



УДК 517.968.73

Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с логарифмической особенностью в ядре

*С. К. Зарипов*Таджикский национальный университет,
Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудаки 17.

Аннотация

Для одного модельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с логарифмической особенностью в ядре в зависимости от корней характеристического уравнения найдены интегральные представления многообразия решений через произвольные постоянные. Найдены случаи, когда данное интегро-дифференциальное уравнение имеет единственное решение. Построены аналоги теоремы Фредгольма для этого интегро-дифференциального уравнения. Используемый метод можно применять для изучения модельных и немодельных интегро-дифференциальных уравнений высших порядков.

Ключевые слова: модельное интегро-дифференциальное уравнение, граничные сингулярные точки, интегральные представления, логарифмическая особенность, характеристическое уравнение.

Получение: 20 октября 2016 г. / Исправление: 14 марта 2017 г. /

Принятие: 12 июня 2017 г. / Публикация онлайн: 9 июля 2017 г.

Введение. Многие задачи прикладного характера, например задача Вольтерра о крутильных колебаниях [1], задача Прандтля расчёта крыла самолета [2, 3], задача об изучении кинетического уравнения Больцмана, приводят к изучению интегро-дифференциальных уравнений. Существует большое количество работ для изучения обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений с регулярными коэффициентами [4, 5]. Также в последние годы в силу своей прикладной важности изучаются прямые и обратные задачи

Статья

© Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Зарипов С. К. Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с логарифмической особенностью в ядре // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 2. С. 236–248. doi: [10.14498/vsgtu1515](https://doi.org/10.14498/vsgtu1515).

Сведения об авторе

Сарвар Кахрамонович Зарипов ✉кандидат физико-математических наук; старший преподаватель; каф. математического анализа и теории функций; e-mail: sarvar8383@list.ru

для интегро-дифференциальных уравнений, а также разрабатываются методы для приближённого решения этих уравнений [6–11]. Одним из важных разделов теории интегро-дифференциальных уравнений являются уравнения с сингулярными коэффициентами [2, 3, 12] или с сингулярно возмущенными коэффициентами [13, 14]. Также бурно развивается изучение сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с фредгольмовыми операторами в банаховых пространствах [15–17]. Но важно заметить, что в этих сингулярных интегро-дифференциальных уравнениях существующие интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши и поэтому для решения этих уравнений применяются методы теории аналитических функций. В случае, когда в сингулярных интегро-дифференциальных уравнениях интегралы понимаются в обычном смысле Римана, т. е. когда рассматривается уравнение вида

$$y'(x) + \frac{A}{x-a}y(x) + \int_a^x \frac{B}{(t-a)^{\alpha+1}}y(t)dt = f(x), \quad (1)$$

где $\alpha = 1$ или $\alpha > 1$, исследователи не обращали особого внимания на решения таких уравнений. Это происходило потому, что ядро уравнений в этих случаях будет нефредгольмовым и поэтому изучение таких уравнений считалось неактуальным. Но оказывается, что в зависимости от класса, в котором ищутся решения уравнения (1), вопрос о его изучении становится актуальным, причём даёт такие эффекты, которые в существующей теории не наблюдались.

Заметим, что впервые в монографии [18] была предложена новая методика изучения интегральных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами, которая потом в работах [19, 20] обобщалась на случай многомерных интегральных уравнений. Эта методика нами была использована для изучения интегро-дифференциальных уравнений вида (1). Например, в работах [21, 22] исследовано уравнение вида (1) в случае, когда $\alpha = 1$ или $\alpha > 1$. Следующим этапом в развитии теории уравнений вида (1) является случай, когда в ядро этого уравнения добавляется логарифмическая особенность. Ниже мы будем исследовать именно такое уравнение.

Постановка задачи и ее решение. Пусть $\Gamma = \{x : a < x < b\}$ — множество точек на вещественной оси. На Γ рассмотрим модельное интегро-дифференциальное уравнение вида (1) с логарифмической особенностью в ядре при $\alpha = 1$, т. е. рассмотрим уравнение вида

$$y'(x) + \frac{P_0}{x-a}y(x) + \int_a^x \left[P_1 + P_2 \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right) \right] \frac{y(t)}{(t-a)^2} dt = f(x), \quad (2)$$

где P_0, P_1, P_2 — заданные постоянные числа, $f(x)$ — заданная функция, $y(x)$ — искомая функция.

