Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 2. С. 249–270
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1504

УДК 517.927

Об эффекте «расщепления» для многоточечных дифференциальных операторов с суммируемым потенциалом

С. И. Митрохин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119899, Москва, Воробьёвы горы.

Аннотация

Изучается дифференциальный оператор четвёртого порядка с многоточечными граничными условиями. Потенциал дифференциального оператора является суммируемой функцией на конечном отрезке. При больших значениях спектрального параметра найдена асимптотика решений дифференциального уравнения, задающего дифференциальный оператор. На основе изучения граничных условий выведено уравнение на собственные значения изучаемого оператора. Параметры граничных условий подобраны таким образом, что в главном приближении уравнение на собственные значения имеет кратные корни. Автором показано, что у исследуемого оператора наблюдается эффект «расщепления» кратных в главном приближении собственных значений. Выведены все серии однократных собственных значений изучаемого оператора. Изучена индикаторная диаграмма рассматриваемого оператора. Найдена асимптотика собственных значений во всех секторах индикаторной диаграммы. Полученной точности асимптотических формул достаточно для нахождения асимптотики собственных функций исследуемого дифференциального оператора.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, спектральный параметр, суммируемый потенциал, уравнение на собственные значения, индикаторная диаграмма, асимптотика собственных значений.

Получение: 24 августа 2016 г. / Исправление: 13 мая 2017 г. /
Принятие: 12 июня 2017 г. / Публикация онлайн: 5 июля 2017 г.

Статья

Образец для цитирования
Митрохин С. И. Об эффекте «расщепления» для многоточечных дифференциальных операторов с суммируемым потенциалом // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 2. С. 249–270. doi: 10.14498/vsgtu1504.

Сведения об авторе
Сергей Иванович Митрохин кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник; научно-исследовательский вычислительный центр;
e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

1. Постановка задачи. Исследуем дифференциальный оператор четвертого порядка, задаваемый дифференциальным уравнением вида

$$y^{(4)}(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\tag{1}$$

с многоточечными граничными условиями

$$\begin{gathered}y'(0)=0;\quad y^{(3)}(0)=0;\quad y(\pi)=\alpha_1 y\Big(\frac{\pi}{3}\Big)+\alpha_2 y\Big(\frac{2\pi}{3}\Big);\\ y''(\pi)=\beta_1 y''\Big(\frac{\pi}{3}\Big)+\beta_2 y''\Big(\frac{2\pi}{3}\Big);\\ \beta_1=-\frac{10}{3}-\alpha_1,\quad \alpha_1\in\mathbb{C};\quad \beta_2=\frac{16}{3}-\alpha_2,\quad \alpha_2\in\mathbb{C}.\end{gathered}\tag{2}$$

В уравнении (1) функция $q(x)$ — потенциал, число $\lambda\in\mathbb{C}$ — спектральный параметр. Мы изучаем дифференциальный оператор (1), (2) в предположении, что потенциал $q(x)$ является суммируемой функцией на отрезке $[0;\pi]$:

$$q(x)\in L_1[0;\pi]\Leftrightarrow\left(\int_0^x q(t)dt\right)'_x=q(x)\tag{3}$$

почти для всех x из отрезка $[0;\pi]$.

Многоточечные дифференциальные операторы пока что полностью не изучены даже для случая гладких коэффициентов дифференциальных уравнений, задающих эти операторы. В работе [1] автором для дифференциального оператора второго порядка с кусочно-гладкими коэффициентами был изучен эффект «расщепления» кратных в главном собственных значений. Цель статьи — найти примеры и изучить дифференциальные операторы четвертого порядка с суммируемым потенциалом, у которых наблюдается такой же эффект «расщепления».

Дифференциальные операторы с суммируемыми коэффициентами начали бурно исследоваться в последнее время. В работах [2, 3] были исследованы спектральные свойства оператора Штурма—Лиувилля (второго порядка) с суммируемым потенциалом.

