}(n-2)a_{klx}^{(n-1,0)}u_{l(n-2,0)}-\sum_{l=1}^{2}a_{kl}^{(n-1,0)}u_{l(n-1,0)};$$

$$\sum_{i=0}^{n-3}\sum_{l=1}^{2}C_{n-2}^{i}\frac{\partial^{n-2-i}}{\partial x^{n-2-i}}\big(a_{kl}^{(n-2,1)}\big)u_{l(i,1)}=$$

$$=\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\big(a_{kl}^{(n-2,1)}\big)u_{l(0,1)}-\sum_{l=1}^{2}a_{kl}^{(n-2,1)}u_{l(n-2,1)}.$$

Подставляя теперь (9) в (8), получаем (6) с коэффициентами (7). Теорема доказана. □

Таким образом, задача 1 редуцируется к трем задачам:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^{n-2}w_k}{\partial x^{n-2}}=f_k,\\
\frac{\partial^{p}w_k(x_0,y)}{\partial x^{p}}=\frac{\partial\varphi_{k,p+1}}{\partial y}+\sum_{\substack{i=0\\ i+j<2}}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{q=0}^{p}\Big(C_p^{q-p}\frac{\partial^{q-p}\beta_{k1}^{(i,j)}}{\partial x^{q-p}}\frac{\partial^{j}\varphi_{1,p+i}}{\partial y^{j}}+\\
+C_p^{q-p}\frac{\partial^{q-p}\beta_{k2}^{(i,j)}}{\partial x^{q-p}}\frac{\partial^{j}\varphi_{2,p+i}}{\partial y^{j}}\Big),\quad k=1,2,\ p=\overline{0,n-3}.
\end{gathered}\tag{10}$$

$$u_{k(1,1)}+\sum_{\substack{i=0\\ i+j<2}}^{1}\sum_{j=0}^{1}\Big(\beta_{k1}^{(i,j)}u_{1(i,j)}+\beta_{k2}^{(i,j)}u_{2(i,j)}\Big)=w_k, \tag{11}$$

$$\begin{gathered}
u_{k(0,0)}(x_0,y)=\varphi_{k0}(y),\quad u_{k(0,0)}(x,y_0)=\psi_{k0}(x),\\
\varphi_{k0}(y_0)=\psi_{k0}(x_0),\quad k=1,2.
\end{gathered}\tag{12}$$

Задачи (10), (11)–(12) следует решать последовательно начиная с первой из них. Функции w_k $(k=1,2)$ из (10) вычисляются непосредственным интегрированием уравнений, при этом y выступает в качестве параметра. Условия, обеспечивающие возможность разрешимости задачи (11)–(12) в квадратурах, получены в [21] (формулы (3)–(5) в [21]). Учитывая (7), запишем эти условия через коэффициенты системы (3):

$$a_{12}^{(n-2,1)}\neq 0,\quad a_{21}^{(n-1,0)}\neq 0. \tag{13}$$

$$\begin{gathered}
a_{12}^{(n-1,0)}\equiv 0,\quad a_{21}^{(n-2,1)}\equiv 0,\\
a_{1ly}^{(n-2,1)}+a_{11}^{(n-1,0)}a_{1l}^{(n-2,1)}-\big(a_{1l}^{(n-2,0)}-(n-2)a_{1lx}^{(n-1,0)}\big)\equiv 0,\\
a_{2lx}^{(n-1,0)}+a_{2l}^{(n-1,0)}a_{22}^{(n-2,1)}-\big(a_{2l}^{(n-2,0)}-(n-2)a_{2lx}^{(n-1,0)}\big)\equiv 0,\ l=1,2.
\end{gathered}\tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
&1)\quad a_{22x}^{(n-1,0)} - a_{11y}^{(n-2,1)} - (\ln a_{12}^{(n-2,1)})_{xy} + a_{21}^{(n-1,0)} a_{12}^{(n-2,1)} \equiv 0;\\
&2)\quad a_{21}^{(n-1,0)} \equiv 0;\\
&3)\quad a_{22x}^{(n-1,0)} - a_{11y}^{(n-2,1)} - (\ln a_{12}^{(n-2,1)})_{xy} \equiv 0,\\
&\qquad a_{11y}^{(n-2,1)} - a_{22x}^{(n-1,0)} + (\ln a_{12}^{(n-2,1)})_{xy} - a_{21}^{(n-1,0)} a_{12}^{(n-2,1)} \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0;\\
&4)\quad 2\big[a_{11y}^{(n-2,1)} - a_{22x}^{(n-1,0)} + (\ln a_{12}^{(n-2,1)})_{xy}\big] \equiv a_{21}^{(n-1,0)} a_{12}^{(n-2,1)},\\
&\qquad a_{11y}^{(n-2,1)} - a_{22x}^{(n-1,0)} + (\ln a_{12}^{(n-2,1)})_{xy} \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0;\\
&5)\quad a_{22x}^{(n-1,0)} - a_{11y}^{(n-2,1)} - (\ln a_{12}^{(n-2,1)})_{xy} \equiv\\
&\qquad\qquad \equiv a_{21}^{(n-1,0)} a_{12}^{(n-2,1)} \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0;\\
&6)\quad m\big[a_{22x}^{(n-1,0)} - (\ln a_{12}^{(n-2,1)})_{xy}\big] - a_{11y}^{(n-2,1)} \equiv\\
&\qquad\qquad \equiv m a_{11y}^{(n-2,1)} - a_{22x}^{(n-1,0)} + (\ln a_{12}^{(n-2,1)})_{xy} \equiv\\
&\qquad\qquad\qquad \equiv (m-1)\big(a_{21}^{(n-1,0)} a_{12}^{(n-2,1)} - a_{11y}^{(n-2,1)}\big);\\
&7)\quad \sigma_k = \frac{2s_k'(x)t_k'(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2},\\
&\qquad \big[s_k(x)+t_k(y)\big](m-2)s_k'(x)t_k'(y) \neq 0, \quad k=1,2.
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&1)\quad a_{12}^{(n-2,1)} \equiv 0;\\
&2)\quad a_{11y}^{(n-2,1)} - a_{22x}^{(n-1,0)} - (\ln a_{21}^{(n-1,0)})_{xy} + a_{21}^{(n-1,0)} a_{12}^{(n-2,1)} \equiv 0;\\
&3)\quad a_{22x}^{(n-1,0)} - a_{11y}^{(n-2,1)} + (\ln a_{12}^{(n-1,0)})_{xy} \equiv 0,\\
&\qquad -a_{21}^{(n-1,0)} a_{12}^{(n-2,1)} \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0;\\
&4)\quad a_{11y}^{(n-2,1)} - a_{22x}^{(n-1,0)} - (\ln a_{21}^{(n-1,0)})_{xy} \equiv\\
&\qquad\qquad \equiv a_{21}^{(n-1,0)} a_{12}^{(n-2,1)} \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0;\\
&5)\quad 2[a_{22x}^{(n-1,0)} - a_{11y}^{(n-2,1)} + (\ln a_{12}^{(n-1,0)})_{xy}] \equiv a_{21}^{(n-1,0)} a_{12}^{(n-2,1)},\\
&\qquad a_{22x}^{(n-1,0)} - a_{11y}^{(n-2,1)} + (\ln a_{21}^{(n-1,0)})_{xy} \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0;\\
&6)\quad m a_{22x}^{(n-1,0)} - a_{11y}^{(n-2,1)} + (\ln a_{21}^{(n-1,0)})_{xy} \equiv\\
&\qquad\qquad \equiv m(a_{11y}^{(n-2,1)} - (\ln a_{21}^{(n-1,0)})_{xy}) - a_{22x}^{(n-1,0)} \equiv\\
&\qquad\qquad\qquad \equiv (m-1)\big(a_{21}^{(n-1,0)} a_{12}^{(n-2,1)} - a_{22x}^{(n-1,0)}\big);\\
&7)\quad \sigma_k = \frac{2s_k'(x)t_k'(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2},\\
&\qquad [s_k(x)+t_k(y)](m-2)s_k'(x)t_k'(y) \neq 0, \quad k=1,2.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Здесь ξ_k, $\eta_k \in C^1$ $(k=\overline{0,2})$; s_k, t_k, $m \in C^2$ $(k=1,2)$; σ_1, σ_2 равны соответственно левым частям тождеств 1), 2) рассматриваемой совокупности.