Прежде всего, через $C'_a[a, b]$ обозначим класс таких функций, которые имеют производную первого порядка и в точке $x = a$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением

$$y(x) = o[(x-a)^{\gamma_1}], \quad \gamma_1 > 1.$$

Решение однородного уравнения (2) будем искать в классе $C'_a[a, b]$, т. е. в виде

$$y(x) = (x - a)^\lambda, \quad \lambda > 1.$$

Тогда для определения λ получим алгебраическое уравнение

$$\lambda + P_0 + \frac{P_1}{\lambda - 1} + \frac{P_2}{(\lambda - 1)^2} = 0, \quad (3)$$

которое назовем его характеристическим уравнением, соответствующим однородному уравнению (2). Исследуем уравнение (2) в зависимости от корней характеристического уравнения (3).

Случай I.1. Пусть корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и разными и они обозначены через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Кроме этого, пусть эти корни удовлетворяют условию $1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, тогда, согласно общей теории, общее решение однородного уравнения (2) даётся при помощи формулы

$$y(x) = (x - a)^{\lambda_1} c_1 + (x - a)^{\lambda_2} c_2 + (x - a)^{\lambda_3} c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные числа.

Используя метод вариации произвольных постоянных, решение неоднородного уравнения (2) легко находим в таком виде:

$$\begin{aligned} y(x) = & (x - a)^{\lambda_1} c_1 + (x - a)^{\lambda_1} c_2 + (x - a)^{\lambda_1} c_3 - \\ & - \frac{1}{\Delta_0 P_2} \int_a^x \left[\Delta_1 (\lambda_1 - 1)^2 \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^{\lambda_1} + \right. \\ & \left. + \Delta_1 (\lambda_2 - 1)^2 \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^{\lambda_2} + \Delta_3 (\lambda_3 - 1)^2 \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^{\lambda_3} \right] f(t) dt, \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \frac{1}{\lambda_1 - 1} & \frac{1}{\lambda_2 - 1} & \frac{1}{\lambda_3 - 1} \end{vmatrix},$$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ — алгебраические дополнения элементов последней строки определителя Δ_0 . Для сходимости интегралов в правой части (4) требуем, чтобы функция $f(x)$ в точке $x = a$ обращалась в нуль с асимптотическим поведением:

$$f(x) = o \left[(x - a)^{\delta_1} \right], \quad \delta_1 > \lambda_3 - 1. \quad (5)$$

Заметим, что если выполняется неравенство $1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, то полученное решение (4) принадлежит классу $C'_a[a, b]$. Подставляя выражение (4) в уравнение (2), легко находим, что оно в действительности удовлетворяет этому уравнению. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (2) коэффициенты P_0, P_1 , и P_2 такие, что корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и разными и $1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Функция $f(x) \in C[a, b]$ и $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (5). Тогда однородное уравнение (2) имеет три линейно независимых решения, а неоднородное уравнение (2) в классе функций $y(x) \in C'_a[a, b]$, обращающихся в нуль в точке $x = a$,

всегда разрешимо и его общее решение содержит три произвольных постоянных и даётся при помощи формулы (4).

Случай I.2. Теперь пусть $\lambda_1 < 1 < \lambda_2 < \lambda_3$. В этом случае из выражения (4) следует, что если решение уравнения (2) при $\lambda_1 < 1$ существует, то для того, чтобы оно принадлежало классу $C'_a[a, b]$, произвольная постоянная c_1 должна быть равной нулю, т. е. в этом случае решение уравнения (2) имеет вид

$$y(x) = (x-a)^{\lambda_1} c_2 + (x-a)^{\lambda_1} c_3 - \frac{1}{\Delta_0 P_2} \int_a^x \left[\Delta_1 (\lambda_1 - 1)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_1} + \right. \\ \left. + \Delta_1 (\lambda_2 - 1)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_2} + \Delta_3 (\lambda_3 - 1)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_3} \right] f(t) dt. \quad (6)$$