В работах [4, 5] автор исследовал операторы четвертого и шестого порядков с суммируемыми коэффициентами с помощью методики, отличной от методики работ [2, 3]. Необходимо отметить, что с возрастанием порядка дифференциального оператора трудности его исследования увеличиваются многократно. И этот факт верен и для операторов с негладкими коэффициентами: фактически во всех работах этой тематики (см. [6–10]) рассматриваются операторы второго порядка.

Нахождение асимптотики собственных значений необходимо при исследовании свойств собственных функций, а также для вычисления регуляризованных следов дифференциальных операторов (см. [11–13]). Заметим, что общая теория нахождения регуляризованных следов операторов с суммируемыми потенциалами пока не разработана, хотя появились работы, в которых вычислены следы операторов (опять-таки второго порядка) с потенциалом в виде δ-функции (см. [14, 15]). Для операторов четвертого и выше порядков случай, когда потенциал — δ-функция, пока не рассматривался.

2. Асимптотика решений дифференциального уравнения (1) при больших значениях $\boldsymbol{\lambda}$. Введем замену $\lambda = s^4$, $s = \sqrt[4]{\lambda}$, причем для корректности дальнейших выкладок зафиксируем ту ветвь арифметического корня, для которой $\sqrt[4]{1} = +1$. Обозначим через w_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ различные корни четвертой степени из единицы:

$$\begin{gathered} w_k^4 = 1; \quad w_k = \exp\Big(\frac{2\pi i}{4}(k-1)\Big), \\ k = 1,2,3,4; \quad w_1 = 1, \quad w_2 = i, \quad w_3 = -1, \quad w_4 = -i. \end{gathered} \tag{4}$$

Для чисел w_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ из (4) справедливы соотношения

$$\sum_{k=1}^{4} w_k^p = 0,\ p = 1,2,3; \quad \sum_{k=1}^{4} w_k^p = 4,\ p = 0,\ p = 4. \tag{5}$$

Числа w_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ из (4), (5) делят единичную окружность на четыре равные части.

Методом вариации произвольных постоянных устанавливается следующее утверждение (см. [4, 5]).

Лемма 1. *Решение $y(x,s)$ дифференциального уравнения (1) является решением интегрального уравнения Вольтерры:*

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{4} C_k e^{w_k s x} - \frac{1}{4s^3} \sum_{k=1}^{4} w_k e^{w_k s x} \int_0^x q(t) e^{-w_k s t} y(t,s)\,dt, \tag{6}$$

где C_k — произвольные постоянные.

Проверить справедливость формулы (6) можно непосредственным образом с учетом свойства (5) а также принимая во внимание, что из свойства (3) суммируемости потенциала следует формула

$$\Big(\int_0^x q(t) e^{-w_k s t} y(t,s)\,dt\Big)'_x = q(x) e^{-w_k s x} y(x,s)$$

почти для всех x из отрезка $[0;\pi]$.

Интегральное уравнение (6) решим методом последовательных приближений Пикара (как это сделано в работах [4] и [5]): найдем $y(t,s)$ из (6), подставим это выражение в $\displaystyle\int_0^x q(t) e^{-w_k s t} y(t,s)\,dt$, произведем необходимые вычисления и оценки, аналогичные оценкам работ [4, 5], [16, гл. 2], [17, гл. 1]. В результате получим следующее утверждение.