Каждого из тождеств 1), 2) и наборов 3)–5) из (15), (16) достаточно для разрешимости в квадратурах задачи (11)–(12). Формулами же 6), 7) следует пользоваться совместно: при выполнении набора 6) задача (11)–(12) разрешима в квадратурах, когда левая часть хотя бы одного из соотношений 1), 2) имеет вид σ_k, указанный в 7).

Аналогом теоремы 1 из [21] является

Теорема 2. *Если наряду с выполнением условий* (5), (14), *первого неравенства* (13) (*второго неравенства* (13)) *или удовлетворяется одно из условий* 1), 2) *совокупности* (15) (*совокупности* (16)), *или существуют такие функции* m, ξ_k, η_k ($k=\overline{0,2}$), s_k, t_k ($k=1,2$) *указанных выше классов, что для совокупности* (15) (*совокупности* (16)) *либо выполнена одна из трех групп соотношений* 3)–5), *либо вместе с условием* 6) *имеет место представление* 7) *для одной из двух функций* σ_1, σ_2, *то задача* 1 *разрешима в квадратурах.*

Рассмотрим теперь в области D систему (2) при $r=1$, $s=n-1$:

$$u_{k(1,n-1)}+\sum_{\substack{i=0\\ i+j<n}}^{1}\sum_{j=0}^{n-1}\big(a_{k1}^{(i,j)}u_{1(i,j)}+a_{k2}^{(i,j)}u_{2(i,j)}\big)=f_k,\quad k=1,2,\ n>2. \tag{17}$$

Задача 2. *В области D найти регулярное решение системы* (17), *удовлетворяющее условиям*

$$u_{k(0,0)}(x_0,y)=\varphi_{k0}(y),\quad u_{k(0,p)}(x,y_0)=\psi_{kp}(x),\quad k=1,2,\quad p=\overline{0,n-2}.$$

Предполагается, что $\psi_{kp}\in C^1(\overline{Y})$, $\varphi_{k0}\in C^{n-1}(\overline{X})$ *и выполняются условия согласования*

$$\psi_{kp}(x_0)=\varphi_{k0}^{(p)}(y_0),\quad k=1,2,\quad p=\overline{0,n-2}.$$

Теорема 3. *Пусть коэффициенты системы* (17) *удовлетворяют условиям*

$$\begin{gathered}C_{n-2}^{j}\frac{\partial^{n-2-j}}{\partial y^{n-2-i}}\big(a_{kl}^{(1,n-2)}\big)-a_{kl}^{(1,j)}\equiv 0,\\ C_{n-2}^{j}\frac{\partial^{n-2-j}}{\partial y^{n-2-j}}\big(a_{kl}^{(0,n-2)}-(n-2)a_{kly}^{(0,n-1)}\big)+\\ +h_{12}C_{n-2}^{n-1-j}\frac{\partial^{n-1-j}}{\partial y^{n-1-j}}\big(a_{kl}^{(0,n-1)}\big)-a_{kl}^{(0,j)}\equiv 0,\end{gathered} \tag{18}$$

$k,l=1,2$, $j=\overline{0,n-3}$, $h_{12}=0$, *если* $j=0$, *и* $h_{12}=1$ *в остальных случаях. Тогда система* (17) *представима в виде*

$$\Big(\frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}}\Big)\Big(u_{k(1,1)}+\sum_{\substack{i=0\\ i+j<2}}^{1}\sum_{j=0}^{1}\big(\beta_{k1}^{(i,j)}u_{1(i,j)}+\beta_{k2}^{(i,j)}u_{2(i,j)}\big)\Big)=f_k,\quad k=1,2,$$

где

$$\beta_{kl}^{(1,0)} = a_{kl}^{(1,n-2)}, \quad \beta_{kl}^{(0,1)} = a_{kl}^{(0,n-1)},$$

$$\beta_{kl}^{(0,0)} = a_{kl}^{(0,n-2)} - (n-2)a_{kly}^{(0,n-1)}, \quad k,l = 1,2.$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1. Аналогами условий (13)–(16) соответственно являются

