



Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК 517.958:532.51

Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование поля скоростей

Н. В. Бурмашева^{1,2}, *Е. Ю. Просвиряков*²¹ Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19.² Институт машиноведения УрО РАН, Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

Аннотация

Рассматривается точное решение задачи об определении конвективных движений в слоистых крупномасштабных течениях вязкой несжимаемой жидкости в стационарном случае. Показано, что получаемая задача является, во-первых, переопределенной и, во-вторых, нелинейной (за счет наличия членов конвективной производной в уравнении теплопроводности). Также показано, что выбором класса решений систему можно избавить от переопределенности, а уточнением ряда краевых условий свести задачу к задаче исследования термокапиллярной конвекции (конвекции Бенара–Марангони). Далее определяются условия появления противотечений. Исследуется их возможное количество. Кроме того, проводится анализ исследуемого течения на предмет наличия безвихревых областей. Показано, что при некоторых сочетаниях параметров системы возможны смены направления вихря.

Ключевые слова: слоистое течение, противотечения, застойные точки, точное решение.

Получение: 20 января 2017 г. / Исправление: 6 марта 2017 г. /
Принятие: 13 марта 2017 г. / Публикация онлайн: 19 мая 2017 г.

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование поля скоростей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 180–196. doi: [10.14498/vsgtu1527](https://doi.org/10.14498/vsgtu1527).

Сведения об авторах

Наталья Владимировна Бурмашева <http://orcid.org/0000-0003-4711-1894>

кандидат технических наук; доцент; институт математики и компьютерных наук, каф. механики и математического моделирования¹; научный сотрудник; лаб. механики деформаций²; e-mail: nat_burm@mail.ru

Введение. Известно, что в потоке жидкости могут существовать точки, где нулевое значение принимает одна или несколько компонент вектора скорости. Такие точки называются застойными, или критическими [1]. Рядом с такими точками, как правило, образуются застойные зоны, то есть области с обратным течением. Данное утверждение справедливо для решений уравнений Навье—Стокса и их модификаций, являющихся непрерывными функциями координат. Другие точные решения, обладающие застойными точками, приведены в [2–4].

Противотечения возникают, например, в следе за цилиндром при небольших числах Рейнольдса и Фруда в жидкости с небольшим периодом плавучести [5]. Экспериментальные исследования показали, что противотечения наблюдаются в поверхностных, подповерхностных и глубинных слоях практически во всех районах Мирового океана [6–9].

Проблема учета и исследования застойных зон оказывается актуальной не только в задачах, связанных с обтеканием движущихся в жидкой или газообразной среде тел применительно, в частности, к судам и летательным аппаратам. Она возникает, например, при использовании скважин в нефтедобыче [10], когда необходимо определить характер течения в окрестности точки изменения направления потока. Данная проблема также имеет место при обтекании ветром зданий и является определяющей для расчета выбросов вредных веществ техногенных систем.

Теоретическое изучение этих и многих других процессов, связанных с исследованием противотечений, в настоящее время далеко от завершения. В связи с этим отыскание новых точных решений уравнений гидродинамики, описывающих появление застойных зон в жидкости, является актуальной задачей.

Первым изотермическим точным решением, посвященным исследованию застойных точек, является течение Хименца [11]. Исследование противотечений в океане было начато Экмано [12]. В [12] было представлено точное решение, описывающее течение вязкой несжимаемой жидкости при балансе вязких и кориолисовых сил. Давление в этом случае полагалось однородным по горизонтальным координатам.

На основе течений Экмана [12], Чарни [13] и Стоммела [14] были предложены различные математические модели описания экваториальных противотечений. Дальнейшие исследования в этой области опирались на вычислительный эксперимент. Отметим, что в [15–20] построены широкие классы точных решений для описания жидкостей при вращении.

Несмотря на большое число работ, в которых учитывается планетарная завихренность, особый интерес представляют течения жидкости в отсутствие поля сил Кориолиса. В этом случае для описания течений можно использовать «бесконечно замкнутый» горизонтальный слой. В [21–23] приведены точные решения крупномасштабных изотермических течений при постоянном давлении и конвективных движений различной природы. В статьях [24–35] приведены точные решения для конвективных термокапиллярных течений,

которые являются обобщениями течения Остроумова—Бириха [36, 37].

В данной работе мы рассматриваем движение вязкой несжимаемой жидкости под действием заданных на верхней границе тангенциальных сил, не являющихся результатом капиллярного эффекта.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу описания конвективных движений в слоистых крупномасштабных течениях вязкой несжимаемой жидкости в стационарном случае. Наиболее распространенным подходом в таких задачах является использование уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска, предполагающего аппроксимацию плотности как линейную функцию температуры. С математической точки зрения данная модель [38] состоит из

– уравнения Навье—Стокса

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\nabla P + \nu\Delta\mathbf{V} + g\beta T\mathbf{k}, \quad (1)$$

– уравнения теплопроводности

$$\mathbf{V} \cdot \nabla T = \chi\Delta T, \quad (2)$$

– уравнения несжимаемости

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{V}(x, y, z) = \{V_x, V_y, V_z\}$ — вектор скорости, причем $V_z \equiv 0$, так как рассматривается слоистое течение; P — отклонение давления от гидростатического, деленное на постоянную среднюю плотность ρ жидкости; T — отклонение от средней температуры; ν, χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости соответственно; \mathbf{k} — орт оси z , направленной вертикально вверх; ∇ — оператор Гамильтона; Δ — двумерный оператор Лапласа.

Заметим, что данная система суть система из пяти скалярных уравнений относительно четырех неизвестных (компонент скорости V_x, V_y и физических полей T и P). То есть система переопределена. Следовательно, чтобы решать такую систему, надо либо убедиться в непротиворечивости системы условий, либо искать такое решение, на котором одно из имеющихся условий удовлетворится тождественно.

Кроме того, отметим, что члены конвективной производной из уравнения Навье—Стокса и уравнения несжимаемости тождественно равны нулю, но они сохраняются в уравнении теплопроводности. Поэтому, строго говоря, решается нелинейная задача.

