Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 4. С. 603–619

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1520

УДК 517.958:[536.2+539.219.3]

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СУБДИФФУЗИИ

С. Ю. Лукащук

Уфимский государственный авиационный технический университет,
Россия, 450000, Уфа, ул. К. Маркса, 12.

Аннотация

Решена задача групповой классификации нелинейного приближенного уравнения субдиффузии с малым параметром по приближенным допускаемым группам точечных преобразований относительно коэффициента аномальной диффузии, рассматриваемого как функция зависимой переменной. Приближенное уравнение получено из дробно-дифференциального уравнения субдиффузии с дробной производной Римана—Лиувилля по времени в предположении о близости порядка дробного дифференцирования к единице. Показано, что рассматриваемое приближенное уравнение субдиффузии обладает более широкой группой точечных симметрий по сравнению с исходным дробно-дифференциальным уравнением. Результаты групповой классификации позволяют строить приближенно инвариантные решения приближенного уравнения субдиффузии для различных видов функциональной зависимости коэффициента аномальной диффузии от зависимой переменной. Такие решения также будут являться приближенными решениями исходного дробно-дифференциального уравнения субдиффузии.

Ключевые слова: дробно-дифференциальное уравнение, субдиффузия, малый параметр, приближенная группа точечных преобразований, групповая классификация.

Введение. Разработка методов исследования качественных свойств нелинейных дробно-дифференциальных уравнений, то есть дифференциальных уравнений, содержащих производные дробных порядков различных типов, становится все более актуальной задачей в связи с активным внедрением теории интегро-дифференцирования дробного порядка [1,2] в практику математического моделирования [3–9]. Одним из эффективных подходов к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений с производными целого порядка и построению их точных решений является групповой анализ дифференциальных уравнений [10,11]. В работах [12–14] базовые методы группового анализа были успешно распространены на дробно-дифференциальные уравнения с дробными производными Римана—Лиувилля и Капуто. Были

Образец для цитирования
Лукащук С. Ю. Групповая классификация одного нелинейного приближенного уравнения субдиффузии // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 4. С. 603–619. doi: 10.14498/vsgtu1520.

Сведения об авторе
Станислав Юрьевич Лукащук (к.ф.-м.н., доц.; lsu@ugatu.su), доцент, каф. высокопроизводительных вычислительных технологий и систем.

предложены алгоритмы нахождения групп точечных перобразований, допускаемых такими уравнениями, решен ряд задач групповой классификации, найдены новые инвариантные решения некоторых классов нелинейных дробно-дифференциальных уравнений. Тем не менее даже в случае двух независимых переменных задача построения инвариантного решения нелинейного уравнения с частными дробными производными по его известной допускаемой однопараметрической группе в результате процедуры симметрийной редукции часто сводится к нелинейному обыкновенному дробно-дифференциальному уравнению, решение которого остается нетривиальной задачей.

В ряде случаев для дробно-дифференциальных уравнений возможно построение приближенных аналитических решений. Характерной особенностью таких уравнений является возможность выделить малый параметр из порядка дробного дифференцирования в том случае, если он оказывается близок к целому числу. Такой подход был использован, в частности, в работах [15–17]. В результате дробно-дифференциальное уравнение заменяется приближенным уравнением с малым параметром. При этом в нулевом порядке по малому параметру такое уравнение является классическим дифференциальным уравнением в целых производных.

К уравнениям с малым параметром могут быть применены методы теории возмущений [18], позволяющие строить различные виды приближенных решений. Исследование симметрийных свойств таких уравнений может быть выполнено с использованием методов теории приближенных групп преобразований, основы которой были заложены в работах [19–21]. По известной группе преобразований, приближенно допускаемой уравнением с малым параметром, могут быть построены приближенно инвариантные решения этого уравнения.

Среди дробно-дифференциальных уравнений, используемых в настоящее время на практике, особое место занимают уравнения диффузионного типа. Эти уравнения представляют собой различные математические модели процессов аномальной диффузии, то есть диффузионных процессов, кинетика протекания которых не подчиняется нормальной (гауссовой) статистике [6, 9, 22, 23]. Линейные дробно-дифференциальные уравнения аномальной диффузии в настоящее время являются одним из наиболее хорошо изученных классов дробно-дифференциальных моделей [24–26].

Вместе с тем проблема построения решений и исследования качественных свойств нелинейных дробно-дифференциальных диффузионных моделей остается мало исследованной. Вопросы построения точных решений таких уравнений обсуждаются, в частности, в работах [27–29]. В работах [13, 30] проведено исследование симметрийных свойств некоторых классов нелинейных уравнений аномальной диффузии с дробными производными Римана—Лиувилля и Капуто по времени.

В данной статье рассматривается нелинейное уравнение субдиффузии с дробной производной Римана—Лиувилля по времени, в котором порядок дробного дифференцирования близок к единице, а коэффициент аномальной диффузии является функцией зависимой переменной. Для этого уравнения строится соответствующее приближенное уравнение с малым параметром и проводится его групповая классификация по допускаемым группам приближенных точечных преобразований относительно коэффициента аномальной диффузии, являющегося функцией зависимой переменной.

1. Приближенное уравнение субдиффузии. Рассмотрим нелинейное дробно-дифференциальное уравнение субдиффузии

$$ {}_0D_t^\alpha u = (k_\alpha(u)u_x)_x, \quad u = u(t,x), \quad \alpha \in (0,1), \tag{1} $$

где

$$ {}_0D_t^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(\tau,x)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \tag{2} $$

— левосторонняя дробная производная Римана—Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$ по переменной t [1, 2]. Групповая классификация уравнения (1) по группам точечных преобразований относительно элемента $k_\alpha(u)$ выполнена в работе [13].

Рассмотрим случай, когда свойства субдиффузионного процесса таковы, что порядок дробного дифференцирования α оказывается близок к единице, то есть $\alpha = 1-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Тогда дробная производная в уравнении (1) может быть разложена в ряд по ε, а само уравнение заменено на приближенное уравнение с малым параметром.