$$a_{12}^{(0,n-1)} \neq 0, \quad a_{21}^{(1,n-2)} \neq 0. \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &a_{12}^{(1,n-2)} \equiv 0, \quad a_{21}^{(0,n-1)} \equiv 0,\\ &a_{1ly}^{(0,n-1)} + a_{11}^{(1,n-2)} a_{1l}^{(0,n-1)} - \big(a_{1l}^{(0,n-2)} - (n-2)a_{1ly}^{(0,n-1)}\big) \equiv 0,\\ &a_{2lx}^{(1,n-2)} + a_{2l}^{(1,n-2)} a_{22}^{(0,n-1)} - \big(a_{2l}^{(0,n-2)} - (n-2)a_{2ly}^{(0,n-1)}\big) \equiv 0, \quad l = 1,2. \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
&1)\quad a_{22x}^{(1,n-2)} - a_{11y}^{(0,n-1)} - (\ln a_{12}^{(0,n-1)})_{xy} + a_{21}^{(1,n-2)} a_{12}^{(0,n-1)} \equiv 0;\\
&2)\quad a_{21}^{(1,n-2)} \equiv 0;\\
&3)\quad a_{22x}^{(1,n-2)} - a_{11y}^{(0,n-1)} - (\ln a_{12}^{(0,n-1)})_{xy} \equiv 0,\\
&\qquad a_{11y}^{(0,n-1)} - a_{22x}^{(1,n-2)} + (\ln a_{12}^{(0,n-1)})_{xy} - a_{21}^{(1,n-2)} a_{12}^{(0,n-1)} \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0;\\
&4)\quad 2\big[a_{11y}^{(0,n-1)} - a_{22x}^{(1,n-2)} + (\ln a_{12}^{(0,n-1)})_{xy}\big] \equiv a_{21}^{(1,n-2)} a_{12}^{(0,n-1)},\\
&\qquad a_{11y}^{(0,n-1)} - a_{22x}^{(1,n-2)} + (\ln a_{12}^{(0,n-1)})_{xy} \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0;\\
&5)\quad a_{22x}^{(1,n-2)} - a_{11y}^{(0,n-1)} - (\ln a_{12}^{(0,n-1)})_{xy} \equiv\\
&\qquad\qquad \equiv a_{21}^{(1,n-2)} a_{12}^{(0,n-1)} \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0;\\
&6)\quad m[a_{22x}^{(1,n-2)} - (\ln a_{12}^{(0,n-1)})_{xy}] - a_{11y}^{(0,n-1)} \equiv\\
&\qquad\qquad \equiv m a_{11y}^{(0,n-1)} - a_{22x}^{(1,n-2)} + (\ln a_{12}^{(0,n-1)})_{xy} \equiv\\
&\qquad\qquad \equiv (m-1)(a_{21}^{(1,n-2)} a_{12}^{(0,n-1)} - a_{11y}^{(0,n-1)});\\
&7)\quad \sigma_k = \frac{2s_k'(x)t_k'(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2},\\
&\qquad [s_k(x)+t_k(y)](m-2)s_k'(x)t_k'(y) \neq 0, \quad k = 1,2.
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
&1)\quad a_{12}^{(n-2,1)} \equiv 0;\\
&2)\quad -a_{22x}^{(1,n-2)} + a_{11y}^{(0,n-1)} - (\ln a_{21}^{(1,n-2)})_{xy} + a_{21}^{(1,n-2)} a_{12}^{(0,n-1)} \equiv 0;\\
&3)\quad a_{22x}^{(1,n-2)} - a_{11y}^{(0,n-1)} + (\ln a_{12}^{(1,n-2)})_{xy} \equiv 0,\\
&\qquad -a_{21}^{(1,n-2)} a_{12}^{(0,n-1)} \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&4)\quad a^{(0,n-1)}_{11y} - a^{(1,n-2)}_{22x} - (\ln a^{(1,n-2)}_{21})_{xy} \equiv \\
&\qquad\qquad \equiv a^{(1,n-2)}_{21} a^{(0,n-1)}_{12} \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0; \\
&5)\quad 2\big[a^{(1,n-2)}_{22x} - a^{(0,n-1)}_{11y} + (\ln a^{(1,n-2)}_{12})_{xy}\big] \equiv a^{(1,n-2)}_{21} a^{(0,n-1)}_{12}, \\
&\quad\ \ a^{(1,n-2)}_{22x} - a^{(0,n-1)}_{11y} + (\ln a^{(1,n-2)}_{21})_{xy} \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0; \\
&6)\quad m a^{(1,n-2)}_{22x} - a^{(0,n-1)}_{11y} + (\ln a^{(1,n-2)}_{21})_{xy} \equiv \\
&\qquad\qquad \equiv m\big(a^{(0,n-1)}_{11y} - (\ln a^{(1,n-2)}_{21})_{xy}\big) - a^{(1,n-2)}_{22x} \equiv \\
&\qquad\qquad\qquad \equiv (m-1)\big(a^{(1,n-2)}_{21} a^{(0,n-1)}_{12} - a^{(1,n-2)}_{22x}\big); \\
&7)\quad \sigma_k = \frac{2s'_k(x)t'_k(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2}, \\
&\quad\ \ [s_k(x)+t_k(y)](m-2)s'_k(x)t'_k(y) \neq 0, \quad k=1,2.
\end{aligned} \tag{22}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Пусть при выполнении условий* (18), (20), *первого неравенства* (19) (*второго неравенства* (19)) *или удовлетворяется одно из условий* 1), 2) *совокупности* (21) (*совокупности* (22)), *или существуют такие функции* m, ξ_k, η_k $(k=\overline{0,2})$, s_k, t_k $(k=1,2)$, *что для совокупности* (21) (*совокупности* (22)) *либо выполнена одна из трех групп соотношений* 3)–5), *либо вместе с условием* 6) *имеет место представление* 7) *для одной из двух функций* σ_1, σ_2. *Тогда задача* 2 *разрешима в квадратурах.*

2. Условия разрешимости основной задачи в квадратурах. Перейдем теперь к отысканию условий разрешимости задачи Гурса в квадратурах для системы (2) при произвольных r и s.

Задача 3. *В области* D *найти регулярное решение системы* (2), *удовлетворяющее условиям*

$$u_{k(p,0)}(x_0,y) = \varphi_{kp}(y), \quad u_{k(0,m)}(x,y_0) = \psi_{km}(x),$$
$$k=1,2, \quad p=\overline{0,r-1}, \ m=\overline{0,s-1}.$$

Здесь $\varphi_{kp} \in C^1(\overline{X})$ $(p=\overline{1,r-1})$, $\psi_{km} \in C^1(\overline{Y})$ $(m=\overline{1,s-1})$, $\varphi_{k0} \in C^s(\overline{X})$, $\psi_{k0} \in C^r(\overline{Y})$ *и выполняются условия согласования*

$$\varphi_{kp}(y_0) = \psi^{(p)}_{k0}(x_0), \quad \psi_{km}(x_0) = \varphi^{(m)}_{k0}(y_0), \quad k=1,2, \ p=\overline{0,r-1}, \ m=\overline{0,s-1}.$$

Теорема 5. *Пусть коэффициенты системы* (2) *удовлетворяют условиям*

$$\begin{aligned}
&C^j_{s-1}\frac{\partial^{s-1-j}}{\partial y^{s-1-j}}\big(a^{(i,s-1)}_{kl} - h_{21}(s-1)a^{(i,s)}_{kly}\big) - a^{(i,j)}_{kl} \equiv 0, \\
&\qquad i=\overline{0,r} \wedge j=0, \quad j=\overline{1,s-2} \wedge i=r; \\
&C^{s-j}_{s-1}\frac{\partial^{s-j}}{\partial y^{s-j}}\big(a^{(i,s)}_{kl}\big) + C^j_{s-1}\frac{\partial^{s-1-j}}{\partial y^{s-1-j}}\big(a^{(i,s-1)}_{kl} - (s-1)a^{(i,s)}_{kly}\big) - a^{(i,j)}_{kl} \equiv 0, \\
&\qquad i=\overline{0,r-1} \wedge j=\overline{1,s-2};
\end{aligned} \tag{23}$$