2. Условие разрешимости переопределенной системы. Для того чтобы разрешить переопределенную исходную систему (1)–(3) предлагается пойти вторым из предложенных выше путей и искать решение в классе, предложенном в [20, 24]:

$$V_x = u(z), \quad V_y = v(z). \quad (4)$$

В этом случае уравнение неразрывности (3) обращается в тождество:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial u(z)}{\partial x} + \frac{\partial v(z)}{\partial y} \equiv 0.$$

Далее будем искать давление и температуру в виде специальных линейных форм по горизонтальным координатам:

$$T = T_0(z) + T_1(z)x + T_2(z)y, \quad P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y. \quad (5)$$

Подставим выбранный класс (4), (5) в уравнение Навье—Стокса (1):

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta V_x,$$

$$u(z) \frac{\partial u(z)}{\partial x} + v(z) \frac{\partial v(z)}{\partial y} + 0 \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta V_x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y) = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u(z),$$

откуда согласно методу неопределенных коэффициентов получаем

$$P_1 = \nu u''.$$

Здесь и всюду далее штрихом обозначено дифференцирование по переменной z . Аналогично из второго уравнения Навье—Стокса (относительно компоненты V_y) имеем

$$P_2 = \nu v''.$$

Из третьего уравнения сохранения импульсов в жидкости имеем

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta V_z + g\beta T,$$

$$u(z) \frac{\partial u(z)}{\partial x} + v(z) \frac{\partial v(z)}{\partial y} + 0 \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + g\beta T,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = g\beta T$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z} (P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y) = g\beta (T_0(z) + T_1(z)x + T_2(z)y),$$

откуда согласно методу неопределенных коэффициентов получаем три скалярных соотношения:

$$\frac{\partial P_i}{\partial z} = g\beta T_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

И, наконец, подставим выбранный класс решений (4), (5) в уравнение теплопроводности (2):

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T,$$

$$u \frac{\partial T_0(z) + T_1(z)x + T_2(z)y}{\partial x} + v \frac{\partial T_0(z) + T_1(z)x + T_2(z)y}{\partial y} =$$

$$= \chi \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (T_0(z) + T_1(z)x + T_2(z)y),$$

$$uT_1 + vT_2 = \chi T_0''(z) + \chi T_1''(z)x + \chi T_2''(z)y.$$

Отсюда согласно методу неопределенных коэффициентов имеем

$$uT_1 + vT_2 = \chi T_0''(z), \quad T_1''(z) = T_2''(z) = 0.$$

Таким образом, окончательно получаем нелинейную систему уравнений:

$$T_1'' = 0, \quad T_2'' = 0. \quad (6)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = g\beta T_1, \quad \frac{\partial P_2}{\partial z} = g\beta T_2 \quad (7)$$

$$\nu u'' = P_1, \quad \nu v'' = P_2, \quad (8)$$

$$\chi T_0'' = uT_1 + vT_2, \quad (9)$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = g\beta T_0, \quad (10)$$

3. Краевая задача. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (6)–(10) является системой тринадцатого порядка. Следовательно, чтобы корректно определить краевую задачу, необходимо иметь тринадцать условий, заданных на границе слоя, которые будут использованы для определения констант, возникающих в ходе интегрирования рассматриваемой системы.

Будем далее считать, что нижняя граница слоя жидкости является абсолютно твердой и неподвижной. Верхнюю границу будем полагать свободной. В качестве краевых условий рассмотрим следующие:

- пусть на нижней границе ($z = 0$) слоя жидкости выполняется условие прилипания, а температура задается функцией

$$T = Ax + By;$$

- на верхней границе ($z = h$) действует постоянное давление S , а температура задается функцией

$$T = \vartheta + Cx + Dy;$$

- кроме того, на свободной поверхности $z = h$ заданы напряжения:

$$\eta \frac{du}{dz} = \xi_1, \quad \eta \frac{dv}{dz} = \xi_2.$$

Таким образом, приходим к следующей системе граничных условий:

$$\begin{aligned} u(0) &= v(0) = 0, \\ T_0(0) &= 0, & T_1(0) &= A, & T_2(0) &= B, \\ T_0(h) &= \vartheta, & T_1(h) &= C, & T_2(h) &= D, \\ P_0(h) &= S, & P_1(h) &= 0, & P_2(h) &= 0, \\ \eta \frac{du}{dz}(h) &= \xi_1, \end{aligned}$$

$$\eta \frac{dv}{dz}(h) = \xi_2.$$

Без ограничения общности можно считать $S = 0$, тем самым ведя отсчет приведенного давления от уровня, задаваемого на верхней границе.

4. Решение системы уравнений. Рассмотрим частный случай поставленной выше краевой задачи — задание температурного возмущения только на верхней границе ($A = B = 0$). Начнем последовательно интегрировать основную систему уравнений с уравнения (6). С учетом соответствующих граничных условий получаем

$$T_1 = C \frac{z}{h}, \quad T_2 = D \frac{z}{h}.$$

Далее полученные выражения подставляем в уравнения (7) и находим градиенты P_1, P_2 приведенного давления:

$$P_1 = g\beta C \frac{z^2 - h^2}{2h}, \quad P_2 = g\beta D \frac{z^2 - h^2}{2h}.$$

Затем из уравнений (8) находим компоненты вектора скорости:

$$u(z) = \frac{z}{8} \left(\frac{g\beta D}{h\nu} (2h^2 z - z^3) + \frac{8\xi_1}{\eta} \right), \quad v(z) = \frac{z}{8} \left(\frac{g\beta C}{h\nu} (2h^2 z - z^3) + \frac{8\xi_2}{\eta} \right).$$

Далее найденные выражения компонент скорости и градиентов температуры подставляем в уравнение (9), откуда

$$T_0(z) = \frac{z(-h^3(C\xi_1 + D\xi_2) + 12\chi\eta\vartheta + (C\xi_1 + D\xi_2)z^3)}{12\chi\eta h} + \frac{CDg\beta z(-16h^6 + 21h^2z^4 - 5z^6)}{840\chi h^2\nu},$$

и, наконец, из уравнения (10) определим составляющую P_0 давления:

$$P_0(z) = \frac{\beta g[3h^5(C\xi_1 + D\xi_2) - 60\chi\eta h^2\vartheta - 5(h^3(C\xi_1 + D\xi_2) - 12\chi\eta\vartheta)z^2]}{120\chi\eta h} + \frac{2\beta g(C\xi_1 + D\xi_2)z^5}{120\chi\eta h} + \frac{\beta^2 CDg^2(41h^8 - 64h^6z^2 + 28h^2z^6 - 5z^8)}{6720\chi h^2\nu}.$$