Лемма. *Пусть функция $u(t)$ является аналитической при $t > 0$ и параметр $\alpha = 1-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \ll 1$. Тогда при всех t, удовлетворяющих условию $|\varepsilon \ln(t)| = O(\varepsilon)$, для дробной производной Римана—Лиувилля (2) справедливо разложение*

$$ {}_0D_t^{1-\varepsilon} u = u_t + \varepsilon \left((\ln t + \gamma - 1)u_t + \frac{u}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n(n+1)!} D_t^{n+1} u \right) + O(\varepsilon^2). \tag{3} $$

Доказательство. Воспользуемся известным (см., например, [1, формула (15.4)]) разложением дробной производной Римана—Лиувилля от аналитической функции в ряд по производным целого порядка, которое для дробной производной (2) имеет вид

$$ {}_0D_t^\alpha u = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha+n)} D_t^n u. $$

С использованием определения биномиальных коэффициентов и известных свойств гамма-функции (см., например, [31]) это разложение преобразуется к виду

$$ {}_0D_t^\alpha u = \Gamma(1+\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi(\alpha-n))}{\pi(\alpha-n)} \frac{t^{n-\alpha}}{n!} D_t^n u. \tag{4} $$

Выполним формальное разложение правой части этого равенства по ε при $\alpha = 1-\varepsilon$. Для отдельных множителей справедливы следующие разложения:

$$ \Gamma(1+\alpha) \equiv \Gamma(2-\varepsilon) = \Gamma(2) - \Gamma'(2)\varepsilon + O(\varepsilon^2) = 1 - \varepsilon(1-\gamma) + O(\varepsilon^2), $$

где $\gamma \approx 0.577216$ — постоянная Эйлера;

$$\frac{\sin(\pi(\alpha-n))}{\pi(\alpha-n)} \equiv \frac{\sin(\pi(1-n-\varepsilon))}{\pi(1-n-\varepsilon)} = \frac{\sin(\pi(1-n)) - \pi\varepsilon\cos(\pi(1-n))}{\pi(1-n-\varepsilon)} +$$

$$+ O(\varepsilon^2) = -\frac{(-1)^{1-n}\varepsilon}{1-n-\varepsilon} + O(\varepsilon^2) = \begin{cases} 1 + O(\varepsilon^2), & n = 1; \\ -\dfrac{(-1)^{1-n}}{1-n}\varepsilon + O(\varepsilon^2), & n \neq 1. \end{cases}$$

При выполнении условия $|\varepsilon \ln(t)| = O(\varepsilon)$ также справедливо разложение

$$t^{1-\alpha} \equiv t^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon \ln(t) + O(\varepsilon^2).$$

Подстановка полученных разложений в (4) после элементарных преобразований дает искомое разложение (3). □

Подставляя разложение (3) в уравнение (1), с точностью до $O(\varepsilon^2)$ получаем уравнение с малым параметром:

$$u_t + \varepsilon\left((\ln t + \gamma - 1)u_t + \frac{u}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n(n+1)!} D_t^{n+1} u\right) = \big(k_\alpha(u) u_x\big)_x. \qquad (5)$$

Уравнение (5) будем называть *приближенным уравнением субдиффузии.*

При решении задачи групповой классификации коэффициент аномальной диффузии $k_\alpha(u)$ должен полагаться зависящим от α, то есть в рассматриваемом случае он будет являться функцией малого параметра ε. Будем полагать, что справедливо разложение

$$k_\alpha(u) \equiv k_{1-\varepsilon}(u) = k_{(0)}(u) + \varepsilon k_{(1)}(u) + O(\varepsilon^2). \qquad (6)$$

Тогда уравнение (5) принимает вид

$$u_t + \varepsilon\left((\ln t + \gamma - 1)u_t + \frac{u}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n(n+1)!} D_t^{n+1} u\right) =$$

$$= k_{(0)}(u) u_{xx} + k'_{(0)}(u) u_x^2 + \varepsilon\big(k_{(1)}(u) u_{xx} + k'_{(1)}(u) u_x^2\big). \qquad (7)$$

2. Групповая классификация уравнения (7). Проведем классификацию уравнения (7) по группам приближенных точечных преобразований, определяемых инфинитезимальным оператором

$$X = (\xi^0_{(0)} + \varepsilon \xi^0_{(1)}) \frac{\partial}{\partial t} + (\xi^1_{(0)} + \varepsilon \xi^1_{(1)}) \frac{\partial}{\partial x} + (\eta_{(0)} + \varepsilon \eta_{(1)}) \frac{\partial}{\partial u}. \qquad (8)$$

Координаты $\xi^i_{(j)}$, $\eta_{(j)}$ $(i, j = 0, 1)$ данного оператора являются функциями переменных t, x, u. Оператор (8) продолжается на все переменные, входящие в уравнение (7):

$$\tilde{X} = X + (\zeta^1_{0(0)} + \varepsilon \zeta^1_{0(1)}) \frac{\partial}{\partial u_t} + (\zeta^1_{1(0)} + \varepsilon \zeta^1_{1\,(1)}) \frac{\partial}{\partial u_x} +$$

$$+ (\zeta^2_{1(0)} + \varepsilon \zeta^2_{1(1)}) \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \sum_{n=2}^{\infty} \zeta^n_{0(0)} \frac{\partial}{\partial\,(D_t^n u)}, \qquad (9)$$

где координаты $\zeta^k_{i(j)}$ продолженного оператора определяются по классическим формулам продолжения (см., например, [10, 11]).

При $\varepsilon = 0$ уравнение (7) переходит в классическое нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_t = \big(k_{(0)}(u)u_x\big)_x,$$

результаты групповой классификации которого по элементу $k_{(0)}(u)$ хорошо известны [10]. А именно, в случае произвольного $k_{(0)}(u)$ допускаемая уравнением группа является трехмерной, при $k_{(0)}(u) = e^u$ и $k_{(0)}(u) = u^\sigma$ $(\sigma \neq -4/3)$ группа расширяется до четырехмерной, при $k_{(0)}(u) = u^{-4/3}$ является пятимерной и в случае линейного уравнения $(k_{(0)}(u) = 1)$ является бесконечномерной. На основе этой классификации проводится групповая классификация приближенного уравнения субдиффузии (7) по группам приближенных точечных преобразований относительно элемента $k_{(1)}(u)$.

`Случай I.` Пусть $k_{(0)}(u)$ — произвольная функция. Тогда (см. [10])

$$\xi^0_{(0)} = C_{1(0)} + 2C_{3(0)}t, \quad \xi^1_{(0)} = C_{2(0)} + C_{3(0)}x, \quad \eta_{(0)} = 0 \tag{10}$$

и координаты продолженного оператора (9) в нулевом по ε порядке имеют вид

$$\begin{aligned} &\zeta^n_{0(0)} = -2nC_{3(0)}D^n_t u \quad (n = 1, 2, \ldots),\\ &\zeta^1_{1(0)} = -C_{3(0)}u_x, \quad \zeta^2_{1(0)} = -2C_{3(0)}u_{xx}. \end{aligned} \tag{11}$$

Координаты $\xi^0_{(1)}$, $\xi^1_{(1)}$ и $\eta_{(1)}$ находятся из определяющего уравнения, получающегося в результате действия на уравнение (7) продолженным оператором (9) с учетом исходного уравнения (7) и уже известных координат (10) и (11). В результате расщепления этого определяющего уравнения по степеням $D^n_t u$ $(n \geqslant 2)$ находим

$$C_{1(0)} = 0, \quad \xi^0_{(1)u} = 0.$$

Таким образом, оператор группы переносов по времени $X = \partial/\partial t$, допускаемый классическим уравнением теплопроводности и соответствующий постоянной $C_{1(0)}$, не наследуется уравнением (7). В работе [13] показано, что этот оператор не допускается и исходным дробно-дифференциальным уравнением субдиффузии (1).