В этом случае для сходимости интегралов в правой части (6) функция $f(x)$ также должна обращаться в нуль с асимптотическим поведением (5). Таким образом, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (2) коэффициенты P_0 , P_1 , и P_2 такие, что корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и разными и $\lambda_1 < 1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Функция $f(x) \in C[a, b]$ и $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (5). Тогда однородное уравнение (2) имеет два линейно независимых решения, а неоднородное уравнение (2) в классе функций $y(x) \in C'_a[a, b]$, обращающихся в нуль в точке $x = a$, всегда разрешимо и его общее решение содержит две произвольные постоянные и даётся по формуле (6).

Случай I.3. Таким же образом доказывается, что в случае, когда $\lambda_1 < \lambda_2 < 1 < \lambda_3$ или $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 1$ имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (2) коэффициенты P_0 , P_1 , и P_2 такие, что корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и разными и $\lambda_1 < \lambda_2 < 1 < \lambda_3$. Функция $f(x) \in C[a, b]$ и $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (5). Тогда однородное уравнение (2) имеет одно линейно независимое решение, а неоднородное уравнение (2) в классе функций $y(x) \in C'_a[a, b]$, обращающихся в нуль в точке $x = a$, всегда разрешимо и его общее решение содержит одну произвольную постоянную и даётся по формуле

$$y(x) = (x-a)^{\lambda_1} c_3 - \frac{1}{\Delta_0 P_2} \int_a^x \left[\Delta_1 (\lambda_1 - 1)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_1} + \right. \\ \left. + \Delta_1 (\lambda_2 - 1)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_2} + \Delta_3 (\lambda_3 - 1)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_3} \right] f(t) dt. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (2) коэффициенты P_0 , P_1 , и P_2 такие, что корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и разными и $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 1$. Функция $f(x) \in C[a, b]$. Тогда однородное уравнение (2) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (2) в классе функций $y(x) \in C'_a[a, b]$ имеет единственное решение, которое даётся при помощи формулы

$$y(x) = -\frac{1}{\Delta_0 P_2} \int_a^x \left[\Delta_1 (\lambda_1 - 1)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_1} + \right. \\ \left. + \Delta_1 (\lambda_2 - 1)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_2} + \Delta_3 (\lambda_3 - 1)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\lambda_3} \right] f(t) dt. \quad (8)$$

Заметим, что в последнем случае для сходимости интеграла в правой части (8) от функции $f(x)$ никаких условий кроме её непрерывности не требуется.

Таким образом, объединяя вышеприведенные результаты для интегро-дифференциального уравнения (2), можно построить аналог теоремы об альтернативе Фредгольма в таком виде.

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ОБ АЛЬТЕРНАТИВЕ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (2), КОГДА КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ (3) ЯВЛЯЮТСЯ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ И РАЗНЫМИ. Если корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют условию $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 1$, то однородное уравнение (2) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (2) для каждой функции $f(x) \in C[a, b]$ имеет решение, и притом единственное, которое даётся по формуле (8). Если корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют одному из условий $\lambda_1 < \lambda_2 < 1 < \lambda_3$, $\lambda_1 < 1 < \lambda_2 < \lambda_3$ или $1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, то однородное уравнение (2) имеет нетривиальные решения и его общее решение содержит либо одну, либо две, либо три произвольных постоянных, а неоднородное уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (5). В этих случаях неоднородное уравнение (2) имеет бесконечное число решений и его общее решение содержит либо одну, либо две, либо три произвольных постоянных и дается соответственно при помощи формулы (7), (6) или (4).

Случай II.1. Пусть корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и равными $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ и $\lambda > 1$, тогда легко можно показать, что общее решение однородного уравнения (2) задаётся формулой

$$y(x) = (x-a)^\lambda c_4 + (x-a)^\lambda \ln(x-a) c_5 + (x-a)^\lambda \ln^2(x-a) c_6,$$

где c_4, c_5, c_6 — произвольные постоянные числа.