Лемма 2. *Общее решение дифференциального уравнения (1) представляется в виде*

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{4} C_k y_k(x,s); \quad y^{(p)}(x,s) = \sum_{k=1}^{4} C_k y_k^{(p)}(x,s), \quad p = 1,2,3, \tag{7}$$

где C_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ — произвольные постоянные,

$$y_k(x,s) = e^{w_k s x} - \frac{A_{3k}(x,s)}{4s^3} + \frac{A_{6k}(x,s)}{16 s^6} + \underline{O}\Big(\frac{e^{|\mathrm{Im} s| x}}{s^9}\Big), \quad k = 1,2,3,4; \tag{8}$$

$$\frac{y_k^{(p)}(x,s)}{s^p} = w_k^p e^{w_k s x} - \frac{A_{3k}^p(x,s)}{4s^3} + \frac{A_{6k}^p(x,s)}{16 s^6} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|x}}{s^9}\right), \tag{9}$$
$$k = 1,2,3,4, \quad p = 1,2,3;$$

$$A_{3k}(x,s) = \sum_{n=1}^{4} w_n e^{w_n s x} \varphi_{kn}(x,s), \quad \varphi_{kn}(x,s) = \int_0^x q(x) e^{(w_k - w_n)st} dt, \tag{10}$$
$$k = 1,2,3,4;$$

$$A_{3k}^p(x,s) = \sum_{n=1}^{4} w_n w_n^p e^{w_n s x} \varphi_{kn}(x,s), \quad k = 1,2,3,4, \quad p = 1,2,3; \tag{11}$$

$$A_{6k}(x,s) = \sum_{n=1}^{4} w_n \left(\sum_{m=1}^{4} w_m e^{w_m s x} \int_0^x q(t) \psi_{nmkn}(x,s) \right),$$
$$\psi_{nmkn}(x,s) = \int_0^x q(t) e^{(w_n - w_m)st} d\xi \left(\int_0^t q(\xi) e^{(w_k - w_n)s\xi} d\xi \right) dt, \tag{12}$$
$$k = 1,2,3,4;$$

$$A_{6k}^p(x,s) = \sum_{n=1}^{4} w_n \left(\sum_{m=1}^{4} w_m w_m^p e^{w_m s x} \psi_{nmkn}(x,s) \right), \tag{13}$$
$$k = 1,2,3,4, \quad p = 1,2,3.$$

При выводе асимптотических формул (8)–(13) в момент промежуточного интегрирования мы требовали выполнения следующих начальных условий:

$$A_{3k}(0,s) = A_{6k}(0,s) = 0; \quad A_{3k}^p(0,s) = A_{6k}^p(0,s) = 0; \quad y_k(0,s) = 1;$$
$$y_k^{(p)}(0,s) = w_k^p s^p, \quad k = 1,2,3,4; \quad p = 1,2,3. \tag{14}$$

3. Изучение граничных условий (2). В силу формул (7)–(14) из первых двух граничных условий (2) находим:

$$\begin{cases} \dfrac{y'(0,s)}{s}\Big|_{s\neq 0} \overset{(2)}{=} 0 \overset{(7)}{\Leftrightarrow} \displaystyle\sum_{k=1}^{4} C_k \frac{y_k'(0,s)}{s} = 0 \overset{(14)}{\Leftrightarrow} \sum_{k=1}^{4} C_k w_k = 0; \\ \dfrac{y^{(3)}(0,s)}{s^3}\Big|_{s\neq 0} \overset{(2)}{=} 0 \overset{(7)}{\Leftrightarrow} \displaystyle\sum_{k=1}^{4} C_k \frac{y_k^{(3)}(0,s)}{s^3} = 0 \overset{(14)}{\Leftrightarrow} \sum_{k=1}^{4} C_k w_k^3 = 0, \end{cases}$$

откуда в силу соотношений (5) получаем: $C_3 = C_1$, $C_4 = C_2$. Поэтому при выполнении условий $y'(0) = y^{(3)}(0) = 0$ общее решение дифференциального уравнения (1) имеет следующий вид:

$$y(x,s) = C_1[y_1(x,s) + y_3(x,s)] + C_2[y_2(x,s) + y_4(x,s)],$$
$$y^{(p)}(x,s) = C_1[y_1^{(p)}(x,s) + y_3^{(p)}(x,s)] + C_2[y_2^{(p)}(x,s) + y_4^{(p)}(x,s)], \tag{15}$$
$$p = 1,2,3,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Подставляя формулы (15) в последние два из граничных условий (2), получаем:

$$\begin{cases} y(\pi,s) \overset{(2)}{=} \alpha_1 y\left(\frac{\pi}{3},s\right) + \alpha_2 y\left(\frac{2\pi}{3},s\right) \overset{(15)}{\Leftrightarrow} C_1[y_1(\pi,s)+y_3(\pi,s)]+ \\ \quad +C_2[y_2(\pi,s)+y_4(\pi,s)] = \alpha_1 C_1\left[y_1\left(\frac{\pi}{3},s\right)+y_3\left(\frac{\pi}{3},s\right)\right]+ \\ \quad\quad +\alpha_1 C_2\left[y_2(\frac{\pi}{3},s)+y_4(\frac{\pi}{3},s)\right]+ \\ \quad\quad\quad \alpha_2 C_1\left[y_1\left(\frac{2\pi}{3},s\right)+y_3\left(\frac{2\pi}{3},s\right)\right]+ \\ \quad\quad\quad\quad +\alpha_2 C_2\left[y_2\left(\frac{2\pi}{3},s\right)+y_4\left(\frac{2\pi}{3},s\right)\right], \\ \frac{y''(\pi,s)}{s^2} \overset{(2)}{=} \beta_1\frac{y''(\pi/3,s)}{s^2} + \beta_2\frac{y''(2\pi/3,s)}{s^2} \overset{(15)}{\Leftrightarrow} C_1\left[\frac{y_1''(\pi,s)}{s^2}+\frac{y_3''(\pi,s)}{s^2}\right]+ \\ \quad +C_2\left[\frac{y_2''(\pi,s)}{s^2}+\frac{y_4''(\pi,s)}{s^2}\right] = \beta_1 C_1\left[\frac{y_1''(\pi/3,s)}{s^2}+\frac{y_3''(\pi/3,s)}{s^2}\right]+ \\ \quad\quad +\beta_1 C_2\left[\frac{y_2''(\pi/3,s)}{s^2}+\frac{y_4''(\pi/3,s)}{s^2}\right]+ \\ \quad\quad\quad +\beta_2 C_1\left[\frac{y_1''(2\pi/3,s)}{s^2}+\frac{y_3''(2\pi/3,s)}{s^2}\right]+ \\ \quad\quad\quad\quad +\beta_2 C_2\left[\frac{y_2''(2\pi/3,s)}{s^2}+\frac{y_4''(2\pi/3,s)}{s^2}\right]. \end{cases} \tag{16}$$

Однородная система (16) (из двух уравнений с двумя неизвестными C_1, C_2) имеет ненулевые решения ($C_1^2 + C_2^2 \neq 0$) только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1), (2) *с условием* (3) *суммируемости потенциала* $q(x)$ *имеет следующий вид*:

$$f(s) = \begin{vmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{vmatrix} = 0, \tag{17}$$

$$h_{11}(s) = y_1(\pi,s)+y_3(\pi,s) - \alpha_1\left[y_1\left(\frac{\pi}{3},s\right)+y_3\left(\frac{\pi}{3},s\right)\right] - \\ - \alpha_2\left[y_1\left(\frac{2\pi}{3},s\right)+y_3\left(\frac{2\pi}{3},s\right)\right],$$

$$h_{12}(s) = y_2(\pi,s)+y_4(\pi,s) - \alpha_1\left[y_2\left(\frac{\pi}{3},s\right)+y_4\left(\frac{\pi}{3},s\right)\right] - \\ - \alpha_2\left[y_2\left(\frac{2\pi}{3},s\right)+y_4\left(\frac{2\pi}{3},s\right)\right],$$

$$h_{21}(s)=\frac{y_1''(\pi,s)}{s^2}+\frac{y_3''(\pi,s)}{s^2}-\beta_1\left[\frac{y_1''(\pi/3,s)}{s^2}+\frac{y_3''(\pi/3,s)}{s^2}\right]-\\ -\beta_2\left[\frac{y_1''(2\pi/3,s)}{s^2}+\frac{y_3''(2\pi/3,s)}{s^2}\right],$$