Расщепление определяющего уравнения по переменным $u_t u_x$, $u_t u_x^2$, u_{tx}, $u_{tx}u_x$ приводит, в силу произвольности функции $k_{(0)}(u)$, к уравнениям

$$\xi^1_{(1)u} = 0, \quad \xi^0_{(1)x} = 0.$$

Дальнейшее расщепление по u_t дает

$$k_{(0)}(2\xi^1_{(1)x} - \xi^0_{(1)t} + 2C_{3(0)}) - k'_{(0)}\eta_{(1)} = 0$$

или, с учетом произвольности $k_{(0)}(u)$,

$$\eta_{(1)} = 0, \quad 2\xi^1_{(1)x} - \xi^0_{(1)t} + 2C_{3(0)} = 0.$$

Расщепление по u_x приводит к уравнениям

$$\xi^1_{(1)t} = 0, \quad \xi^1_{(1)xx} = 0.$$

Оставшаяся после указанных расщеплений часть определяющего уравнения выполнена тождественно для любой функции $k_{(1)}(u)$.

Решение полученных в результате расщепления уравнений имеет вид

$$\xi^0_{(1)} = C_{1(1)} + 2C_{3(1)}t + 2C_{3(0)}t, \quad \xi^1_{(0)} = C_{2(1)} + C_{3(1)}x, \quad \eta_{(1)} = 0, \quad C_{1(0)} = 0,$$

где $C_{1(1)}$, $C_{2(1)}$, $C_{3(1)}$ — произвольные постоянные.

`Случай II.` Пусть $k_{(0)}(u) = e^u$. Из известной [10] классификации нелинейного уравнения теплопроводности в нулевом порядке по ε имеем

$$\xi^0_{(0)} = C_{1(0)} + (2C_{3(0)} - C_{4(0)})t, \quad \xi^1_{(0)} = C_{2(0)} + C_{3(0)}x, \quad \eta_{(0)} = C_{4(0)}. \qquad (12)$$

Расщепление соответствующего определяющего уравнения по $u_t u_x$, $u_t u_x^2$, u_{tx}, $u_{tx}u_x$ и $D^n_t u$ $(n \geqslant 2)$ дает

$$C_{1(0)} = 0, \quad \xi^0_{(1)u} = 0, \quad \xi^0_{(1)x} = 0, \quad \xi^1_{(1)u} = 0.$$

С учетом этих уравнений дальнейшее расщепление определяющего уравнения по u_t, u_x, u_x^2 приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned}
&2\xi^1_{(1)x} - \xi^0_{(1)t} - \eta_{(1)} = C_{4(0)} - 2C_{3(0)} + C_{4(0)}(k_{(1)}e^{-u})_u,\\
&e^u(2\eta_{(1)xu} + 2\eta_{(1)x} - \xi^1_{(1)xx}) + \xi^1_{(1)t} = 0,\\
&\eta_{(1)uu} + \eta_{(1)u} = -C_{4(0)}(k_{(1)}e^{-u})_{uu},\\
&\eta_{(1)t} - e^u\eta_{(1)xx} = -C_{4(0)}t^{-1}.
\end{aligned}$$

Так как $C_{4(0)} \neq 0$ (иначе (12) совпадает с (10) и получаем уже разобранный выше случай I), из первого, третьего и четвертого уравнений этой системы вытекает следующее классифицирующее соотношение для $k_{(1)}(u)$:

$$(e^{-u}k_{(1)})_{uu} = 2A_2,$$

где A_2 — произвольная постоянная. Решение этого уравнения имеет вид

$$k_{(1)}(u) = e^u\left(A_0 + A_1u + A_2u^2\right),$$

где A_0 и A_1 — также произвольные постоянные. Только при таком виде функции $k_{(1)}(u)$ будет иметь место расширение группы. Подставляя найденный вид $k_{(1)}(u)$ в исходную систему и разрешая ее, находим

$$\begin{aligned}
&\xi^0_{(1)} = C_{1(1)} + (2C_{3(1)} - C_{4(1)})t + 2C_{3(0)}t + C_{4(0)}t(\ln t - 2) - A_1C_{4(0)}t,\\
&\xi^1_{(0)} = C_{2(1)} + C_{3(1)}x,\\
&\eta_{(1)} = C_{4(1)} - C_{4(0)}\ln t - 2A_2C_{4(0)}u,
\end{aligned}$$

где $C_{i(1)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ — произвольные постоянные.

`Случай III.` Пусть $k_{(0)}(u) = u^\sigma$ $(\sigma \neq 0)$. Из классификации [10] уравнения теплопроводности имеем

$$\xi^0_{(0)} = C_{1(0)} + 2C_{3(0)}t,$$
$$\xi^1_{(0)} = C_{2(0)} + C_{3(0)}x + C_{4(0)}\sigma x - C_{5(0)}x^2,$$
$$\eta_{(0)} = 2C_{4(0)}u + 3C_{5(0)}xu,$$

где $C_{5(0)} \neq 0$ только при $\sigma = -4/3$.

Аналогично предыдущим случаям, расщепление соответствующего определяющего уравнения по $D^n_t u$ $(n \geqslant 2)$, $u_t u_x$, $u_t u^2_x$, u_{tx}, $u_{tx}u_x$ дает уравнения

$$C_{1(0)} = 0, \quad \xi^0_{(1)u} = 0, \quad \xi^0_{(1)x} = 0, \quad \xi^1_{(1)u} = 0,$$

с учетом которых дальнейшее расщепление по u_t, u_x, u^2_x приводит к системе

$$2\xi^1_{(1)x} - \xi^0_{(1)t} - \sigma u^{-1}\eta_{(1)} = -2C_{3(0)} + (2C_{4(0)} + 3C_{5(0)}x)\big(u(u^{-\sigma}k_{(1)})_u\big),$$
$$2(u^\sigma \eta_{(1)x})_u - u^\sigma \xi^1_{(1)xx} + \xi^1_{(1)t} = -2C_{5(0)}(4k_{(1)} + 3k'_{(1)}u),$$
$$\eta_{(1)uu} + \sigma u^{-1}\eta_{(1)u} - \sigma u^{-2}\eta_1 = -(2C_{4(0)} + 3C_{5(0)x})\big(u(u^{-\sigma}k_{(1)})_u\big)_u,$$
$$\eta_{(1)t} - u^\sigma \eta_{(1)xx} = 0.$$