$k, l = 1, 2$, $h_{21} = 0$, если $i = r$ и $h_{21} = 1$ в остальных случаях. Тогда система (2) представима в виде

$$\Big(\frac{\partial^{s-1}}{\partial y^{s-1}}\Big)\Bigg(u_{k(r,1)} + \sum_{\substack{i=0\\ i+j<r+1}}^{r}\sum_{j=0}^{1}\big(\beta_{k1}^{(i,j)}u_{1(i,j)} + \beta_{k2}^{(i,j)}u_{2(i,j)}\big)\Bigg) = f_k, \quad k = 1, 2, \qquad (24)$$

где

$$\begin{gathered}\beta_{kl}^{(r,0)} = a_{kl}^{(r,s-1)}, \quad \beta_{kl}^{(i,1)} = a_{kl}^{(i,s)},\\ \beta_{kl}^{(i,0)} = a_{kl}^{(i,s-1)} - (s-1)a_{kly}^{(i,s)}, \quad k, l = 1, 2, \ i = \overline{0, r-1}.\end{gathered} \qquad (25)$$

Доказательство. Перепишем (2) в виде

$$\begin{gathered}u_{k(r,s)} + \sum_{i=0}^{r}\sum_{l=1}^{2}a_{kl}^{(i,0)}u_{l(i,0)} + \sum_{j=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{2}a_{kl}^{(r,j)}u_{l(r,j)} +\\ + \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{2}a_{kl}^{(i,j)}u_{l(i,j)} + \sum_{\substack{i=0\\ i+j<r+s}}^{r}\sum_{j=s-1}^{s}\sum_{l=1}^{2}a_{kl}^{(i,j)}u_{l(i,j)} = f_k, \quad k = 1, 2.\end{gathered} \qquad (26)$$

Применяя (23), (25) и формулу Лейбница, преобразуем слагаемые в (26):

$$u_{k(r,s)} = \frac{\partial^{s-1}u_{k(r,1)}}{\partial y^{s-1}};$$

$$\sum_{i=0}^{r}\sum_{l=1}^{2}a_{kl}^{(i,0)}u_{l(i,0)} = \sum_{i=0}^{r}\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial^{s-1}\beta_{kl}^{(i,0)}}{\partial y^{s-1}}u_{l(i,0)};$$

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{2}a_{kl}^{(r,j)}u_{l(r,j)} = \sum_{j=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{2}C_{s-1}^{j}\frac{\partial^{s-1-j}\beta_{kl}^{(r,0)}}{\partial y^{s-1-j}}u_{l(r,j)} =\\ = \sum_{l=1}^{2}\frac{\partial^{s-1}}{\partial y^{s-1}}\big(\beta_{kl}^{(r,0)}u_{l(r,0)}\big) - \sum_{l=1}^{2}\frac{\partial^{s-1}\beta_{kl}^{(r,0)}}{\partial y^{s-1}}u_{l(r,0)} - \sum_{l=1}^{2}\beta_{kl}^{(r,0)}u_{l(r,s-1)};\end{gathered} \qquad (27)$$

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{2}a_{kl}^{(i,j)}u_{l(i,j)} =\\ = \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{2}\Big(C_{s-1}^{s-j}\frac{\partial^{s-j}\beta_{kl}^{(i,1)}}{\partial y^{s-j}} + C_{s-1}^{j}\frac{\partial^{s-1-j}\beta_{kl}^{(i,0)}}{\partial y^{s-1-j}}\Big)u_{l(i,j)} =\\ = \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial^{s-1}}{\partial y^{s-1}}\big(\beta_{kl}^{(i,1)}u_{l(i,1)}\big) + \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial^{s-1}}{\partial y^{s-1}}\big(\beta_{kl}^{(i,0)}u_{l(i,0)}\big) -\end{gathered}$$

$$-\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{l=1}^{2}\big(\beta_{kl}^{(i,1)}u_{l(i,s)}+(s-1)\beta_{kly}^{(i,1)}u_{l(i,s-1)}\big)-$$
$$-\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{l=1}^{2}\Big(\frac{\partial^{s-1}\beta_{kl}^{(i,0)}}{\partial y^{s-1}}u_{l(i,0)}+\beta_{kl}^{(i,0)}u_{l(i,s-1)}\Big);$$

$$\sum_{\substack{i=0\\ i+j<r+s}}^{r}\sum_{j=s-1}^{s}\sum_{l=1}^{2}a_{kl}^{(i,j)}u_{l(i,j)}=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{l=1}^{2}\beta_{kl}^{(i,1)}u_{l(i,s)}+$$
$$+\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{l=1}^{2}\big(\beta_{kl}^{(i,0)}+(s-1)\beta_{kly}^{(i,1)}\big)u_{l(i,s-1)}+\beta_{kl}^{(r,0)}u_{l(r,s-1)}.$$

Подставляя (27) в (26), получаем (24) с коэффициентами (25). Теорема доказана. □

Аналогичным образом доказывается теорема

Теорема 6. *Пусть коэффициенты системы* (2) *удовлетворяют условиям*

$$\begin{gathered}C_{r-1}^{i}\frac{\partial^{r-1-i}}{\partial x^{r-1-i}}\big(a_{kl}^{(r-1,j)}-h_{22}(r-1)a_{klx}^{(r,j)}\big)-a_{kl}^{(i,j)}\equiv 0,\\ j=\overline{0,s}\wedge i=0,\quad i=\overline{1,r-2}\wedge j=s;\\ C_{r-1}^{r-i}\frac{\partial^{r-i}}{\partial x^{r-i}}a_{kl}^{(r,j)}+C_{r-1}^{i}\frac{\partial^{r-1-i}}{\partial x^{r-1-i}}\big(a_{kl}^{(r-1,j)}-(r-1)a_{klx}^{(r,j)}\big)-a_{kl}^{(i,j)}\equiv 0,\\ i=\overline{1,r-2}\wedge j=\overline{0,s-1};\end{gathered}\tag{28}$$

$k,l=1,2,$ $h_{22}=0,$ *если* $j=s$ *и* $h_{22}=1$ *в остальных случаях. Тогда система* (2) *представима в виде*

$$\Big(\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}}\Big)\Bigg(u_{k(1,s)}+\sum_{\substack{i=0\\ i+j<s+1}}^{1}\sum_{j=0}^{s}\big(\beta_{k1}^{(i,j)}u_{1(i,j)}+\beta_{k2}^{(i,j)}u_{2(i,j)}\big)\Bigg)=f_k,\quad k=1,2,$$