$$h_{22}(s)=\frac{y_2''(\pi,s)}{s^2}+\frac{y_4''(\pi,s)}{s^2}-\beta_1\left[\frac{y_2''(\pi/3,s)}{s^2}+\frac{y_4''(\pi/3,s)}{s^2}\right]-\\ -\beta_2\left[\frac{y_2''(2\pi/3,s)}{s^2}+\frac{y_4''(2\pi/3,s)}{s^2}\right].$$

Подставляя формулы (8)–(13) в уравнение (17), получившийся определитель разложим на сумму определителей по столбцам, в результате получим:

$$f(s)=f_0(s)-\frac{f_3(s)}{4s^3}+\frac{f_6(s)}{16s^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)=0, \tag{18}$$

$$f_0(s)=\begin{vmatrix} f_{011}(s) & f_{012}(s)\\ f_{021}(s) & f_{022}(s)\end{vmatrix}, \tag{19}$$

$$f_{011}(s)=e^{w_1s\pi}+e^{w_3s\pi}-\alpha_1\left[e^{w_1s\frac{\pi}{3}}+e^{w_3s\frac{\pi}{3}}\right]-\alpha_2\left[e^{w_1s\frac{2\pi}{3}}+e^{w_3s\frac{2\pi}{3}}\right],$$

$$f_{012}(s)=e^{w_2s\pi}+e^{w_4s\pi}-\alpha_1\left[e^{w_2s\frac{\pi}{3}}+e^{w_4s\frac{\pi}{3}}\right]-\alpha_2\left[e^{w_2s\frac{2\pi}{3}}+e^{w_4s\frac{2\pi}{3}}\right],$$

$$f_{021}(s)=w_1^2e^{w_1s\pi}+w_3^2e^{w_3s\pi}-\beta_1\left[w_1^2e^{w_1s\frac{\pi}{3}}+w_3^2e^{w_3s\frac{\pi}{3}}\right]-\\ -\beta_2\left[w_1^2e^{w_1s\frac{2\pi}{3}}+w_3^2e^{w_3s\frac{2\pi}{3}}\right],$$

$$f_{022}(s)=w_2^2e^{w_2s\pi}+w_4^2e^{w_4s\pi}-\beta_1\left[w_2^2e^{w_2s\frac{\pi}{3}}+w_4^2e^{w_4s\frac{\pi}{3}}\right]-\\ -\beta_2\left[w_2^2e^{w_2s\frac{2\pi}{3}}+w_4^2e^{w_4s\frac{2\pi}{3}}\right],$$

$$f_3(s)=f_{3,1}(s)+f_{3,2}(s),\quad w_1^2=w_3^2=1,\quad w_2^2=w_4^2=-1, \tag{20}$$

$$f_{3,1}(s)=\begin{vmatrix} f_{3,1,11}(s) & f_{3,1,12}(s)\\ f_{3,1,21}(s) & f_{3,1,22}(s)\end{vmatrix}, \tag{21}$$

$$f_{3,1,11}(s)=A_{31}(\pi,s)+A_{33}(\pi,s)-\alpha_1\left[A_{31}\left(\frac{\pi}{3},s\right)+A_{33}\left(\frac{\pi}{3},s\right)\right]-\\ -\alpha_2\left[A_{31}\left(\frac{2\pi}{3},s\right)+A_{33}\left(\frac{2\pi}{3},s\right)\right],$$

$$f_{3,1,12}(s)=e^{w_2s\pi}+e^{w_4s\pi}-\alpha_1\left[e^{w_2s\frac{\pi}{3}}+e^{w_4s\frac{\pi}{3}}\right]-\alpha_2\left[e^{w_2s\frac{2\pi}{3}}+e^{w_4s\frac{2\pi}{3}}\right],$$