Из первого и третьего уравнений имеем $\eta_{(1)uu} = 0$. Тогда из первого уравнения получаем классифицирующее соотношение на функцию $k_{(1)}(u)$ в виде

$$(2C_{4(0)} + 3C_{5(0)}x)\big(u^2(u^{-\sigma}k_{(1)})_u\big)_{uu} = 0.$$

Так как постоянные $C_{4(0)}$ и $C_{5(0)}$ одновременно не равны нулю (иначе имеем случай I), то расширение группы возможно только при

$$k_{(1)}(u) = u^\sigma \left[A_0 + \sigma\frac{A_1}{u} + A_2 \ln u\right], \tag{13}$$

где A_0, A_1, A_2 — произвольные постоянные.

Подставляя (13) в приведенную выше систему и разрешая ее, приходим к следующим результатам.

Для $k_{(0)}(u) = u^\sigma$ $(\sigma \neq 0)$, $k_{(1)}(u)$ вида (13) и $C_{5(0)} = 0$ имеем

$$\xi^0_{(1)} = C_{1(1)} + 2C_{3(1)}t + 2C_{3(0)}t - 2A_2C_{4(0)}t,$$
$$\xi^1_{(1)} = C_{2(1)} + C_{3(1)}x + C_{4(1)}\sigma x,$$
$$\eta_{(1)} = 2C_{4(1)}u + 2A_1C_{4(0)}.$$

Для $k_{(0)}(u) = u^{-4/3}$ и $C_{5(0)} \neq 0$ система имеет решение, только если в функции $k_{(1)}(u)$ вида (13) $A_2 = 0$:

$$\xi^0_{(1)} = C_{1(1)} + 2C_{3(1)}t + 2C_{3(0)}t,$$

$$
\begin{aligned}
&\xi^1_{(1)} = C_{2(1)} + C_{3(1)}x - 2C_{4(1)}x - C_{5(1)}x^2,\\
&\eta_{(1)} = 3C_{4(1)}u + 3C_{5(1)}xu + A_1\left(2C_{4(0)} + 3C_{5(0)}x\right).
\end{aligned}
$$

`Случай IV.` Возмущение линейного уравнения $k_{(0)}(u) = 1$. В этом случае из [10] имеем

$$
\begin{aligned}
&\xi^0_{(0)} = C_{1(0)} + 2C_{3(0)}t - 4C_{5(0)}t^2,\\
&\xi^1_{(0)} = C_{2(0)} + C_{3(0)}x - 2C_{4(0)}t - 4C_{5(0)}xt,\\
&\eta_{(0)} = (C_{6(0)} + C_{4(0)}x + C_{5(0)}x^2 + 2C_{5(0)}t)u + g(t,x),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где $g(t,x)$ — произвольное решение уравнения $g_t = g_{xx}$ и $C_{i(0)}$ $(i = 1,\ldots,6)$ — произвольные постоянные.

С учетом (14) для координат продолженного оператора имеем

$$
\begin{aligned}
\zeta^1_{1(0)} &= (C_{6(0)} - C_{3(0)} + C_{4(0)}x + C_{5(0)}x^2 + 6C_{5(0)}t)u_x + (C_{4(0)} + 2C_{5(0)}x)u + g_x,\\
\zeta^2_{1(0)} &= (C_{6(0)} - 2C_{3(0)} + C_{4(0)}x + C_{5(0)}x^2 + 10C_{5(0)}t)u_{xx} +\\
&\qquad\qquad\qquad + 2(C_{4(0)} + 2C_{5(0)}x)u_x + C_{5(0)}u + g_{xx},\\
\zeta^n_{0(0)} &= (C_{6(0)} + C_{4(0)}x + C_{5(0)}x^2 + 2C_{5(0)}t - 2kC_{3(0)} + 8C_{5(0)}t)D^n_t u +\\
&\qquad + 2k(2k-1)C_{5(0)}D^{n-1}_t u + 2k(C_{4(0)} + 2C_{5(0)}x)D^{n-1}_t u_x + D^n_t g.
\end{aligned}
$$

Расщепление соответствующего определяющего уравнения по переменным $D^n_t u$ и $D^n_t u_x$ $(n \geqslant 2)$ дает

$$
C_{1(0)} = 0, \quad C_{4(0)} = 0, \quad C_{5(0)} = 0, \quad \xi^1_{(1)u} = 0.
$$

Дальнейшее расщепление по $u_t u_x$, $u_t u_x^2$, u_{tx}, $u_{tx}u_x$ приводит к уравнениям

$$
\xi^0_{(1)u} = 0, \quad \xi^0_{(1)x} = 0.
$$

С учетом приведенных уравнений расщепление оставшейся части определяющего уравнения по u_t, u_x, u_x^2 дает систему

$$
\begin{aligned}
&2\xi^1_{(1)x} - \xi^0_{(1)t} = -2C_{3(0)} + (C_{6(0)}u + g)k'_{(1)},\\
&2\eta_{(1)xu} - \xi^1_{(1)xx} + \xi^1_{(1)t} = -2g_x k'_{(1)},\\
&\eta_{(1)uu} = -C_{6(0)}(uk'_{(1)})_u - gk''_{(1)},\\
&\eta_{(1)t} - \eta_{(1)xx} = k_{(1)}g_{xx} - \big((\ln t + \gamma - 1)g\big)_t - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n(n+1)!}D^{n+1}_t g.
\end{aligned}
$$

Дифференцирование по u первого уравнения данной системы приводит к классифицирующему соотношению для $k_{(1)}(u)$:

$$
C_{6(0)}k'_{(1)} + (C_{6(0)}u + g)k''_{(1)} = 0.
$$

Возможны следующие четыре случая:

a) $k_{(1)}(u)$ — произвольная функция и $g(t,x)=0$, $C_{6(0)}=0$;

b) $k_{(1)}(u)=A_0+A_1u$, $C_{6(0)}=0$;

c) $k_{(1)}(u)=A_0+A_1\ln u$, $g(t,x)=0$;

d) $k_{(1)}(u)=A_0$,

где A_0 и A_1 — произвольные постоянные.