5. Переход к термокапиллярной конвекции. Рассматриваемая краевая задача может быть сведена к задаче исследования термокапиллярной конвекции (конвекции Бенара—Марангони), описанной в [24]. Для этого достаточно уточнить условия на нижней (твердой) и верхней (свободной) поверхностях, положив

$$T_0(h) = 0, \quad \eta \frac{du}{dz}(h) = \xi_1 = -\sigma T_1(h), \quad \eta \frac{dv}{dz}(h) = \xi_2 = -\sigma T_2(h).$$

6. Исследование компонент скорости. Функции компонент скорости u, v имеют ноль в начале координат (множитель z выделяется явно). Изучим вопрос о том, сколько еще нулей может быть у этих функций. Этот вопрос является довольно принципиальным, поскольку наличие нулей у этих функций говорит о существовании противотечений (расслоении) в конвективном потоке вязкой несжимаемой жидкости.

Пронормируем найденные в п. 4 выражения компонент $u(z), v(z)$ вектора скорости \mathbf{V} на величину C , приведя их к безразмерному виду. Для этого введем новые параметры системы:

$$\Delta^* = D/C, \quad \delta = h/l,$$

где h — характерный вертикальный размер слоя, а l — характерный горизонтальный размер слоя. Кроме этого, перейдем к безразмерной координате $z \rightarrow z/h$. Для этого разделим $u(z), v(z)$ на $g\beta l^3/\nu$. В результате получим

$$u(z) = \frac{z\delta^3}{8} (\Delta^*(2z - z^3) + 8W_1), \quad v(z) = \frac{z\delta^3}{8} (2z - z^3 + 8W_2).$$

Здесь

$$W_i = \frac{\nu\xi_i}{g\beta C\eta h^2}$$

— числа Вебера, посчитанные для значений $\xi_i, i = 1, 2$. Очевидно, что

$$W_1/W_2 = \xi_1/\xi_2.$$

Отметим также, что после обезразмеривания координата z теперь меняется в диапазоне $[0, 1]$.

Рассмотрим сначала функцию $u(z)$. Случай $\Delta^* = 0$ опустим из-за тривиальности. Поэтому далее представим функцию $u(z)$ в мультипликативном виде:

$$u(z) = \frac{z\Delta^*\delta^3}{8} \left(2z - z^3 + \frac{8W_1}{\Delta^*} \right)$$

и введем в рассмотрение функцию

$$u_1(z) = 2z - z^3 + \frac{8W_1}{\Delta^*}.$$

Эта функция является полиномом третьей степени относительно z .

Чтобы определить, сколько нулей у функции $u_1(z)$, рассмотрим вспомогательную функцию $f(z) = 2z - z^3$, график которой представлен на рис. 1.

Отметим, у функции $f(z)$ на $[0, 1]$ есть всего один ноль — точка $z_0 = 0$. Кроме этого, глобальный максимум функции f на интересующем нас отрезке $[0, 1]$ есть точка $z_* = \sqrt{2/3}$, значение функции в которой равно

$$f_{\max} = f(z_*) = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} > 1.$$

А на правой границе $z = 1$ она принимает значение $f_1 = f(1) = 1$.

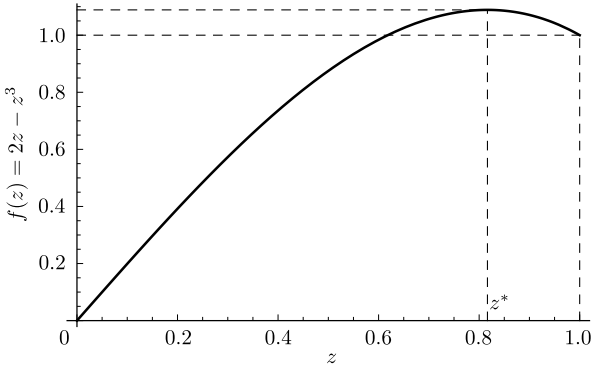


Рис. 1. График функции $f(z)$ [Figure 1. The graph of $f(z)$]

Производя параллельный перенос графика этой функции вдоль вертикальной оси, то есть рассматривая семейство функций вида $f_c(z) = f(z) + c$, можно добиться того, что функция $f_c(z)$ пересечет ось z на отрезке $[0, 1]$ один или два раза, или же вообще не будет пересекать ось z (не имея при этом общих точек или только единственную общую точку — точку касания). Различные положения функции f_c представлены на рис. 2.

Таким образом, возвращаясь к функции u_1 , получаем следующие оценки:

- 1) $-\frac{8W_1}{\Delta^*} < 1$ — единственный ноль, одна смена знака;
- 2) $1 = -\frac{8W_1}{\Delta^*}$ — два различных нуля, одна смена знака;
- 3) $1 < -\frac{8W_1}{\Delta^*} < \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ — два различных нуля, две смены знака;
- 4) $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = -\frac{8W_1}{\Delta^*}$ — один ноль, функция $u_1(z)$ не меняет знак;

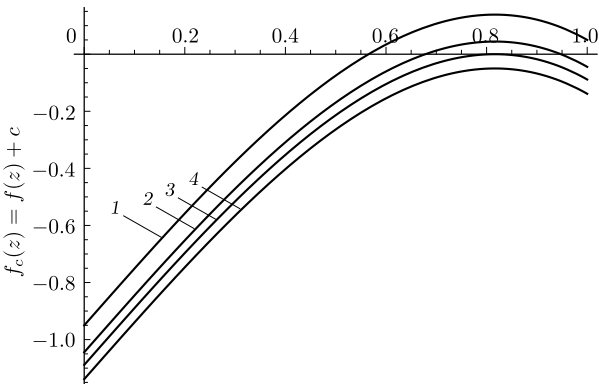


Рис. 2. Семейство функций $f_c(z) = f(z) + c$ для $c = -f(1) + 0.05$ (линия 1), для $c = -(f(z_*) + f(1))/2$ (линия 2), для $c = -f(z_*)$ (линия 3), для $c = -f(z_*) - 0.05$ (линия 4)

[Figure 2. The family of functions $f_c(z) = f(z) + c$ for $c = -f(1) + 0.05$ (line 1), for $c = -(f(z_*) + f(1))/2$ (line 2), for $c = -f(z_*)$ (line 3), for $c = -f(z_*) - 0.05$ (line 4)]

5) $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} < -\frac{8W_1}{\Delta^*}$ — нулей нет, функция $u_1(z)$ не меняет знак.