$$f_{3,1,21}(s) = A_{31}^2(\pi, s) + A_{33}^2(\pi, s) - \beta_1 \left[A_{31}^2\left(\frac{\pi}{3}, s\right) + A_{33}^2\left(\frac{\pi}{3}, s\right)\right] - \\ - \beta_2 \left[A_{31}^2\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) + A_{33}^2\left(\frac{2\pi}{3}, s\right)\right],$$

$$f_{3,1,22}(s) = -e^{w_2 s\pi} - e^{w_4 s\pi} + \beta_1\left[e^{w_2 s\frac{\pi}{3}} + e^{w_4 s\frac{\pi}{3}}\right] + \beta_2\left[e^{w_2 s\frac{2\pi}{3}} + e^{w_4 s\frac{2\pi}{3}}\right],$$

$$f_{3,2}(s) = \begin{vmatrix} f_{3,2,11}(s) & f_{3,2,12}(s) \\ f_{3,2,21}(s) & f_{3,2,22}(s) \end{vmatrix}, \tag{22}$$

$$f_{3,2,11}(s) = e^{w_1 s\pi} + e^{w_3 s\pi} - \alpha_1\left[e^{w_1 s\frac{\pi}{3}} + e^{w_3 s\frac{\pi}{3}}\right] - \alpha_2\left[e^{w_1 s\frac{2\pi}{3}} + e^{w_3 s\frac{2\pi}{3}}\right],$$

$$f_{3,2,12}(s) = A_{32}(\pi, s) + A_{34}(\pi, s) - \alpha_1 \left[A_{32}\left(\frac{\pi}{3}, s\right) + A_{34}\left(\frac{\pi}{3}, s\right)\right] - \\ - \alpha_2 \left[A_{32}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) + A_{34}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right)\right],$$

$$f_{3,2,21}(s) = e^{w_1 s\pi} + e^{w_3 s\pi} - \beta_1\left[e^{w_1 s\frac{\pi}{3}} + e^{w_3 s\frac{\pi}{3}}\right] - \beta_2\left[e^{w_1 s\frac{2\pi}{3}} + e^{w_3 s\frac{2\pi}{3}}\right],$$

$$f_{3,2,22}(s) = A_{32}^2(\pi, s) + A_{34}^2(\pi, s) - \beta_1 \left[A_{32}^2\left(\frac{\pi}{3}, s\right) + A_{34}^2\left(\frac{\pi}{3}, s\right)\right] - \\ - \beta_2 \left[A_{32}^2\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) + A_{34}^2\left(\frac{2\pi}{3}, s\right)\right],$$

функцию $f_6(s)$ можно вычислить аналогичным образом.

Основное приближение уравнения (18)–(22) представляется в виде $f_0(s)=0$ и от корней этого уравнения зависит поведение корней уравнения (18)–(22). Для нахождения корней уравнения $f_0(s) = 0$ необходимо изучить *индикаторную диаграмму* этого уравнения (см. [18, гл. 12]).

Введем обозначение $e^{\frac{\pi}{3}s} = z \neq 0$, тогда основное приближение уравнения (18)–(22) примет следующий вид:

$$f_0(s) = \begin{vmatrix} m_{11}(s) & m_{12}(s) \\ m_{21}(s) & m_{22}(s) \end{vmatrix} = 0, \tag{23}$$