Для каждого из этих случаев было получено решение приведенной выше системы.

a) Для произвольной $k_{(1)}(u)$:

$$
\begin{aligned}
&C_{1(0)}=C_{4(0)}=C_{5(0)}=C_{6(0)}=g(t,x)=0,\\
&\xi^0_{(1)}=C_{1(1)}+2C_{3(1)}t-4C_{5(1)}t^2+2C_{3(0)}t,\\
&\xi^1_{(1)}=C_{2(1)}+C_{3(1)}x-2C_{4(1)}t-4C_{5(1)}xt,\\
&\eta_{(1)}=(C_{6(1)}+C_{4(1)}x+C_{5(1)}x^2+2C_{5(1)}t)u+h(t,x),\\
&\quad h_t=h_{xx}.
\end{aligned}
$$

b) Для $k_{(1)}(u)=A_1u+A_0$:

$$
\begin{aligned}
&C_{1(0)}=C_{4(0)}=C_{5(0)}=C_{6(0)}=0,\\
&g(t,x)=G_1\Big(t^2+tx^2+\frac{x^4}{12}\Big)+G_2\Big(tx+\frac{x^3}{6}\Big)+G_3(2t+x^2)+G_4x+G_5;\\
&\xi^0_{(1)}=C_{1(1)}+2C_{3(1)}t-4C_{5(1)}t^2+2C_{3(0)}t-\frac{4}{3}A_1G_1t^3,\\
&\xi^1_{(1)}=C_{2(1)}+C_{3(1)}x-2C_{4(1)}t-4C_{5(1)}xt+\\
&\qquad+A_1\Big[G_1\Big(-\frac{3t^2x}{2}+\frac{tx^3}{6}+\frac{x^5}{120}\Big)+G_2\Big(-\frac{3t^2}{4}+\frac{tx^2}{4}+\frac{x^4}{48}\Big)+\\
&\qquad\qquad+G_3\Big(tx+\frac{x^3}{6}\Big)+G_4\frac{x^2}{4}+G_5\frac{x}{2}\Big],\\
&\eta_{(1)}=\big(C_{6(1)}+C_{4(1)}x+C_{5(1)}x^2+2C_{5(1)}t\big)u+\\
&\qquad+A_1\Big[G_1\Big(t^2-\frac{x^4}{12}\Big)-G_2\frac{x^3}{6}-G_3x^2-\frac{3}{4}G_4x\Big]u+\\
&\qquad+G_1\Big[\Big(2A_0-3\ln t-2\gamma+\frac{9}{2}\Big)t^2+\\
&\qquad\qquad+\big(A_0-2\ln t-\gamma+2\big)tx^2-\frac{x^4}{12}\ln t\Big]+\\
&\qquad+G_2\Big[(A_0-2\ln t-\gamma+2)xt-\frac{x^3}{6}\ln t\Big]+\\
&\qquad+G_3\big[2(A_0-2\ln t-\gamma+2)t-x^2\ln t\big]+\\
&\qquad\qquad+G_4\frac{t}{4}(t+x^2)-G_5\ln t+h(t,x),\\
&\quad h_t=h_{xx}.
\end{aligned}
$$

c) Для $k_{(1)}(u)=A_1\ln u+A_0$:

$$
C_{1(0)}=C_{4(0)}=C_{5(0)}=g(t,x)=0,
$$

$$\xi^0_{(1)} = C_{1(1)} + 2C_{3(1)}t - 4C_{5(1)}t^2 + 2C_{3(0)}t - A_1C_{6(0)}t,$$
$$\xi^1_{(1)} = C_{2(1)} + C_{3(1)}x - 2C_{4(1)}t - 4C_{5(1)}xt,$$
$$\eta_{(1)} = (C_{6(1)} + C_{4(1)}x + C_{5(1)}x^2 + 2C_{5(1)}t)u + h(t,x),$$
$$h_t = h_{xx}.$$

d) Для $k_{(1)}(u) = A_0$:

$$C_{1(0)} = C_{4(0)} = C_{5(0)} = 0,$$
$$\xi^0_{(1)} = C_{1(1)} + 2C_{3(1)}t - 4C_{5(1)}t^2 + 2C_{3(0)}t,$$
$$\xi^1_{(1)} = C_{2(1)} + C_{3(1)}x - 2C_{4(1)}t - 4C_{5(1)}xt,$$
$$\eta_{(1)} = (C_{6(1)} + C_{4(1)}x + C_{5(1)}x^2 + 2C_{5(1)}t)u + h(t,x),$$
$$h_t = h_{xx} + A_0 g_{xx} - \big((\ln t + \gamma - 1)g\big)_t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n(n+1)!} D_t^{n+1} g.$$

В результате доказана следующая

Теорема. *Приближенное уравнение субдиффузии (7) в случае произвольной функции $k(u) = k_{(0)}(u) + \varepsilon k_{(1)}(u)$ допускает пятипараметрическую группу приближенных точечных преобразований, порождаемую операторами*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + (1-\varepsilon)x\frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_3 = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_4 = \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_5 = 2\varepsilon t\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon x\frac{\partial}{\partial x}.$$

Расширение группы имеет место в следующих случаях.

I. $k(u) = e^u\big(1 + \varepsilon(A_0 + A_1 u + A_2 u^2)\big)$. *Группа является семипараметрической и расширяется операторами*

$$X_6 = \big(1 - \varepsilon(\ln t - 2 - A_1)\big)t\frac{\partial}{\partial t} - \big(1 - \varepsilon(\ln t + 2A_2 u)\big)\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_7 = \varepsilon t\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial u}.$$

II. $k(u) = u^\sigma\Big[1 + \varepsilon\Big(A_0 + \sigma\dfrac{A_1}{u} + A_2 \ln u\Big)\Big]$ $(\sigma \neq 0)$. *Группа является семипараметрической и расширяется операторами*

$$X_6 = -2A_2\varepsilon t\frac{\partial}{\partial t} + \sigma x\frac{\partial}{\partial x} + 2(u + \varepsilon A_1)\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_7 = \varepsilon\sigma x\frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon u\frac{\partial}{\partial u}.$$

III. $k(u) = u^{-\frac{4}{3}}\Big[1 + \varepsilon\Big(A_0 - \dfrac{4A_1}{3u}\Big)\Big]$. *Группа является девятипараметрической и расширяется операторами*

$$X_6 = 2x\frac{\partial}{\partial x} - 3(u + \varepsilon A_1)\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_7 = x^2\frac{\partial}{\partial x} - 3x(u + \varepsilon A_1)\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_8 = 2\varepsilon x\frac{\partial}{\partial x} - 3\varepsilon u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_9 = \varepsilon x^2\frac{\partial}{\partial x} - 3\varepsilon x u\frac{\partial}{\partial u}.$$

IV. $k(u) = 1 + \varepsilon k_1(u)$.

IV.1) $k_1(u)$ — *произвольная функция. Группа является бесконечномерной и расширяется операторами*

$$X_6 = 2\varepsilon t\frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon xu\frac{\partial}{\partial u},\ X_7 = -4\varepsilon t^2\frac{\partial}{\partial t} - 4\varepsilon tx\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon(2t + x^2)u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_8 = \varepsilon u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_\infty = \varepsilon h(t,x)\frac{\partial}{\partial u},$$

где $h(t,x)$ — *произвольное решение уравнения* $h_t = h_{xx}$.