В соответствии с каждым из перечисленных случаев для функции $u(z)$ можем получить следующие картины (без ограничения общности взято $\delta = 1$, $\Delta^* = 1$) (см. рис. 3).

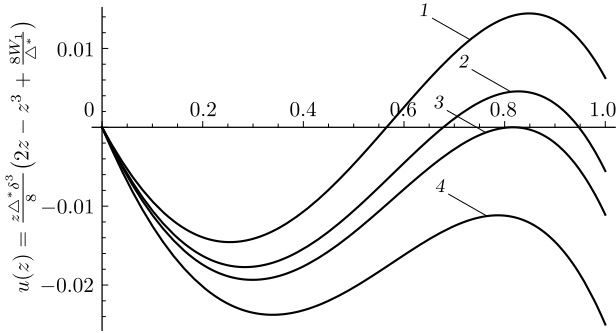


Рис. 3. Семейство функций $u(z) = \frac{z\Delta^*\delta^3}{8}(2z - z^3 + \frac{8W_1}{\Delta^*})$ для $W_1 = -(f(1) - 0.05)$ (линия 1), для $W_1 = -(f(z_*) + f(1))/2$ (линия 2), для $W_1 = -f(z_*)$ (линия 3), для $W_1 = -(f(z_*) + 0.05)$ (линия 4), когда $\delta = 1$, $\Delta^* = 1$

[Figure 3. The family of functions $u(z) = \frac{z\Delta^*\delta^3}{8}(2z - z^3 + \frac{8W_1}{\Delta^*})$ for $W_1 = -(f(1) - 0.05)$ (line 1), for $W_1 = -(f(z_*) + f(1))/2$ (line 2), for $W_1 = -f(z_*)$ (line 3), for $W_1 = -(f(z_*) + 0.05)$ (line 4), when $\delta = 1$, $\Delta^* = 1$]

Проводя аналогичный анализ для функции $v_1(z)$, можно получить следующую систему условий, определяющую расположение этой кривой относительно оси z :

- 1) $-8W_2 < 1$ — единственный ноль, одна смена знака;
- 2) $1 = -8W_2$ — два различных нуля, одна смена знака;
- 3) $1 < -8W_2 < \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ — два различных нуля, две смены знака;
- 4) $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = -8W_2$ — один ноль, функция $v_1(z)$ не меняет знак;
- 5) $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} < -8W_2$ — нулей нет, функция $v_1(z)$ не меняет знак.

Отметим, что если вернуться к изначальным параметрам задачи, то получим

$$\frac{W_1}{\Delta^*} = \frac{\nu\xi_1}{g\beta D\eta h^2}, \quad W_2 = \frac{\nu\xi_2}{g\beta C\eta h^2}.$$

Таким образом, наличие противотечений в слое жидкости, их число и положение застойных точек зависят от значения комбинаций параметров $\frac{\nu\xi_1}{g\beta D\eta h^2}$ и $\frac{\nu\xi_2}{g\beta C\eta h^2}$.

7. Годограф скорости. Особый интерес в этой ситуации представляет изучение траектории, описываемой концом вектора-годографа скорости. Чисто теоретически может быть не более 25 различных форм годографа (5 вариантов для кривой $u(z)$ и 5 вариантов для кривой $v(z)$), но есть ситуации, которые порождают один и тот же годограф (например, при $\Delta^* = 1$

в случаях $W_1 = W_2 = -1$ и $W_1 = W_2 = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$ годографом будет биссектриса первой четверти). Кроме того, не следует забывать про связь между параметрами задачи ($W_1\xi_2 = W_2\xi_1$), которая приводит к дополнительным ограничениям и, следовательно, к снижению числа принципиально разных траекторий, описываемых концом годографа.

Итак, если функция $u_1(z)$ такова, что имеет единственный ноль и меняет знак один раз, то годограф имеет вид, представленный на рис. 4, а.

Если функция $u_1(z)$ имеет два нуля и меняет знак один раз, то годограф имеет вид, представленный на рис. 4, б.

Если функция $u_1(z)$ имеет два нуля, но меняет знак два раза, то годограф имеет вид, представленный на рис. 4, с.

Если функция $u_1(z)$ имеет один ноль, но не меняет знак, то годограф имеет вид, представленный на рис. 4, д.

Если у функции $u_1(z)$ нулей нет (функция не меняет знак), то годограф имеет вид, представленный на рис. 4, е.

8. Исследование завихренности и спиральности. Выпишем основную количественную меру завихренности — псевдовектор вихря или завихренность:

$$\Omega = \text{rot } \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix},$$

или по координатам:

$$\Omega_x = -\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\delta^3}{2}(2W_2 + z - z^3), \quad \Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\delta^3}{2}(2W_1 + \Delta^*(z - z^3)), \quad \Omega_z = 0.$$

Особый интерес здесь вызывают комбинации параметров, при которых завихренность обращается в ноль хотя бы в нескольких точках. Принципиально таких случаев два.

Случай первый. При $\Delta^* = W_1 = W_2 = 0$ завихренность на интересующем нас интервале обращается в ноль в точках $z = 0$ и $z = 1$. В этом случае

$$u(z) \equiv 0, \quad v(z) = \frac{\delta^3}{8}z^2(2 - z^2).$$

То есть противотечений в слое не возникает (поскольку нули функции $v(z)$ лежат вне интервала $(0, 1)$). Жидкость в слое движется в одном строго зафиксированном направлении и имеет место «волновой» эффект изменения модуля скорости движения жидкости по высоте z рассматриваемого слоя.