Используя метод вариации произвольных постоянных, после простых вычислений решение неоднородного уравнения (2) находим в таком виде:

$$y(x) = (x-a)^\lambda c_4 + (x-a)^\lambda \ln(x-a) c_5 + (x-a)^\lambda \ln^2(x-a) c_6 - \\ - \frac{(\lambda-1)^3}{2P_2} \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^\lambda \left[(\lambda-1)^2 \ln^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right) + \right. \\ \left. + 4(\lambda-1) \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) + 2 \right] f(t) dt. \quad (9)$$

Если поведение функции $f(x)$ в точке $x = a$ определяется из асимптотической формулы

$$f(x) = o \left[(x-a)^{\delta_2} \right], \quad \delta_2 > \lambda - 1, \text{ когда } x \rightarrow a, \quad (10)$$

то интеграл в правой части (9) будет сходящимся. Таким образом, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (9) коэффициенты P_0 , P_1 , и P_2 такие, что корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и равными и $\lambda > 1$. Функция $f(x) \in C[a, b]$ и $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (10). Тогда однородное уравнение (2) имеет три линейно независимых решения, а неоднородное уравнение (2) в классе функций $y(x) \in C'_a[a, b]$ всегда разрешимо и его общее решение содержит три произвольных постоянных и даётся по формуле (9).

Случай II.2. Если $\lambda < 1$, то для того, чтобы решение вида (9) принадлежало классу $C'_a[a, b]$, произвольные постоянные c_4 , c_5 и c_6 должны равняться нулю. Отсюда следует, что в этом случае уравнение (2) имеет только единственное решение и оно имеет вид

$$y(x) = -\frac{(\lambda - 1)^3}{2P_2} \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^\lambda \left[(\lambda - 1)^2 \ln^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right) + 4(\lambda - 1) \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right) + 2 \right] f(t) dt. \quad (11)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (2) коэффициенты P_0 , P_1 , и P_2 такие, что корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и равными и $\lambda < 1$. Функция $f(x) \in C[a, b]$. Тогда однородное уравнение (2) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (2) в классе функций $y(x) \in C'_a[a, b]$ имеет единственное решение, которое даётся формулой (11).

Теперь построим аналог теоремы об альтернативе Фредгольма для уравнения (2).

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ОБ АЛЬТЕРНАТИВЕ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (2), КОГДА КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ (3) ЯВЛЯЮТСЯ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ И РАВНЫМИ. Если корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют условию $\lambda < 1$, то однородное уравнение (2) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (2) для каждой функции $f(x) \in C[a, b]$ имеет единственное решение, которое даётся формулой (11). Если $\lambda > 1$, то однородное уравнение (2) имеет три линейно независимых решения, а неоднородное уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (10). В этом случае неоднородное уравнение (2) имеет бесконечное число решений, его общее решение содержит три произвольных постоянных и даётся формулой (9).

Случай III.1. Пусть среди корней характеристического уравнения (3) существуют комплексно-сопряженные корни. Эти корни обозначим через $\lambda_1 = \lambda$ и $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$. Если, не ограничивая общности, предположить, что $1 < \lambda < \alpha$, то частными решениями однородного уравнения (2) будут функции

$$y_1(x) = (x - a)^\lambda, \quad y_2(x) = (x - a)^\alpha \cos[\beta \ln(x - a)],$$

$$y_3(x) = (x - a)^\alpha \sin[\beta \ln(x - a)]$$

и его общее решение согласно общей теории можно записать в таком виде:

$$y_1(x) = (x - a)^\lambda c_7 + (x - a)^\alpha \cos[\beta \ln(x - a)] c_8 + (x - a)^\alpha \sin[\beta \ln(x - a)] c_9.$$