где

$$\begin{gathered}\beta_{kl}^{(0,s)}=a_{kl}^{(r-1,s)},\quad \beta_{kl}^{(1,j)}=a_{kl}^{(r,j)},\\ \beta_{kl}^{(0,j)}=a_{kl}^{(r-1,j)}-(r-1)a_{klx}^{(r,j)},\quad k,l=1,2,\quad j=\overline{0,s-1}.\end{gathered}$$

Пусть теперь для системы (2) выполнены условия теоремы 5, т. е. имеют место тождества (23). Тогда задача 3 оказывается редуцированной к трем задачам:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^{s-1} w_k}{\partial y^{s-1}} = f_k, \\
\frac{\partial^p w_k(x, y_0)}{\partial y^p} = \frac{\partial^r \psi_{k,p+1}}{\partial x^r} + \\
+ \sum_{\substack{i=0\\ i+j<r+1}}^{r} \sum_{j=0}^{1} \sum_{q=0}^{p} \Big(C_p^{q-p} \frac{\partial^{q-p} \beta_{k1}^{(i,j)}}{\partial y^{q-p}} \frac{\partial^i \psi_{1,p+j}}{\partial x^i} + C_p^{q-p} \frac{\partial^{q-p} \beta_{k2}^{(i,j)}}{\partial y^{q-p}} \frac{\partial^i \psi_{2,p+j}}{\partial x^i} \Big), \\
k = 1, 2, \ p = \overline{0, s-2}.
\end{gathered} \tag{29}
$$

$$
\begin{gathered}
u_{k(r,1)} + \sum_{\substack{i=0\\ i+j<r+1}}^{r} \sum_{j=0}^{1} \big(\beta_{k1}^{(i,j)} u_{1(i,j)} + \beta_{k2}^{(i,j)} u_{2(i,j)} \big) = w_k, \\
u_{k(0,0)}(x_0, y) = \varphi_{k0}(y), \quad u_{k(0,0)}(x, y_0) = \psi_{k0}(x), \\
\varphi_{k0}(y_0) = \psi_{k0}(x_0), \quad k = 1, 2.
\end{gathered} \tag{30}
$$

Задачи (29), (30) следует решать последовательно начиная с первой из них. Функции w_k ($k = 1, 2$) из (29) вычисляются непосредственным интегрированием уравнений, при этом x выступает в качестве параметра. Задача (30) аналогична задаче (3)–(4). Как известно из п. 1, условия, обеспечивающие разрешимость этой задачи в квадратурах, определяются неравенствами (13), тождествами (5), (14) и соотношениями (15), (16). Учитывая (25), запишем указанные условия через коэффициенты системы (2) (для этого в указанных формулах $a_{kl}^{(i,j)}$ необходимо заменить соответственно на $\beta_{kl}^{(i,j)}$ и затем воспользоваться формулами (25)):

$$
a_{12}^{(r-1,s)} \neq 0, \quad a_{21}^{(r,s-1)} \neq 0. \tag{31}
$$

$$
\begin{gathered}
C_{r-1}^{i} \frac{\partial^{r-1-i}}{\partial x^{r-1-i}} \big(a_{kl}^{(r-1,s)} \big) - a_{kl}^{(i,s)} \equiv 0; \\
C_{r-1}^{i} \frac{\partial^{r-1-i}}{\partial x^{r-1-i}} \big[a_{kl}^{(r-1,s-1)} - (s-1) a_{kly}^{(r-1,s)} - (r-1) a_{klx}^{(r,s-1)} \big] + \\
+ h_{11} C_{r-1}^{r-i} \tfrac{\partial^{r-i}}{\partial x^{r-i}} \big(a_{kl}^{(r,s-1)} \big) - \big(a_{kl}^{(i,s-1)} - (s-1) a_{kly}^{(i,s)} \big) \equiv 0, \\
i = \overline{0, r-2}, \quad k = 1, 2, \quad l = 1, 2.
\end{gathered} \tag{32}
$$

$$
\begin{gathered}
a_{12}^{(r,s-1)} \equiv 0, \quad a_{21}^{(r-1,s)} \equiv 0, \\
a_{1ly}^{(r-1,s)} + a_{11}^{(r,s-1)} a_{1l}^{(r-1,s)} - \\
- \big(a_{1l}^{(r-1,s-1)} - (s-1) a_{1ly}^{(r-1,s)} - (r-1) a_{1lx}^{(r,s-1)} \big) \equiv 0, \\
a_{2lx}^{(r,s-1)} + a_{2l}^{(r,s-1)} a_{22}^{(r-1,s)} - \\
- \big(a_{2l}^{(r-1,s-1)} - (s-1) a_{2ly}^{(r-1,s)} - (r-1) a_{2lx}^{(r,s-1)} \big) \equiv 0, \\
l = 1, 2.
\end{gathered} \tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
&1)\quad a_{22x}^{(r,s-1)} - a_{11y}^{(r-1,s)} - (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy} + a_{21}^{(r,s-1)} a_{12}^{(r-1,s)} \equiv 0;\\
&2)\quad a_{21}^{(r,s-1)} \equiv 0;\\
&3)\quad a_{22x}^{(r,s-1)} - a_{11y}^{(r-1,s)} - (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy} \equiv 0,\\
&\qquad a_{11y}^{(r-1,s)} - a_{22x}^{(r,s-1)} + (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy} - a_{21}^{(r,s-1)} a_{12}^{(r-1,s)} \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0;\\
&4)\quad 2[a_{11y}^{(r-1,s)} - a_{22x}^{(r,s-1)} + (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy}] \equiv a_{21}^{(r,s-1)} a_{12}^{(r-1,s)},\\
&\qquad a_{11y}^{(r-1,s)} - a_{22x}^{(r,s-1)} + (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy} \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0;\\
&5)\quad a_{22x}^{(r,s-1)} - a_{11y}^{(r-1,s)} - (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy} \equiv a_{21}^{(r,s-1)} a_{12}^{(r-1,s)} \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0;\\
&6)\quad m\big[a_{22x}^{(r,s-1)} - (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy}\big] - a_{11y}^{(r-1,s)} \equiv\\
&\qquad\qquad \equiv m a_{11y}^{(r-1,s)} - a_{22x}^{(r,s-1)} + (\ln a_{12}^{(r-1,s)})_{xy} \equiv\\
&\qquad\qquad\qquad \equiv (m-1)\big(a_{21}^{(r,s-1)} a_{12}^{(r-1,s)} - a_{11y}^{(r-1,s)}\big);\\
&7)\quad \sigma_k = \frac{2s_k'(x)t_k'(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2},\\
&\qquad [s_k(x)+t_k(y)](m-2)s_k'(x)t_k'(y) \neq 0, \quad k=1,2.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