Случай второй. При $\Delta^* \neq 0$, $\Delta^*W_2 = W_1$. Так как $\xi_1W_2 = \xi_2W_1$, последнее условие равносильно условию $\Delta\xi_2 = \xi_1$. В этом случае псевдовектор вихря становится нулевым в точках, являющихся корнями уравнения

$$2W_2 + z - z^3 = 0.$$

Число действительных корней этого уравнения зависит от W_2 . Экстремум функции $2W_2 + z - z^3$ равен $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ и достигается он в точке $z_{**} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

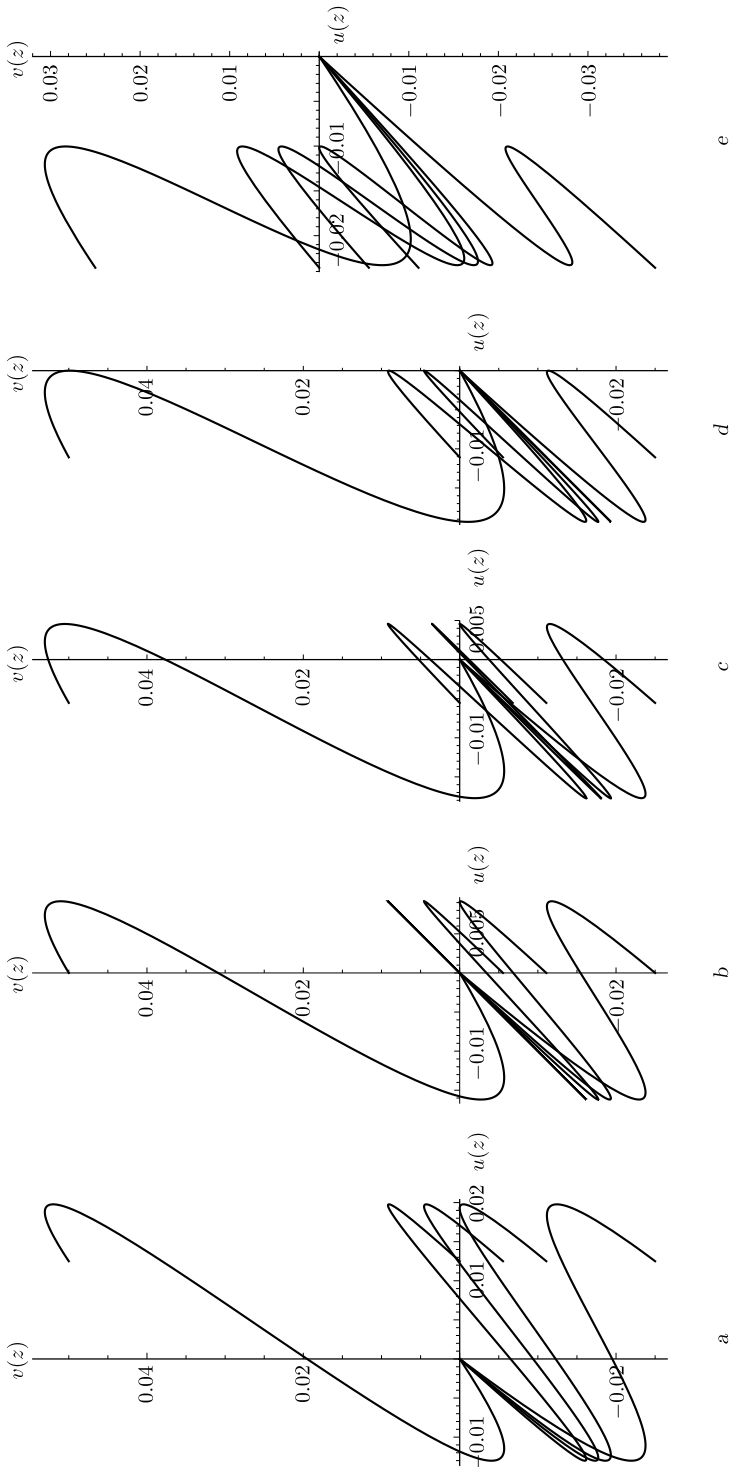


Рис. 4. Вид годографа в плоскости $u(z) - v(z)$ [Figure 4. Hodograph plots in the $u(z) - v(z)$ plane]

Таким образом, если $W_2 > 0$ или $W_2 < -\frac{1}{3\sqrt{3}}$, то у приведенного выше уравнения корней на отрезке $[0, 1]$ нет. Если $W_2 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$, то существует единственный действительный корень на отрезке $[0, 1]$ — точка z_{**} . Если $-\frac{1}{3\sqrt{3}} \leq W_2 \leq 0$, то таких корня два — один левее z_{**} , другой правее. Кроме того,

$$u(z) = \frac{z\delta^3 \Delta^*}{8} \left(2z - z^3 + \frac{8W_1}{\Delta^*} \right) = \Delta^* \frac{z\delta^3}{8} (2z - z^3 + 8W_2) = \Delta^* v(z),$$

то есть имеет место линейная зависимость между компонентами u и v вектора скорости \mathbf{V} . В этом случае годограф скорости описывает своим концом прямую, проходящую через начало координат, тангенс угла наклона которой равен $1/\Delta^*$. А значит, если координата z такова, что удовлетворяет уравнению $2W_2 + z - z^3 = 0$, то направление движения жидкости на этой высоте слоя оказывается заранее известным.

Таким образом, в зависимости от сочетаний конкретных значений параметров задачи можно попасть в ситуации, когда вихрь меняет свое направление.

Исследуем теперь спиральность [39]. По определению, спиральность есть число

$$H = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V} = -u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\delta^6}{8} (W_1 - \Delta^* W_2) z^2 (-2 + 3z^2).$$

Очевидно, что спиральность оказывается равной нулю при $W_1 - \Delta^* W_2 = 0$, а это есть одно из условий обращения завихренности в ноль. Это выглядит логичным, учитывая, что завихренность $\boldsymbol{\Omega}$ входит множителем в определение спиральности H .

Однако есть два случая, когда спиральность обращается в ноль, а завихренность может и не быть нулевой — это случай $z = 0$ и $z = \sqrt{2/3}$ (нас интересуют только точки слоя $0 \leq z \leq 1$). В точке $z = 0$ вектор скорости \mathbf{V} оказывается равен нулю (условие прилипания), а компоненты завихренности определяются выражениями

$$\Omega_x = -W_2 \delta^3, \quad \Omega_y = W_1 \delta^3.$$

Если $W_1 = W_2 = 0$, то завихренность наряду со спиральностью становится нулевой при $z = 0$. Аналогичной подстановкой точки $z = \sqrt{2/3}$ легко можно показать, что если $W_1 = -\frac{\Delta^*}{3\sqrt{6}}$, то обращаются в ноль $u(\sqrt{2/3})$ и Ω_y , а если $W_2 = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$, то также в ноль обращаются $v(\sqrt{2/3})$ и Ω_x .