Как и выше, используя метод вариации произвольных постоянных, решение неоднородного уравнения (2) находим в виде

$$\begin{aligned} y(x) = & (x - a)^\lambda c_7 + (x - a)^\alpha \cos[\beta \ln(x - a)] c_8 + (x - a)^\alpha \sin[\beta \ln(x - a)] c_9 - \\ & - \frac{(\lambda - 1)^2}{D_1 P_2} \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^\lambda f(t) dt - \frac{1}{D_1 P_2 \beta} \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^\alpha \times \\ & \times \left\{ \alpha_1 \sin \left[\beta \ln \left(\frac{x - a}{t - a} \right) \right] + \beta_1 \sin \left[\beta \ln \left(\frac{x - a}{t - a} \right) \right] \right\} f(t) dt, \quad (12) \end{aligned}$$

где $\alpha_1 = (\alpha - 1)^2(\alpha - \lambda) + \beta^2(\alpha + \beta - 2)$, $\beta_1 = (\alpha - 1)\beta(2\lambda - \alpha - 1) - \beta^3$.

Для сходимости интеграла в правой части (12) от функции $f(x)$ потребуем, чтобы она в точке $x = a$ обращалась в нуль с асимптотическим поведением

$$f(x) = o \left[(x - a)^{\delta_3} \right], \quad \delta_3 > \alpha - 1, \text{ когда } x \rightarrow a. \quad (13)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (2) коэффициенты P_0 , P_1 , и P_2 такие, что среди корней характеристического уравнения (3) существуют комплексно-сопряженные корни и выполняется условие $1 < \lambda < \alpha$. Функция $f(x) \in C[a, b]$ и $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (13). Тогда однородное уравнение (2) имеет три линейно независимых решения, а неоднородное уравнение (2) в классе функций $y(x) \in C'_a[a, b]$ всегда разрешимо и его общее решение содержит три произвольных постоянных и даётся при помощи формулы (12).

Случай III.2. Если выполняется условие $\lambda < 1 < \alpha$, то в общем решении (12) произвольная постоянная c_7 должна быть равной нулю. В этом случае решение уравнения (2) имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) = & (x - a)^\alpha \cos[\beta \ln(x - a)] c_8 + (x - a)^\alpha \sin[\beta \ln(x - a)] c_9 - \\ & - \frac{(\lambda - 1)^2}{D_1 P_2} \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^\lambda f(t) dt - \frac{1}{D_1 P_2 \beta} \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^\alpha \times \\ & \times \left\{ \alpha_1 \sin \left[\beta \ln \left(\frac{x - a}{t - a} \right) \right] + \beta_1 \sin \left[\beta \ln \left(\frac{x - a}{t - a} \right) \right] \right\} f(t) dt. \quad (14) \end{aligned}$$

Очевидно, что при выполнении условия (13) интегралы в правой части (14) будут сходящимися. В этом случае имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (2) коэффициенты P_0 , P_1 , и P_2 такие, что среди корней характеристического уравнения (3) существуют комплексно-сопряженные корни и выполняется условие $\lambda < 1 < \alpha$. Функция $f(x) \in C[a, b]$ и $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (13). Тогда однородное уравнение (2) имеет два линейно независимых

решения, а неоднородное уравнение (2) в классе функций $y(x) \in C'_a[a, b]$ всегда разрешимо и его общее решение содержит две произвольных постоянных и даётся при помощи формулы (14).

Случай III.3. В случае, когда выполняется условие $\lambda < \alpha < 1$, в общем решении (12) все произвольные постоянные должны равняться нулю и поэтому уравнение (2) имеет единственное решение, которое даётся формулой

$$y(x) = -\frac{(\lambda - 1)^2}{D_1 P_2} \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^\lambda f(t) dt - \frac{1}{D_1 P_2 \beta} \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^\alpha \times \\ \times \left\{ \alpha_1 \sin \left[\beta \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] + \beta_1 \sin \left[\beta \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \right\} f(t) dt. \quad (15)$$

В этом случае от функции $f(x)$ никаких условий кроме её непрерывности не требуется. Таким образом, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (2) коэффициенты P_0 , P_1 , и P_2 такие, что среди корней характеристического уравнения (3) существуют комплексно-сопряженные корни и выполняется условие $\lambda < \alpha < 1$. Функция $f(x) \in C[a, b]$. Тогда однородное уравнение (2) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (2) в классе функций $y(x) \in C'_a[a, b]$ имеет единственное решение, которое даётся формулой (15).