$$
\begin{aligned}
&1)\quad a_{12}^{(r-1,s)} \equiv 0;\\
&2)\quad a_{11y}^{(r-1,s)} - a_{22x}^{(r,s-1)} - (\ln a_{21}^{(r,s-1)})_{xy} + a_{21}^{(r,s-1)} a_{12}^{(r-1,s)} \equiv 0;\\
&3)\quad a_{22x}^{(r,s-1)} - a_{11y}^{(r-1,s)} + (\ln a_{21}^{(r,s-1)})_{xy} \equiv 0,\\
&\qquad -a_{21}^{(r,s-1)} a_{12}^{(r-1,s)} \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0;\\
&4)\quad a_{11y}^{(r-1,s)} - a_{22x}^{(r,s-1)} - (\ln a_{21}^{(r,s-1)})_{xy} \equiv a_{21}^{(r,s-1)} a_{12}^{(r-1,s)} \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0;\\
&5)\quad 2[a_{22x}^{(r,s-1)} - a_{11y}^{(r-1,s)} + (\ln a_{21}^{(r,s-1)})_{xy}] \equiv a_{21}^{(r,s-1)} a_{12}^{(r-1,s)},\\
&\qquad a_{22x}^{(r,s-1)} - a_{11y}^{(r-1,s)} + (\ln a_{21}^{(r,s-1)})_{xy} \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0;\\
&6)\quad m a_{22x}^{(r,s-1)} - a_{11y}^{(r-1,s)} + (\ln a_{21}^{(r,s-1)})_{xy} \equiv\\
&\qquad\qquad \equiv m(a_{11y}^{(r-1,s)} - (\ln a_{21}^{(r,s-1)})_{xy}) - a_{22x}^{(r,s-1)} \equiv\\
&\qquad\qquad\qquad \equiv (m-1)\big(a_{21}^{(r,s-1)} a_{12}^{(r-1,s)} - a_{22x}^{(r,s-1)}\big);\\
&7)\quad \sigma_k = \frac{2s_k'(x)t_k'(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2},\\
&\qquad [s_k(x)+t_k(y)](m-2)s_k'(x)t_k'(y) \neq 0, \quad k=1,2.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия* (23), (32), (33), *первое неравенство* (31) (*второе неравенство* (31)) *и для совокупности* (34) (*совокупности* (35)) *или удовлетворяется одно из условий* 1), 2), *или существуют такие функции* m, ξ_k, η_k $(k = \overline{0,2})$, s_k, t_k $(k = 1,2)$, *что либо выполнена одна из трех групп соотношений* 3)–5), *либо вместе с условием* 6) *имеет* *место представление* 7) *для одной из двух функций* σ_1, σ_2. *Тогда задача* 3 *разрешима в квадратурах.*

Пусть теперь для системы (2) выполнены условия теоремы 6. Нетрудно проверить, что в этом случае получим те же условия (34)–(35). При этом должны выполняться неравенства (31), тождества (28), (33) и

$$
\begin{gathered}
C^j_{s-1}\frac{\partial^{s-1-j}}{\partial y^{s-1-j}}(a^{(r,s-1)}_{kl}) - a^{(r,j)}_{kl} \equiv 0;\\
C^j_{s-1}\frac{\partial^{s-1-j}}{\partial y^{s-1-j}}\big[a^{(r-1,s-1)}_{kl} - (r-1)a^{(r,s-1)}_{klx} - (s-1)a^{(r-1,s)}_{kly}\big] + \\
+h_{12}C^{s-j}_{s-1}\frac{\partial^{s-j}}{\partial y^{s-j}}\big(a^{(r-1,s)}_{kl}\big) - \big(a^{(r-1,j)}_{kl} - (r-1)a^{(r,j)}_{klx}\big) \equiv 0,\\
j=\overline{0,s-2},\quad k=1,2,\quad l=1,2.
\end{gathered}
\tag{36}
$$

Итак, справедлива

Теорема 8. *Если выполняются условия* (28), (33), (36), *первое неравенство* (31) (*второе неравенство* (31)) *и для совокупности* (34) (*совокупности* (35)) *или удовлетворяется одно из условий* 1), 2), *или существуют такие функции* m, ξ_k, η_k ($k=\overline{0,2}$), s_k, t_k ($k=1,2$), *что либо выполнена одна из трех групп соотношений* 3)–5), *либо вместе с условием* 6) *имеет место представление* 7) *для одной из двух функций* σ_1, σ_2, *то задача* 3 *разрешима в квадратурах.*

3. Пример. Приведем конкретный пример системы, иллюстрирующий изложенный выше теоретический материал.

Пример. В области D найти решение системы

$$
\begin{cases}
u_{xxy} + a_1u_{xx} + a_2u_{xy} + a_3v_{xx} + a_4v_{xy} + a_5u_x + \\
\qquad +a_6u_y + a_7v_x + a_8v_y + a_9u + a_{10}v = f_1,\\
v_{xxy} + b_1u_{xx} + b_2u_{xy} + b_3v_{xx} + b_4v_{xy} + b_5u_x + \\
\qquad +b_6u_y + b_7v_x + b_8v_y + b_9u + b_{10}v = f_2,
\end{cases}
\tag{37}
$$

удовлетворяющее условиям

$$
\begin{array}{ll}
u(x_0,y) = \varphi_1(y), & u(x,y_0) = \psi_1(x),\\
v(x_0,y) = \varphi_2(y), & v(x,y_0) = \psi_2(x),\\
u_x(x_0,y) = \chi_1(y), & v_x(x_0,y) = \chi_2(y),\\
\varphi_1(y_0) = \psi_1(x_0), & \varphi_2(y_0) = \psi_2(x_0),\\
\chi_1(y_0) = \psi_1'(x_0), & \chi_2(y_0) = \psi_2'(x_0),
\end{array}
\tag{38}
$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \chi_1, \chi_2 \in C^1(\overline{X})$, $\psi_1, \psi_2 \in C^2(\overline{Y})$.