IV.2) $k_1(u) = A = \mathrm{const}$. *Группа является бесконечномерной и расширяется операторами*

$$X_6 = u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_7 = -4\varepsilon t^2\frac{\partial}{\partial t} - 4\varepsilon tx\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon(2t + x^2)u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_8 = 2\varepsilon t\frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon xu\frac{\partial}{\partial u},\quad X_9 = \varepsilon u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_{1\infty} = g(t,x)\frac{\partial}{\partial u},\quad X_{2\infty} = \varepsilon h(t,x)\frac{\partial}{\partial u},$$

где $g(t,x)$ *и* $h(t,x)$ — *соответственно произвольные решения уравнений*

$$g_t = g_{xx},\ h_t = h_{xx} + Ag_{xx} - \big((\ln t + \gamma - 1)g\big)_t - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n(n+1)!}D_t^{n+1}g.$$

IV.3) $k_1(u) = A_0 + A_1\ln u$. *Группа является бесконечномерной и расширяется операторами*

$$X_6 = \varepsilon A_1 t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_7 = -4\varepsilon t^2\frac{\partial}{\partial t} - 4\varepsilon tx\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon(2t + x^2)u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_8 = \varepsilon u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_9 = 2\varepsilon t\frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon xu\frac{\partial}{\partial u},\quad X_\infty = \varepsilon h(t,x)\frac{\partial}{\partial u},$$

где $h(t,x)$ — *произвольное решение уравнения* $h_t = h_{xx}$.

IV.4) $k_1(u) = A_0 + A_1 u$. *Группа является бесконечномерной и расширяется операторами*

$$X_6 = 2\varepsilon t\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon x\frac{\partial}{\partial x},\quad X_7 = -4\varepsilon tx\frac{\partial}{\partial x} - 4\varepsilon t^2\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon(2t + x^2)u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_8 = \varepsilon u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_9 = -\varepsilon\frac{4}{3}A_1 t^3\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon A_1\Big(-\frac{3t^2x}{2} + \frac{tx^3}{6} + \frac{x^5}{120}\Big)\frac{\partial}{\partial x} +$$
$$+ \Big\{\Big[1 + \varepsilon\Big(2A_0 - 3\ln t - 2\gamma + \frac{9}{2} + A_1 u\Big)\Big]t^2 +$$
$$+ \big[1 + \varepsilon(A_0 - 2\ln t - \gamma + 2)\big]tx^2 + \big[1 - \varepsilon(A_1 u + \ln t)\big]\frac{x^4}{12}\Big\}\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_{10} = \varepsilon A_1\Big(-\frac{3t^2}{4} + \frac{tx^2}{4} + \frac{x^4}{48}\Big)\frac{\partial}{\partial x} + \\ + \Big\{\big[1 + \varepsilon(A_0 - 2\ln t - \gamma + 2)\big]tx + \big[1 - \varepsilon(A_1 u + \ln t)\big]\frac{x^3}{6}\Big\}\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_{11} = \varepsilon A_1\Big(tx + \frac{x^3}{6}\Big)\frac{\partial}{\partial x} + \big\{\big[1 + \varepsilon(A_0 - 2\ln t - \gamma + 2)\big]^2 t + \\ + \big[1 - \varepsilon(A_1 u + \ln t)\big]x^2\big\}\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_{12} = \varepsilon A_1\frac{x^2}{4}\frac{\partial}{\partial x} + \Big[x - \frac{\varepsilon}{4}(3A_1 xu - t^2 - tx^2)\Big]\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_{13} = \varepsilon A_1\frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x} + (1 - \varepsilon\ln t)\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_\infty = \varepsilon h(t,x)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Сравнение полученных результатов с результатами групповой классификации уравнения (1) из работы [13] показывает, что приближенное уравнение субдиффузии (7) обладает более широкой группой симметрий по сравнению с исходным дробно-дифференциальным уравнением субдиффузии (1). В частности, имеет место наследование группы в случае

$$k_{(0)}(u) = e^u$$

(см. п. I расширения группы в доказанной теореме). При групповой классификации дробно-дифференциального уравнения субдиффузии (1) было показано, что случай

$$k_\alpha(u) = e^u$$

не приводит к расширению допускаемой группы точечных преобразований.

С другой стороны, в [13] получено расширение допускаемой группы уравнения (1) в случае

$$k_\alpha(u) = u^{-\frac{2\alpha}{\alpha-1}},$$

который при $\alpha = 1 - \varepsilon$ переходит в

$$k_{1-\varepsilon}(u) = u^{-2+\frac{2}{\varepsilon}}.$$

Для приближенного уравнения субдиффузии (5) этот случай является особым, поскольку данная функция $k_{1-\varepsilon}(u)$ не допускает разложения вида (6) по малому параметру ε и не приводит, таким образом, к уравнению (7).

Заключение. Проведенная в работе групповая классификация приближенного уравнения субдиффузии дает возможность построения приближенно инвариантных решений этого уравнения, которые будут являться приближенными решениями исходного дробно-дифференциального уравнения субдиффузии (1). Поскольку допускаемая группа приближенного уравнения оказалась более широкой, чем группа исходного уравнения, не все такие приближенные решения могут быть получены из точных инвариантных решений уравнения (1) путем разложения по малому параметру $\varepsilon = 1 - \alpha$, то есть ряд таких решений будут новыми. Для нахождения всех таких неподобных приближенно инвариантных решений требуется построение оптимальной системы подалгебр алгебр Ли приближенных инфинитезимальных операторов, соответствующих отдельно каждому случаю групповой классификации из доказанной в данной работе теоремы, что представляет собой самостоятельную задачу для продолжения исследований.

Декларация о финансовых и других взаимоотношениях. Исследование не имело спонсорской поддержки. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена автором. Автор не получал гонорар за статью.