Объединяя эти результаты, построим аналог теоремы об альтернативе Фредгольма для уравнения (2).

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ОБ АЛЬТЕРНАТИВЕ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (2), КОГДА СРЕДИ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ (3) СУЩЕСТВУЮТ КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫЕ КОРНИ. Если корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют условию $\lambda < \alpha < 1$, то однородное уравнение (2) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (2) для каждой функции $f(x) \in C[a, b]$ имеет единственное решение, которое даётся формулой (15). Если $\lambda < 1 < \alpha$, то однородное уравнение (2) имеет два линейно независимых решения, а неоднородное уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (13). В этом случае неоднородное уравнение (2) имеет бесконечное число решений и его общее решение содержит две произвольные постоянные и выражается формулой (14). Если $1 < \lambda < \alpha$, то однородное уравнение (2) имеет три линейно независимых решения, а неоднородное уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (13). В этом случае неоднородное уравнение (2) имеет бесконечное число решений, его общее решение содержит три произвольных постоянных и выражается формулой (12).

Заключение. В заключение заметим, что в общей теории число произвольных постоянных, входящих в решение интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, равно наибольшему порядку производной, присутствующей в этих уравнениях, и эти произвольные постоянные легко находятся с помощью постановок различных начальных и краевых задач. В отличие от этого мы установили, что решение уравнения (2) в общем случае содержит три произвольные постоянные. Также имеются случаи, когда уравнение

(2) содержит либо одну, либо две произвольные постоянные или выделяется случай, когда уравнение (2) имеет единственное решение без использования каких-либо начальных или краевых задач. Отсюда вытекает, что только в одном случае найденное нами решение согласуется с существующей теорией, а присутствие других случаев показывает новизну данной работы. Далее эти эффекты дают нам возможность построить аналог теоремы Фредгольма для уравнения (2). Заметим, что раньше для интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра такие аналоги не строились.

Другая особенность уравнения (2) заключается в том, что в ядро этого уравнения добавляется логарифмическая особенность, за счёт которой число линейно независимых решений однородного уравнения (2) не уменьшается, а увеличивается. Далее интегральные представления, полученные в данной статье, могут быть использованы для постановки и решения различных начальных и краевых задач.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Место выполнения работы. Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций Таджикского национального университета.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Volterra V. *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publ., 1959. 226 pp.
2. Магнарадзе Л. Г. Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолета // *Сообщ. АН ГрузССР*, 1942. Т. 3, № 6. С. 503–508.
3. Векуа И. Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля // *Прикл. матем. мех.*, 1945. Т. 9, № 2. С. 143–150.
4. Вайнберг М. М. Интегро-дифференциальные уравнения / Итоги науки. Сер. Мат. анализ. Теор. вероятн. Регулир. 1962. М.: ВИНТИ, 1964. С. 5–37.
5. Некрасов А. И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // *Тр. ЦАГИ*, 1934. № 190. С. 1–25.
6. Дурдиев Д. К. Глобальная разрешимость одной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения электродинамики // *Дифференц. уравнения*, 2008. Т. 44, № 7. С. 867–873.
7. Дурдиев Д. К. О единственности определения ядра интегро-дифференциального уравнения параболического типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 658–666. doi: [10.14498/vsgtu1444](https://doi.org/10.14498/vsgtu1444).
8. Сафаров Ж. Ш. Оценки устойчивости решений некоторых обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2014. № 3. С. 75–82.
9. Юлдашев Т. К. Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2013. № 9/1(110). С. 58–66.
10. Юлдашев Т. К. Об обратной задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка // *Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика*, 2014. № 1. С. 153–163.