Данная задача является частным случаем задачи 3 при $r=2$, $s=1$. Найдем такие функции α_i ($i=\overline{1,6}$), чтобы первое уравнение (37) имело вид

$$
\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\big(u_{xy} + \alpha_1u_x + \alpha_2u_y + \alpha_3v_x + \alpha_4v_y + \alpha_5u + \alpha_6v\big) = f_1. \tag{39}
$$

Произведя указанные в (39) действия, убеждаемся, что совпадение (37_1) с (39) имеет место, если выполняются тождества

$$\begin{gathered} a_{2x} - a_6 \equiv 0, \quad a_{4x} - a_8 \equiv 0, \\ a_{5x} - a_{1xx} - a_9 \equiv 0, \quad a_{7x} - a_{3xx} - a_{10} \equiv 0, \end{gathered} \tag{40}$$

и при этом

$$\alpha_1 = a_1,\ \alpha_2 = a_2,\ \alpha_3 = a_3,\ \alpha_4 = a_4,\ \alpha_5 = a_5 - a_{1x},\ \alpha_6 = a_7 - a_{3x}. \tag{41}$$

Аналогично получаем, что если имеют место тождества

$$\begin{gathered} b_{2x} - b_6 \equiv 0, \quad b_{4x} - b_8 \equiv 0, \\ b_{5x} - b_{1xx} - b_9 \equiv 0, \quad b_{7x} - b_{3xx} - b_{10} \equiv 0, \end{gathered} \tag{42}$$

то второе уравнение (38) представимо в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\bigl(v_{xy} + \beta_1 u_x + \beta_2 u_y + \beta_3 v_x + \beta_4 v_y + \beta_5 u + \beta_6 v\bigr) = f_2,$$

где

$$\beta_1 = b_1,\ \beta_2 = b_2,\ \beta_3 = b_3,\ \beta_4 = b_4,\ \beta_5 = b_5 - b_{1x},\ \beta_6 = b_7 - b_{3x}. \tag{43}$$

Соотношения (41), (43) могут быть получены непосредственно из (25), а условия (40), (42) — из (23).

Таким образом, рассматриваемую задачу можно редуцировать к трем задачам:

$$\begin{aligned} & w_{1x} = f_1, \\ & w_1(x_0, y) = \chi_{1y} + \alpha_1\chi_1 + \alpha_2\varphi_{1y} + \alpha_3\chi_2 + \alpha_4\varphi_{2y} + \alpha_5\varphi_1 + \alpha_6\varphi_2, \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} & w_{2x} = f_2, \\ & w_2(x_0, y) = \chi_{2y} + \beta_1\chi_1 + \beta_2\varphi_{1y} + \beta_3\chi_2 + \beta_4\varphi_{2y} + \beta_5\varphi_1 + \beta_6\varphi_2, \end{aligned} \tag{45}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & u_{xy} + \alpha_1 u_x + \alpha_2 u_y + \alpha_3 v_x + \alpha_4 v_y + \alpha_5 u + \alpha_6 v = w_1, \\ & v_{xy} + \beta_1 u_x + \beta_2 u_y + \beta_3 v_x + \beta_4 v_y + \beta_5 u + \beta_6 v = w_2, \end{aligned} \right. \tag{46}$$

$$\begin{aligned} u(x_0, y) &= \varphi_1(y), \quad v(x_0, y) = \varphi_2(y), \\ u(x, y_0) &= \psi_1(x), \quad v(x, y_0) = \psi_2(x), \\ \varphi_1(y_0) &= \psi_1(x_0), \quad \varphi_2(y_0) = \psi_2(x_0). \end{aligned} \tag{47}$$

Задачи (44), (45), (46)–(47) следует решать последовательно начиная с первой из них. Функции w_1, w_2 вычисляются непосредственным интегрированием, причем y рассматривается как параметр. Таким образом, остается решить задачу (46)–(47), которая аналогична задаче (30). Как известно из п. 2, условия разрешимости этой задачи в квадратурах определяются неравенствами (31), тождествами (32), (33) и соотношениями (34)–(35). В качестве примера запишем через коэффициенты системы (38) (используя (41), (43)) набор условий, отвечающий соотношениям (5) из (34):

$$\begin{gathered} a_4 \neq 0, \quad a_3 \equiv 0, \\ a_{2y} + a_1 a_2 - a_5 + a_{1x} \equiv 0,\ a_{4y} + a_1 a_4 - a_7 + a_{3x} \equiv 0, \\ b_2 \equiv 0,\ 2b_{1x} + b_1 b_4 - b_5 \equiv 0,\ 2b_{3x} + b_3 b_4 - b_7 \equiv 0, \\ b_{3x} - a_{2y} - (\ln a_4)_{xy} \equiv a_4 b_1 \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0. \end{gathered} \tag{48}$$

Таким образом, при выполнении тождеств (40), (42) и условий (48) рассматриваемая задача разрешима в квадратурах.

Конкурирующие интересы. Я заявляю, что не имею конкурирующих интересов.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Библиографический список

1. Созонтова Е. А. Об условиях разрешимости задачи Гурса в квадратурах для системы уравнений n-го порядка / *Материалы LXIX научной конференции «Герценовские чтения – 2016»*. СПб., 2016. С. 104–106.
2. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // *Journal of Differential Equations*, 1972. vol. 12, no. 3. pp. 559–565. doi: 10.1016/0022-0396(72)90025-3.
3. Rundell W. The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1979. vol. 76, no. 2. pp. 253–257. doi: 10.1090/s0002-9939-1979-0537083-3.
4. Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // *Дифференц. уравнения*, 1982. Т. 18, № 2. С. 280–285.
5. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // *Докл. РАН*, 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552.
6. Джохадзе О. М. Задача типа Дарбу для уравнения третьего порядка с доминирующими младшими членами // *Дифференц. уравнения*, 1996. Т. 32, № 4. С. 523–535.
7. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // *Дифференц. уравнения*, 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.
8. Мамедов И. Г. Формула интегрирования по частям неклассического типа при исследовании задачи Гурса для одного псевдопараболического уравнения // *Владикавк. матем. журн.*, 2011. Т. 13, № 4. С. 40–51.
9. Utkina E. A. Characteristic boundary value problem for a fourth-order equation with a pseudoparabolic operator and with shifted arguments of the unknown function // *Differ. Equ.*, 2015. vol. 51, no. 3. pp. 426–429. doi: 10.1134/s0012266115030143.
10. Mamedov I. G. On a Problem with Conditions on All Boundary for a Pseudoparabolic Equation // *American Journal of Operational Research*, 2013. vol. 13, no. 2. pp. 51–56. doi: 10.5923/j.ajor.20130302.04.
11. Бештоков М. Х. Априорные оценки решения нелокальных краевых задач для псевдопараболического уравнения // *Владикавк. матем. журн.*, 2013. Т. 15, № 3. С. 19–36.
12. Бештоков М. Х. Метод Римана для решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 4(33). С. 15–24. doi: 10.14498/vsgtu1238.
13. Напсо А. Ф. Задача с внутренними условиями для псевдопараболического уравнения // *Владикавк. матем. журн.*, 2001. Т. 3, № 4. С. 36–39.
14. Карсанова Ж. Т., Нахушева Ф. М. Об одной нелокальной краевой задаче для псевдопараболического уравнения третьего порядка // *Владикавк. матем. журн.*, 2002. Т. 4, № 2. С. 31–37.
15. Уткина Е. А. О задачах со смещениями в граничных условиях для двух уравнений с частными производными / *Физико-математические науки* / Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, Т. 148. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2006. С. 76–82.
16. Уткина Е. А. Об уравнениях третьего порядка с псевдопараболическим оператором и смещением аргументов искомой функции // *Изв. вузов. Матем.*, 2015. № 5. С. 62–68.