Таким образом, даже если спиральность стала нулевой, то в зависимости от значений констант в граничных условиях завихренность может в ноль и не обращаться.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторская ответственность. Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Каждый из нас одобрил окончательную версию рукописи.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере (программа УМНИК).

Библиографический список

1. Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье—Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // *Теоретические основы химической технологии*, 2009. Т. 43, № 5. С. 547–566.
2. Dorrepaal J. M. An exact solution of the Navier-Stokes equation which describes non-orthogonal stagnation-point flow in two dimensions // *Journal of Fluid Mechanics*, 1986. vol. 163, no. 1. pp. 141–147. doi: [10.1017/s0022112086002240](https://doi.org/10.1017/s0022112086002240).
3. Stuart J. T. The viscous flow near a stagnation point when the external flow has uniform vorticity // *Journal of the Aerospace Sciences*, 1959. vol. 26, no. 2. pp. 124–125. doi: [10.2514/8.7963](https://doi.org/10.2514/8.7963).
4. Riesco-Chueca P., de la Mora J. F. Brownian motion far from equilibrium: a hypersonic approach // *Journal of Fluid Mechanics*, 1990. vol. 214. pp. 639–663. doi: [10.1017/S0022112090000301](https://doi.org/10.1017/S0022112090000301).
5. Гушин В. А., Рождественская Т. И. Численное исследование явлений, возникающих вблизи кругового цилиндра в течениях стратифицированных жидкостей с небольшими периодами плавучести // *Прикладная механика и техническая физика*, 2011. Т. 52, № 6. С. 69–76.
6. Штокман В. Б. *Экваториальные противотечения в океанах*. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1948. 156 с.
7. Коротаев Г. К., Михайлова Э. Н., Шапиро Н. Б. *Теория экваториальных противотечений в Мировом океане*. Киев: Наук. думка, 1986. 208 с.
8. Коротаев Г. К. *Теоретическое моделирование синоптической изменчивости океана*. Киев: Наук. думка, 1988. 160 с.
9. Бондаренко А. Л. *Крупномасштабные течения и долгопериодные волны Мирового океана*. М.: Институт водных проблем РАН, 2011. 163 с.
10. Яруллин А. Р. Результаты экспериментальных исследований двухфазного расслоенного потока в горизонтальном стволе скважины со знакопеременной траекторией // *Каротажник*, 2014. № 9(243). С. 63–71.
11. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // *Dingler's Politech. J.*, 1911. vol. 326. pp. 321–324, <http://dingler.culture.hu-berlin.de/article/pj326/ar326114>.
12. Ekman V. W. On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean-Currents // *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1905. vol. 2, no. 11. pp. 1–52, <http://jhirlibrary.jhu.edu/handle/1774.2/33989>.
13. Charney J. G. Non-linear theory of a wind-driven homogeneous layer near the equator // *Deep Sea Research*, 1960. vol. 6. pp. 303–310. doi: [10.1016/0146-6313\(59\)90089-9](https://doi.org/10.1016/0146-6313(59)90089-9).
14. Stommel H. Wind-drift near the equator // *Deep Sea Research*, 1960. vol. 6. pp. 298–302. doi: [10.1016/0146-6313\(59\)90088-7](https://doi.org/10.1016/0146-6313(59)90088-7).
15. Аристов С. Н., Фрик П. Г. Нелинейные эффекты влияния экмановского слоя на динамику крупномасштабных вихрей в «мелкой воде» // *Журнал прикладной механики и технической физики*, 1991. Т. 32, № 2. С. 49–54.
16. Ингель Л. Х., Аристов С. Н. Класс точных решений нелинейных задач о термических циркуляциях, связанных с объемным тепловыделением в атмосфере // *Тр. Ин-та эксперим. метеорол.*, 1996. № 27(162). С. 142–157.
17. Аристов С. Н., Шварц К. Г. *Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости*. Пермь: ПГУ, 2006. 155 с.
18. Аристов С. Н., Шварц К. Г. *Вихревые течения в тонких слоях жидкости*. Киров: ВятГУ, 2011. 207 с.

19. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Адвективное течение во вращающейся жидкой пленке // *Прикладная механика и техническая физика*, 2016. Т. 57, № 1. С. 216–223. doi: [10.15372/PMTF20160121](https://doi.org/10.15372/PMTF20160121).
20. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений уравнений термодиффузии // *Теоретические основы химической технологии*, 2016. Т. 50, № 3. С. 294–301. doi: [10.7868/s0040357116030027](https://doi.org/10.7868/s0040357116030027).
21. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // *Нелинейная динам.*, 2014. Т. 10, № 2. С. 177–182. doi: [10.20537/nd1402004](https://doi.org/10.20537/nd1402004).
22. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости // *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*, 2015. № 4. С. 50–54.
23. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 2016. № 2. С. 25–31. doi: [10.7868/S0568528116020055](https://doi.org/10.7868/S0568528116020055).
24. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // *Нелинейная динам.*, 2013. Т. 9, № 4. С. 651–657. doi: [10.20537/nd1304004](https://doi.org/10.20537/nd1304004).
25. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю., Спесак Л. Ф. Нестационарная конвекция Бенара–Марангони слоистых течений вязкой несжимаемой жидкости // *Теоретические основы химической технологии*, 2016. Т. 50, № 2. С. 137–146. doi: [10.7868/S0040357116020019](https://doi.org/10.7868/S0040357116020019).
26. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю., Спесак Л. Ф. Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция Марангони вязкой несжимаемой жидкости // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2015. Т. 8, № 4. С. 445–456. doi: [10.7242/1999-6691/2015.8.4.38](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.4.38).
27. Андреев В. К. *Решения Бирixa уравнений конвекции и некоторые его обобщения*: Препринт ИВМ СО РАН № 1–10. Красноярск, 2010. 68 с.
28. Андреев В. К., Бекежанова В. Б. Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // *Прикладная механика и техническая физика*, 2013. Т. 54, № 2. С. 3–20.
29. Андреев В. К., Степанова И. В. Однонаправленные течения бинарных смесей в модели Обербека–Буссинеска // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 2016. № 2. С. 13–24. doi: [10.7868/s0568528116020043](https://doi.org/10.7868/s0568528116020043).
30. Гончарова О. Н., Кабов О. А. Гравитационно-термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое при спутном потоке газа // *Докл. РАН*, 2011. Т. 426, № 2. С. 183–188.
31. Гончарова О. Н., Резанова Е. В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях с испарением на границе раздела // *Прикладная механика и техническая физика*, 2014. Т. 55, № 2. С. 68–79.
32. Бирих Р. В., Пухначев В. В. Осевое конвективное течение во вращающейся трубе с продольным градиентом температуры // *Докл. РАН*, 2011. Т. 436, № 3. С. 323–327.
33. Бирих Р. В., Пухначев В. В., Фроловская О. А. Конвективное течение в горизонтальном канале с неньютоновской реологией поверхности при нестационарном продольном градиенте температуры // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 2015. № 1. С. 192–198.
34. Пухначев В. В. Нестационарные аналоги решения Бирixa // *Известия АлтГУ*, 2011. № 1–2. С. 62–69.
35. Рыжков И. И. *Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость*. Новосибирск: СО РАН, 2013. 200 с.
36. Остроумов Г. А. *Свободная конвекция в условиях внутренней задачи*. М.: Гостехиздат, 1952. 256 с.
37. Бирих Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // *Прикладная механика и техническая физика*, 1966. Т. 7, № 3. С. 69–72.
38. Гершуни Г. Э., Жуховицкий Е. М. *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*. М.: Наука, 1972. 392 с.
39. Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. М.: Едиториал УРСС, 2003. 416 с.