11. Юлдашев Т. К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 1(34). С. 56–65. doi: [10.14498/vsgtu1299](https://doi.org/10.14498/vsgtu1299).
12. Магнарадзе Л. Г. Об одной системе линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и о линейной граничной задаче Римана // *Сообщ. АН ГрузССР*, 1943. № 5. С. 3–9.
13. Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. Метод нормальных форм в сингулярно возмущенных системах интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами // *Матем. сб.*, 2013. Т. 204, № 7. С. 47–70. doi: [10.4213/sm8139](https://doi.org/10.4213/sm8139).
14. Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. “Всплески” в интегро-дифференциальных уравнениях Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами // *Матем. заметки*, 2009. Т. 85, № 2. С. 163–179. doi: [10.4213/mzm4444](https://doi.org/10.4213/mzm4444).
15. Фалалеев М. В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения // *Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика*, 2012. Т. 5, № 2. С. 90–102.
16. Фалалеев М. В. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения // *Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика*, 2013. Т. 6, № 4. С. 128–137.
17. Фалалеев М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения типа свертки в банаховых пространствах // *Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика*, 2016. Т. 17. С. 77–85.
18. Раджабов Н. *Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения*. Душанбе: Деваштич, 2007. 221 с.
19. Раджабов Н. Многомерное интегральное уравнение вольтеровского типа с сингулярными граничными областями в ядрах // *Докл. РАН*, 2011. Т. 437, № 2. С. 158–161.
20. Раджабов Н., Раджабова Л., Репин О. А. Об одном классе двумерных сопряженных интегральных уравнений вольтеровского типа // *Дифференц. уравнения*, 2011. Т. 47, № 9. С. 1320–1330.
21. Зарипов С. К. Об одном классе модельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с одной сингулярной точкой в ядре // *Вестник Таджикского национального университета*, 2015. № 1/3(164). С. 27–32.
22. Зарипов С. К. Об одном классе модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка со сверх сингулярной точкой в ядре // *Вестник Таджикского национального университета*, 2015. № 1/6(191). С. 6–13.

MSC: 45J05, 34K05, 34K30

A construction of analog of Fredholm theorems for one class of first order model integro-differential equation with logarithmic singularity in the kernel

S. K. Zaripov

Tajik National University,
17, av. Rudaky, Dushanbe, 734025, Tajikistan.

Abstract

The integral representations of the solution manifold for one class of the first order model integro-differential equation with logarithmic singularity in the kernel are constructed using arbitrary constants. The cases when the given integro-differential equation has unique solution are found. The analogue of Fredholm theorem is built for given integro-differential equation. The method of solving this problem can be used for the solving of higher order model and non-model integro-differential equations with singular coefficients.

Keywords: integro-differential equation, boundary singular points, manifold solution, integral representation, characteristic equation.

Received: 20th October, 2016 / Revised: 14th March, 2017 /

Accepted: 12th June, 2017 / First online: 9th July, 2017

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Place of work. The work was carried out at the Mathematical Analysis and Function Theory Department at the Tajik National University.

Funding. The research has not had any sponsorship.

Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zaripov S. R. A construction of analog of Fredholm theorems for one class of first order model integro-differential equation with logarithmic singularity in the kernel, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 236–248. doi: [10.14498/vsgtu1515](http://doi.org/10.14498/vsgtu1515) (In Russian).

Author's Details:

Sarvar K. Zaripov 

Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Lecturer; Dept. of Mathematics Analysis and Function Theory; e-mail: sarvar8383@list.ru