17. Сопуев А., Аркабаев Н. К. Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2013. № 1(21). С. 16–23.
18. Миронов А. Н., Миронова Л. Б. Об инвариантах Лапласа для одного уравнения четвертого порядка с двумя независимыми переменными // *Изв. вузов. Матем.*, 2014. № 10. С. 27–34.
19. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* Казань: Казанское математическое общество, 2001. 226 с.
20. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доминирующей частной производной.* Казань: Казанский ун-т, 2014. 385 с.
21. Созонтова Е. А. Об условиях разрешимости задачи Гурса в квадратурах для гиперболической системы второго порядка / *Материалы XII молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2015»*. Казань, 2015. С. 140–143.

MSC: 35K70

A conditions of solvability of the Goursat problem in quadratures for the two-dimensional system of high order*

E. A. Sozontova

Elabuga Branch of Kazan (Volga Region) Federal University,
89, Kazanskaya st., Elabuga, 423600, Russian Federation.

Abstract

In this paper we consider the Goursat problem for the two-dimensional system of high order. The purpose is to find sufficient conditions of solvability of the considered problem in quadratures. The method of finding solutions of these problems in explicit calculation based on factorization of equations is devised. As a result the initial problem is reduced to 5 simpler problems: to four Goursat problems for equation and the Goursat problem for hyperbolic system of the second order. The final result in terms of the coefficients of the original system is formulated in two theorems.

Keywords: system of differential equations, Goursat problem, solvability in quadratures.

Received: 6th March, 2016 / Revised: 18th November, 2016 /
Accepted: 9th December, 2016 / First online: 16th April, 2017

Competing interests. I declare I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any sponsorship.

References

1. Sozontova E. A. A conditions of solvability of the Goursat problem in quadratures for the two-dimensional system of n-th order, In: *"Herzen readings – 2016". Materials of the Scientific Conference*. St. Petersburg, 2016, pp. 104–106 (In Russian).
2. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable, *Journal of Differential Equations*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 559–565. doi: 10.1016/0022-0396(72)90025-3.

Research Article

Please cite this article in press as:
Sozontova E. A. A conditions of solvability of the Goursat problem in quadratures for the two-dimensional system of high order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 94–111. doi: 10.14498/vsgtu1479 (In Russian).

Author's Details:
Elena A. Sozontova http://orcid.org/0000-0003-4315-0669
Assistant; Dept. of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry;
e-mail: sozontova-elena@rambler.ru

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the scientific conference "Herzen readings – 2016" (11–15 April, 2016, St. Petersburg, Russian Federation).

3. Rundell W. The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1979, vol. 76, no. 2, pp. 253–257. doi: 10.1090/s0002-9939-1979-0537083-3.
4. Vodakhova V. A. A boundary value problem with non-local A. M. Nakhushev condition for a certain pseudoparabolic moisture transfer equation, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 2, pp. 280–285 (In Russian).
5. Soldatov A. P. An analogue of the Cauchy type integral for elliptic systems, *Sov. Math., Dokl.*, 1987, vol. 34, pp. 167–170.
6. Dzhokhadze O. M. A Darboux-type problem for a third-order equation with dominating lowest terms, *Differ. Equ.*, 1996, vol. 32, no. 4, pp. 524–537.
7. Shkhanukov M. Kh. On some boundary value problems for an equation of third order arising from simulation of filtration of a fluid in porous media, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 4, pp. 689–699 (In Russian).
8. Mamedov I. G. A non-classical formula for integration by parts related to Goursat problem for a pseudoparabolic equation, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2011, vol. 13, no. 4, pp. 40–51 (In Russian).
9. Utkina E. A. Characteristic boundary value problem for a fourth-order equation with a pseudoparabolic operator and with shifted arguments of the unknown function, *Differ. Equ.*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 426–429. doi: 10.1134/s0012266115030143.
10. Mamedov I. G. On a Problem with Conditions on All Boundary for a Pseudoparabolic Equation, *American Journal of Operational Research*, 2013, vol. 13, no. 2, pp. 51–56. doi: 10.5923/j.ajor.20130302.04.
11. Beshtokov M. H. A priori estimates of the solutions of nonlocal boundary value problems for a pseudo-parabolic equation, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 19–36 (In Russian).
12. Beshtokov M. H. Riemann method for solving non-local boundary value problems for the third order pseudoparabolic equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 4(33), pp. 15–24 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1238.
13. Napso A. F. A problem with interior conditions for a pseudoparabolic equation, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2001, vol. 3, no. 4, pp. 36–39 (In Russian).
14. Karsanova Zh. T., Nakhusheva F. M. On a nonlocal boundary value problem for a third-order pseudoparabolic equation, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2002, vol. 4, no. 2, pp. 31–37 (In Russian).
15. Utkina E. A. On problems with displacement in boundary conditions for two partial differential equations, In: *Physics and mathematics*, Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 148. Kazan, Kazan University, 2006, pp. 76–82 (In Russian).
16. Utkina E. A. On a third order equations with pseudoparabolic operator and with shift of arguments of sought-for function, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2015, vol. 59, no. 5, pp. 52–57. doi: 10.3103/S1066369X15050072.
17. Sopuev A., Arkabaev N. K. Interface problems for linear pseudo-parabolic equations of the third order, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2013, no. 1(21), pp. 16–23 (In Russian).
18. Mironov A. N., Mironova L. B. Laplace invariants for a fourth-order equation with two independent variables, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014, vol. 58, no. 10, pp. 22–28. doi: 10.3103/S1066369X14100041.
19. Zhegalov V. I., Mironov A. N. *Differentsial'nye uravneniia so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential equations with leading partial derivatives]. Kazan, Kazan mathematical society, 2001, 226 pp. (In Russian)
20. Zhegalov V. I., Mironov A. N., Utkina E. A. *Uravneniia s dominiruiushchei chastnoi proizvodnoi* [Equations with dominated partial derivative]. Kazan, Kazan University, 2014, 385 pp. (In Russian)
21. Sozontova E. A. On the conditions of solvability of the Goursat problem in quadratures for hyperbolic system of the second order, In: *"Lobachev Readings – 2015". Materials of the XII Youth Scientific School-Conference*. Kazan, 2015, pp. 140–143 (In Russian).