ORCID
Станислав Юрьевич Лукащук: http://orcid.org/0000-0001-9209-5155

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo Y. Y. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204 / ed. J. van Mill. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 pp.
3. Нахушев А. М. *Дробное исчисление его применение*. М.: Физматлит, 2009. 272 с.
4. Учайкин В. В. *Метод дробных производных*. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
5. Mainardy F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models*. Singapore: World Scientific, 2010. xx+367 pp. doi: 10.1142/9781848163300.
6. Головизнин В. М., Кондратенко П. С., Матвеев Л. В., Короткин И. А., Драников И. Л. *Аномальная диффузия радионуклидов в сильнонеоднородных геологических формациях*. М.: Наука, 2010. 342 с.
7. Tarasov V. E. *Fractional dynamics: Application of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media* / Nonlinear Physical Science. Heidelberg: Springer, 2011. xv+495 pp. doi: 10.1007/978-3-642-14003-7.
8. Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J. J. *Fractional calculus: Models and numerical methods* / Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos. vol. 3. Singapore: World Scientific, 2012. 400 pp. doi: 10.1142/9789814355216.
9. Uchaikin V., Sibatov R. *Fractional kinetics in solids: Anomalous charge transport in semiconductors, dielectrics and nanosystems*. Singapore: World Scientific, 2013. 276 pp. doi: 10.1142/8185.
10. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978. 400 с.
11. Ибрагимов Н. Х. *Группы преобразований в математической физике*. М.: Наука, 1983. 280 с.
12. Газизов Р. К., Касаткин А. А., Лукащук С. Ю. Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка // *Вестник УГАТУ*, 2007. Т. 9, № 32(21). С. 125–135.
13. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Symmetry properties of fractional diffusion equations // *Physica Scripta*, 2009. vol. 2009, no. T136, 014016. doi: 10.1088/0031-8949/2009/t136/014016.
14. Газизов Р. К., Касаткин А. А., Лукащук С. Ю. Уравнения с производными дробного порядка: замены переменных и нелокальные симметрии // *Уфимск. матем. журн.*, 2012. Т. 4, № 4. С. 54–68.
15. Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Dynamics with low-level fractionality // *Phys. A*, 2006. vol. 368, no. 2. pp. 399–415. doi: 10.1016/j.physa.2005.12.015.

16. Tofighi A., Golestani A. A perturbative study of fractional relaxation phenomena // *Phys. A*, 2008. vol. 387, no. 8–9. pp. 1807–1817. doi: 10.1016/j.physa.2007.11.046.
17. Tofighi A. An Especial Fractional Oscillator // *International Journal of Statistical Mechanics*, 2013. vol. 2013, 175273. 5 pp.. doi: 10.1155/2013/175273.
18. Nayfeh A. H. *Perturbation Methods*. Mörlenbach: Willey, 2000. xii+495 pp. doi: 10.1002/9783527617609.
19. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Приближенные симметрии // *Матем. сб.*, 1988. Т. 136(178), № 4(8). С. 435–450.
20. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Методы возмущений в групповом анализе / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., Т. 34. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 85–147.
21. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Приближенные группы преобразований // *Дифференц. уравнения*, 1993. Т. 29, № 10. С. 1712–1732.
22. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Phys. Rep.*, 2000. vol. 339, no. 1. pp. 1–77. doi: 10.1016/s0370-1573(00)00070-3.
23. Учайкин В. В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // *УФН*, 2003. Т. 173, № 8. С. 847–876. doi: 10.3367/UFNr.0173.200308c.0847.
24. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка*. М.: Наука, 2005. 199 с.
25. Luchko Yu. Anomalous diffusion: models, their analysis, and interpretation / *Advances in Applied Analysis. Trends in Mathematics*; eds. S. Rogosin, A. Koroleva. Basel: Birkhäuser, 2012. pp. 115–145. doi: 10.1007/978-3-0348-0417-2_3.
26. Хуштова Ф. Г. Фундаментальное решение модельного уравнения аномальной диффузии дробного порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 722–735. doi: 10.14498/vsgtu1445.
27. Bologna M., Tsallis C., Grigolini P. Anomalous diffusion associated with nonlinear fractional derivative Fokker-Planck-like equation: Exact time-dependent solutions // *Phys. Rev. E*, 2000. vol. 62, no. 2. pp. 2213–2218. doi: 10.1103/physreve.62.2213.
28. Lenzi E. K., Lenzi M. K., Evangelista L. R., Malacarne L. C., Mendes R. S. Solutions for a fractional nonlinear diffusion equation with external force and absorbent term // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2009. vol. 2009, no. 2, P02048. doi: 10.1088/1742-5468/2009/02/p02048.
29. Bonforte M., Vázquez J. L. Fractional nonlinear degenerate diffusion equations on bounded domains part I. Existence, uniqueness and upper bounds // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2016. vol. 131. pp. 363–398. doi: 10.1016/j.na.2015.10.005.
30. Lukashchuk S. Yu., Makunin A. V. Group classification of nonlinear time-fractional diffusion equation with a source term // *Applied Mathematics and Computation*, 2015. vol. 257. pp. 335–343. doi: 10.1016/j.amc.2014.11.087.
31. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables* / eds. Milton Abramowitz, Irene A. Stegun. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1984. xiv+1046 pp.

Поступила в редакцию 27/X/2016;
в окончательном варианте — 12/XI/2016;
принята в печать — 09/XII/2016.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 4, pp. 603–619

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1520

MSC: 35R11, 35B20, 70G65

AN APPROXIMATE GROUP CLASSIFICATION OF A PERTURBED SUBDIFFUSION EQUATION

S. Yu. Lukashchuk

Ufa State Aviation Technical University,
12, K. Marx st., Ufa, 450000, Russian Federation.

Abstract

A problem of the Lie point approximate symmetry group classification of a perturbed subdiffusion equation with a small parameter is solved. The classification is performed with respect to anomalous diffusion coefficient which is considered as a function of an independent variable. The perturbed subdiffusion equation is derived from a fractional subdiffusion equation with the Riemann-Liouville time-fractional derivative under an assumption that the order of fractional differentiation is close to unity. As it is follow from the classification results, the perturbed subdiffusion equation admits a more general Lie point symmetry group than the initial fractional subdiffusion equation. The obtained results permit to construct approximate invariant solutions for the perturbed subdiffusion equation corresponding to different functions of the anomalous diffusion coefficient. These solutions will also be the approximate solutions of the initial fractional subdiffusion equation.

Keywords: fractional differential equation, subdiffusion, small parameter, approximate transformation group, group classification.

Declaration of Financial and Other Relationships. The research has not had any sponsorship. The author is absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. The author has approved the final version of manuscript. The author has not received any fee for the article.