MSC: 76F02, 76M45; 76F45, 76R05, 76U05

A large-scale layered stationary convection of an incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation

N. V. Burmasheva^{1,2}, E. Yu. Prosviryakov²

¹ Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin, 19, Mira st., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation.

² Institute of Engineering Science, Urals Branch, Russian Academy of Sciences, 34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

Abstract

The exact solution of the definition of convective motions in a layered large-scale flows of a viscous incompressible fluid in a steady case is considered. It was shown that the received problem is, firstly, overdetermined and, secondly, a nonlinear (due to the presence of members of a convective derivative in a heat conduction equation). Also it was shown that the solution class choice can eliminate the override, and the specification of a boundary conditions can reduce the problem to the study of a thermal capillary convection (convection Benard–Marangoni). Then conditions of the counterflow appearance are defined, and their possible amount is investigated. In addition, the analysis of the nonvortex region in the test flow is made. And it was shown that under certain combinations of system parameters the vortex can change the direction.

Keywords: layered flow, counterflow, stagnant point, exact solution.

Received: 20th January, 2017 / Revised: 6th March, 2017 /


Accepted: 13th March, 2017 / First online: 19th May, 2017

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' responsibilities. We are fully responsible for submitting the final manuscript in print. Each of us has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Foundation for Assistance to Small Innovative Enterprises in Science and Technology (the UMNIK program).

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A large-scale layered stationary convection of an incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 180–196. doi: [10.14498/vsgtu1527](https://doi.org/10.14498/vsgtu1527) (In Russian).

Authors' Details:

Natalya V. Burmasheva  <http://orcid.org/0000-0003-4711-1894>

Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Institute of Mathematics and Computer Science, Dept. of Mechanics and Mathematical Modeling¹; Researcher; Laboratory of Mechanics of Deformations²; e-mail: nat_burm@mail.ru

Evgeny Yu. Prosviryakov  <http://orcid.org/0000-0002-2349-7801>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Laboratory of Applied Mechanics²; e-mail: evgen_pros@mail.ru

References

1. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyinin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables, *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. doi: [10.1134/S0040579509050066](https://doi.org/10.1134/S0040579509050066).
2. Dorrepaal J. M. An exact solution of the Navier–Stokes equation which describes non-orthogonal stagnation-point flow in two dimensions, *Journal of Fluid Mechanics*, 1986, vol. 163, no. 1, pp. 141–147. doi: [10.1017/s0022112086002240](https://doi.org/10.1017/s0022112086002240).
3. Stuart J. T. The viscous flow near a stagnation point when the external flow has uniform vorticity, *Journal of the Aerospace Sciences*, 1959, vol. 26, no. 2, pp. 124–125. doi: [10.2514/8.7963](https://doi.org/10.2514/8.7963).
4. Riesco-Chueca P., de la Mora J. F. Brownian motion far from equilibrium: a hypersonic approach, *Journal of Fluid Mechanics*, 1990, vol. 214, pp. 639–663. doi: [10.1017/S0022112090000301](https://doi.org/10.1017/S0022112090000301).
5. Gushchin V. A., Rozhdestvenskaya T. I. Numerical study of the effects occurring near a circular cylinder in stratified fluid flows with short buoyancy periods, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2011, vol. 52, no. 6, pp. 905–911. doi: [10.1134/S0021894411060083](https://doi.org/10.1134/S0021894411060083).
6. Shtokman V. B. *Ekvatorial'nye protivotecheniia v okeanakh* [Equatorial Countercurrents in the Oceans]. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1948, 156 pp. (In Russian)
7. Korotaev G. K., Mikhailova E. N., Shapiro N. B. *Teoriia ekvatorial'nykh protivotechenii v Mirovom okeane* [Theory of Equatorial Countercurrents in the World Ocean]. Kiev, Nauk. dumka, 1986, 208 pp. (In Russian)
8. Korotaev G. K. *Teoreticheskoe modelirovanie sinopticheskoi izmenchivosti okeana* [Theoretical Simulation of the Synoptic Variability of the Ocean]. Kiev, Nauk. dumka, 1988, 160 pp. (In Russian)
9. Bondarenko A. L. *Krupnomasshtabnye techeniia i dolgoperiodnye volny Mirovogo okeana* [The large-scale flows and long-period waves of the World Ocean]. Moscow, 2011, 163 pp. (In Russian)
10. Yarullin A. R. The results of experimental studies on a two-phase flow bundle in horizontal wells with a variable-sign trajectory, *Karotazhnik*, 2014, no. 9(243), pp. 63–71 (In Russian).
11. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder, *Dingler's Politech. J.*, 1911, vol. 326, pp. 321–324, <http://dingler.culture.hu-berlin.de/article/pj326/ar326114>.
12. Ekman V. W. On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean-Currents, *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1905, vol. 2, no. 11, pp. 1–52, <http://jhirlibrary.jhu.edu/handle/1774.2/33989>.
13. Charney J. G. Non-linear theory of a wind-driven homogeneous layer near the equator, *Deep Sea Research*, 1960, vol. 6, pp. 303–310. doi: [10.1016/0146-6313\(59\)90089-9](https://doi.org/10.1016/0146-6313(59)90089-9).
14. Stommel H. Wind-drift near the equator, *Deep Sea Research*, 1960, vol. 6, pp. 298–302. doi: [10.1016/0146-6313\(59\)90088-7](https://doi.org/10.1016/0146-6313(59)90088-7).
15. Aristov S. N., Frik P. G. Nonlinear effects of the Ekman layer on the dynamics of large-scale eddies in shallow water, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1991, vol. 32, no. 2, pp. 189–194. doi: [10.1007/BF00858033](https://doi.org/10.1007/BF00858033).
16. Ingel' L. Kh., Aristov S. N. The class of exact solutions of nonlinear problems on thermal circulation associated with volumetric heat release in the atmosphere, *Tr. In-ta eksperim. meteorol.*, 1996, no. 27(162), pp. 142–157 (In Russian).
17. Aristov S. N., Shvarts K. G. *Vikhrevye techeniia advektivnoi prirody vo vrashchائيushchemsya sloe zhidkosti* [Vortical Flows of Advective Nature in a Rotating Fluid Layer]. Perm, Perm State Univ., 2006, 155 pp. (In Russian)
18. Aristov S. N., Shvarts K. G. *Vikhrevye techeniia v tonkikh sloiakh zhidkosti* [Vortical Flows in Thin Fluid Layers]. Kirov, Vyatka State Univ., 2011, 207 pp. (In Russian)
19. Aristov S. N., Shvarts K. G. Advective flow in a rotating liquid film, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 188–194. doi: [10.1134/S0021894416010211](https://doi.org/10.1134/S0021894416010211).

20. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. doi: [10.1134/S0040579516030027](https://doi.org/10.1134/S0040579516030027).
21. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Inhomogeneous Couette flow, *Nelin. Dinam.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177–182 (In Russian). doi: [10.20537/nd1402004](https://doi.org/10.20537/nd1402004).
22. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid, *Russ. Aeronaut.*, 2015, vol. 58, no. 4, pp. 413–418. doi: [10.3103/S1068799815040091](https://doi.org/10.3103/S1068799815040091).
23. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Unsteady layered vortical fluid flows, *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 148–154. doi: [10.1134/S0015462816020034](https://doi.org/10.1134/S0015462816020034).
24. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. On laminar flows of planar free convection, *Nelin. Dinam.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651–657 (In Russian). doi: [10.20537/nd1304004](https://doi.org/10.20537/nd1304004).
25. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu., Spevak L. F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 2, pp. 132–141. doi: [10.1134/S0040579516020019](https://doi.org/10.1134/S0040579516020019).
26. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu., Spevak L. F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid, *Vychislitel'naiia mekhanika splotnykh sred* [Computational Continuum Mechanics], 2015, vol. 8, no. 4, pp. 445–456 (In Russian). doi: [10.7242/1999-6691/2015.8.4.38](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.4.38).
27. Andreev V. K. *Resheniia Birikha uravneniï konveksii i nekotorye ego obobshcheniia* [Birikh Solutions to Convection Equations and Some of its Extensions], The ICM SB RAS Preprint no. 1–10. Krasnoyarsk, 2010, 68 pp. (In Russian)
28. Andreev V. K., Bekezhanova V. B. Stability of non-isothermal fluids (Review), *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 171–184. doi: [10.1134/S0021894413020016](https://doi.org/10.1134/S0021894413020016).
29. Andreev V. K., Stepanova I. V. Unidirectional flows of binary mixtures within the framework of the Oberbeck–Boussinesq model, *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 136–147. doi: [10.1134/S0015462816020022](https://doi.org/10.1134/S0015462816020022).
30. Goncharova O. N., Kabov O. A. Gravitational-thermocapillary convection of fluid in the horizontal layer in co-current gas flow, *Dokl. Phys.*, 2009, vol. 54, no. 5, pp. 242–247. doi: [10.1134/S1028335809050061](https://doi.org/10.1134/S1028335809050061).
31. Goncharova O. N., Rezanova E. V. Example of an exact solution of the stationary problem of two-layer flows with evaporation at the interface, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 2, pp. 247–257. doi: [10.1134/S0021894414020072](https://doi.org/10.1134/S0021894414020072).
32. Birikh R. V., Pukhnachev V. V. An axial convective flow in a rotating tube with a longitudinal temperature gradient, *Dokl. Phys.*, 2011, vol. 56, no. 1, pp. 47–52. doi: [10.1134/S1028335811010095](https://doi.org/10.1134/S1028335811010095).
33. Birikh R. V., Pukhnachev V. V., Frolovskaya O. A. Convective flow in a horizontal channel with non-Newtonian surface rheology under time-dependent longitudinal temperature gradient, *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, no. 1, pp. 173–179. doi: [10.1134/S0015462815010172](https://doi.org/10.1134/S0015462815010172).
34. Pukhnachev V. V. Non-stationary Analogues of the Birikh Solution, *Izvestiia AltGU*, 2011, no. 1–2, pp. 62–69 (In Russian).
35. Ryzhkov I. I. *Termodiffuziia v smesiakh: uravneniia, simmetrii, resheniia i ikh ustoiichivost'* [Thermodiffusion in Mixtures: Equations, Symmetries, Solutions and its Stability]. Novosibirsk, 2013, 200 pp. (In Russian)
36. Ostroumov G. A. *Free convection under the condition of the internal problem*, NACA Technical Memorandum 1407. Washington, National Advisory Committee for Aeronautics, 1958.
37. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 43–44. doi: [10.1007/BF00914697](https://doi.org/10.1007/BF00914697).
38. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective Stability of Incompressible Fluids*, Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem, Keter Publishing House, 1976, 330 pp.
39. Arnold V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 60. New York, Springer-Verlag, 1978, x+462 pp. doi: [10.1007/978-1-4757-1693-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1693-1); 1989, xvi+519 pp. doi: [10.1007/978-1-4757-2063-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2063-1).