References

1. Volterra V. *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. New York, Dover Publ., 1959, 226 pp.
2. Magnaradze L. G. On a new integral equation of the theory of aircraft wings, *Soobshch. AN GruzSSR*, 1942, vol. 3, no. 6, pp. 503–508 (In Russian).
3. Vekua I. N. On the Prandtl integro-differential equation, *Prikl. matem. mekh.*, 1945, vol. 9, no. 2, pp. 143–150, https://archive.org/details/nasa_techdoc_19880069126.
4. Vainberg M. M. Integro-differential equations, *Itogi Nauki. Ser. Mat. Anal. Teor. Ver. Regulir.* 1962. Moscow, VINITI, 1964, pp. 5–37 (In Russian).
5. Nekrasov A. I. On a Class of Linear Integro-Differential Equations, *Tr. Tsentr. Aerogidrodin. Inst.*, 1934, no. 190, pp. 1–25 (In Russian).
6. Durdiev D. K. Global solvability of an inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics, *Differ. Equ.*, 2008, vol. 44, no. 7, pp. 893–899. doi: [10.1134/S0012266610807001X](https://doi.org/10.1134/S0012266610807001X).
7. Durdiev D. K. On the uniqueness of kernel determination in the integro-differential equation of parabolic type, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 658–666 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1444](https://doi.org/10.14498/vsgtu1444).
8. Safarov Zh. Sh. Evaluation of the stability of some inverse problems solutions for integro-differential equations, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, no. 3, pp. 75–82 (In Russian).
9. Yuldashev T. K. Inverse problem for a nonlinear integral and differential equation of the third order, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*, 2013, no. 9/1(110), pp. 58–66 (In Russian).
10. Yuldashev T. K. On inverse problem for nonlinear integro-differential equations of the higher order, *Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika*, 2014, no. 1, pp. 153–163 (In Russian).
11. Yuldashev T. K. Inverse Problem for a Fredholm Third Order Partial Integro-differential Equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, vol. 1(34), pp. 56–65 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1299](https://doi.org/10.14498/vsgtu1299).
12. Magnaradze L. G. On a system of linear singular integra-differential equations and on the linear Riemann boundary problem, *Soobshch. AN GruzSSR*, 1943, no. 5, pp. 3–9 (In Russian).
13. Bobodzhanov A. A., Safonov V. F. The method of normal forms for singularly perturbed systems of Fredholm integro-differential equations with rapidly varying kernels, *Sb. Math.*, 2013, vol. 204, no. 7, pp. 979–1002. doi: [10.1070/SM2013v204n07ABEH004327](https://doi.org/10.1070/SM2013v204n07ABEH004327).
14. Bobodzhanov A. A., Safonov V. F. “Splashes” in Fredholm integro-differential equations with rapidly varying kernels, *Math. Notes*, 2009, vol. 85, no. 2, pp. 153–167. doi: [10.1134/S0001434609010192](https://doi.org/10.1134/S0001434609010192).
15. Falaleev M. V. Integro-differential equations with Fredholm operator by the derivative of the highest order in Banach spaces and it's applications, *IIGU Ser. Matematika*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 90–102 (In Russian).
16. Falaleev M. V. Singular integro-differential equations of the special type in Banach spaces and it's applications, *IIGU Ser. Matematika*, 2013, vol. 6, no. 4, pp. 128–137 (In Russian).
17. Falaleev M. V. Degenerate integro-differential equations of convolution type in Banach spaces, *IIGU Ser. Matematika*, 2016, vol. 17, pp. 77–85 (In Russian).
18. Rajabov N. *Integral'nye uravneniia tipov Vol'terra s fiksirovannymi granichnymi i vnutrennimi singuliarnymi i sverksinguliarnymi iadrami i ikh prilozheniia* [Integral equations of Volterra types with fixed boundary and internal singular and supersingular kernels and their applications]. Dushanbe, Devashtich, 2007, 221 pp. (In Russian)
19. Rajabov N. Multidimensional Volterra-type integral equation with singular boundary domains in kernels, *Dokl. Math.*, 2011, vol. 83, no. 2, pp. 165–168. doi: [10.1134/S1064562411020116](https://doi.org/10.1134/S1064562411020116).

20. Rajabova L., Rajabov N., Repin O. A. On a class of two-dimensional adjoint integral equations of Volterra type, *Differ. Equ.*, 2011, vol. 47, no. 9, pp. 1333–1343. doi: [10.1134/S0012266111090102](https://doi.org/10.1134/S0012266111090102).
21. Zaripov S. K. On a class of model first-order integro-differential equations with one singular point in the kernel, *Vestnik Tadzhikskogo natsional'nogo universiteta*, 2015, no. 1/3(164), pp. 27–32 (In Russian).
22. Zaripov S. K. On a class of model first-order integro-differential equations with an additional singular point in the kernel, *Vestnik Tadzhikskogo natsional'nogo universiteta*, 2015, no. 1/6(191), pp. 6–13 (In Russian).