ORCID
Stanislav Yu. Lukashchuk: http://orcid.org/0000-0001-9209-5155

REFERENCES

1. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. Philadelphia, Gordon and Breach Sci. Publ., 1993, xxxvi+976 pp.
2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo Y. Y. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, ed. J. van Mill. Amsterdam, Elsevier, 2006, 523 pp.

Please cite this article in press as:
Lukashchuk S. Yu. An approximate group classification of a perturbed subdiffusion equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 4, pp. 603–619. doi: 10.14498/vsgtu1520. (In Russian)

Author Details:
Stanislav Yu. Lukashchuk (Cand. Phys. & Math. Sci.; lsu@ugatu.su), Associate Professor, Dept. of High Performance Computing Technologies and Systems.

3. Nakhushev A. M. *Drobnoe ischislenie ego primenenie* [Fractional calculus and its applications]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 272 pp. (In Russian)
4. Uchaikin V. V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of Fractional Derivatives]. Ulyanovsk, Artishok, 2008, 512 pp. (In Russian)
5. Mainardy F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models.* Singapore, World Scientific, 2010. xx+367 pp. doi: 10.1142/9781848163300.
6. Goloviznin V. M., Kondratenko P. S., Matveev L. V., Korotkin I. A., Dranikov I. L. *Anomal'naia diffuziia radionuklidov v sil'noneodnorodnykh geologicheskikh formatsiiakh* [Anomalous Radionuclide Diffusion in Highly Heterogeneous Geological Formations]. Moscow, Nauka, 2010, 342 pp. (In Russian)
7. Tarasov V. E. *Fractional dynamics: Application of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*, Nonlinear Physical Science. Heidelberg, Springer, 2011. xv+495 pp. doi: 10.1007/978-3-642-14003-7.
8. Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J. J. *Fractional calculus: Models and numerical methods*, Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, vol. 3. Singapore, World Scientific, 2012. 400 pp. doi: 10.1142/9789814355216.
9. Uchaikin V., Sibatov R. *Fractional kinetics in solids: Anomalous charge transport in semiconductors, dielectrics and nanosystems.* Singapore, World Scientific, 2013. 276 pp. doi: 10.1142/8185.
10. Ovsiannikov L. V. *Group Analysis of Differential Equations*. New York, London, Academic Press, 1982. 416 pp. doi: 10.1016/c2013-0-07470-1.
11. Ibragimov N. H. *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, Mathematics and Its Applications (Soviet Series), vol. 3. Dordrecht, Boston, Lancaster, D. Reidel Publ. Company, 1985. xv++394 pp. doi: 10.1007/978-94-009-5243-0.
12. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Iu. Continuous transformation groups of fractional differential equations, *Vestnik UGATU*, 2007, vol. 9, no. 32(21), pp. 125–135 (In Russian).
13. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Symmetry properties of fractional diffusion equations, *Physica Scripta*, 2009, vol. 2009, no. T136, 014016. doi: 10.1088/0031-8949/2009/t136/014016.
14. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Fractional differential equations: change of variables and nonlocal symmetries, *Ufa Mathematical Journal*, 2012, vol. 4, no. 4, pp. 54–67.
15. Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Dynamics with low-level fractionality, *Phys. A*, 2006, vol. 368, no. 2, pp. 399–415. doi: 10.1016/j.physa.2005.12.015.
16. Tofighi A., Golestani A. A perturbative study of fractional relaxation phenomena, *Phys. A*, 2008, vol. 387, no. 8–9, pp. 1807–1817. doi: 10.1016/j.physa.2007.11.046.
17. Tofighi A. An Especial Fractional Oscillator, *International Journal of Statistical Mechanics*, 2013, vol. 2013, 175273, 5 pp.. doi: 10.1155/2013/175273.
18. Nayfeh A. H. *Perturbation Methods.* Mörlenbach, Willey, 2000. xii+495 pp. doi: 10.1002/9783527617609.
19. Baikov V. A., Gazizov R. K., Ibragimov N. Kh. Approximate symmetries, *Math. USSR-Sb.*, 1989, vol. 64, no. 2, pp. 427–441. doi: 10.1070/SM1989v064n02ABEH003318.
20. Baikov V. A., Gazizov R. K., Ibragimov N. Kh. Perturbation methods in group analysis, *J. Soviet Math.*, 1991, vol. 55, no. 1, pp. 1450–1490. doi: 10.1007/BF01097534.
21. Baikov V. A., Gazizov R. K., Ibragimov N. H. Approximate groups of transformations, *Differ. Equ.*, 1993, vol. 29, no. 10, pp. 1487–1504.
22. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Phys. Rep.*, 2000, vol. 339, no. 1, pp. 1–77. doi: 10.1016/s0370-1573(00)00070-3.
23. Uchaikin V. V. Self-similar anomalous diffusion and Levy-stable laws, *Phys. Usp.*, 2003, vol. 46, no. 8, pp. 821–849. doi: 10.1070/PU2003v046n08ABEH001324.

24. Pskhu A. V. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka* [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka, 2005, 199 pp. (In Russian)
25. Luchko Yu. Anomalous diffusion: models, their analysis, and interpretation, In: *Advances in Applied Analysis. Trends in Mathematics*; eds. S. Rogosin, A. Koroleva. Basel, Birkhäuser, 2012, pp. 115–145. doi: 10.1007/978-3-0348-0417-2_3.
26. Khushtova F. G. Fundamental solution of the model equation of anomalous diffusion of fractional order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 722–735 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1445.
27. Bologna M., Tsallis C., Grigolini P. Anomalous diffusion associated with nonlinear fractional derivative Fokker-Planck-like equation: Exact time-dependent solutions, *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 62, no. 2, pp. 2213–2218. doi: 10.1103/physreve.62.2213.
28. Lenzi E. K., Lenzi M. K., Evangelista L. R., Malacarne L. C., Mendes R. S. Solutions for a fractional nonlinear diffusion equation with external force and absorbent term, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2009, vol. 2009, no. 2, P02048. doi: 10.1088/1742-5468/2009/02/p02048.
29. Bonforte M., Vázquez J. L. Fractional nonlinear degenerate diffusion equations on bounded domains part I. Existence, uniqueness and upper bounds, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2016, vol. 131, pp. 363–398. doi: 10.1016/j.na.2015.10.005.
30. Lukashchuk S. Yu., Makunin A. V. Group classification of nonlinear time-fractional diffusion equation with a source term, *Applied Mathematics and Computation*, 2015, vol. 257, pp. 335–343. doi: 10.1016/j.amc.2014.11.087.
31. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, eds. Milton Abramowitz, Irene A. Stegun. New York, John Wiley & Sons, Inc, 1984, xiv+1046 pp.

Received 27/X/2016;
received in revised form 12/XI/2016;
accepted 09/XII/2016.