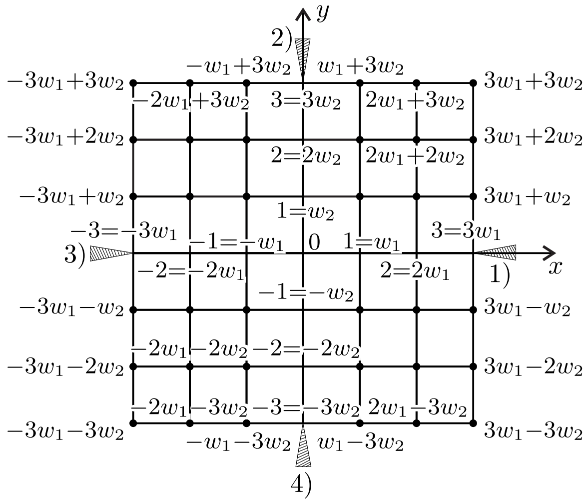
$$m_{11}(s) = z^{3w_1} - \alpha_2 z^{2w_1} - \alpha_1 z^{w_1} - \alpha_1 z^{-w_1} - \alpha_2 z^{-2w_1} + z^{-3w_1},$$
$$m_{12}(s) = z^{3w_2} - \alpha_2 z^{2w_2} - \alpha_1 z^{w_2} - \alpha_1 z^{-w_2} - \alpha_2 z^{-2w_2} + z^{-3w_2},$$
$$m_{21}(s) = z^{3w_1} - \beta_2 z^{2w_1} - \beta_1 z^{w_1} - \beta_1 z^{-w_1} - \beta_2 z^{-2w_1} + z^{-3w_1},$$
$$m_{22}(s) = -z^{3w_2} + \beta_2 z^{2w_2} + \beta_1 z^{w_2} + \beta_1 z^{-w_2} + \beta_2 z^{-2w_2} - z^{-3w_2}.$$

Раскладывая определитель $f_0(s)$ из (23) по столбцам на сумму определителей, получаем:

$$f_0(s) = (-2)z^{3w_1+3w_2} + \big(\alpha_2 + \beta_2\big)z^{3w_1+2w_2} + \big(\alpha_1 + \beta_1\big)z^{3w_1+w_2} + \\ + \big(\alpha_1 + \beta_1\big)z^{3w_1-w_2} + \big(\alpha_2 + \beta_2\big)z^{3w_1-2w_2} + \big(-2\big)z^{3w_1-3w_2} +$$

$$+\left(\alpha_2+\beta_2\right)z^{2w_1+3w_2}-2\alpha_2\beta_2 z^{2w_1+2w_2}+\dots+\left(\alpha_2+\beta_2\right)z^{2w_1-3w_2}+$$
$$+\left(\alpha_1+\beta_1\right)z^{w_1+3w_2}-\left(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\right)z^{w_1+2w_2}+\dots+$$
$$+\left(\alpha_1+\beta_1\right)z^{w_1-3w_2}+\dots+\left(-2\right)z^{-3w_1+3w_2}+\left(\alpha_2+\beta_2\right)z^{-3w_1+2w_2}+$$
$$+\left(\alpha_1+\beta_1\right)z^{-3w_2+w_2}+\left(\alpha_1+\beta_1\right)z^{-3w_1-w_2}+$$
$$+\left(\alpha_2+\beta_2\right)z^{-3w_1-2w_2}+\left(-2\right)z^{-3w_1-3w_2}=0. \quad (24)$$

Индикаторная диаграмма уравнения (23), (24) — это выпуклая оболочка показателей экспонент, входящих в это уравнение. Учитывая формулы (4), видим, что индикаторная диаграмма уравнения (23), (24) имеет следующий вид:



. (25)

Индикаторная диаграмма представляет собой квадрат с вершинами в точках

$$3w_1+3w_2, \quad -3w_1+3w_2, \quad -3w_1-3w_2 \quad \text{и} \quad 3w_1-3w_2.$$

На стороне $\left[3w_1-3w_2; 3w_1+3w_2\right]$ находятся точки (показатели экспонент) $3w_1-2w_2$, $3w_1-w_2$, $3w_1+w_2$, $3w_1+2w_2$, которые вместе с точкой $3w_1$ (не является показателем экспонент, входящих в (23), (24)) делят этот отрезок на шесть равных частей. Аналогичная ситуация с другими сторонами квадрата. Если бы точки (показатели экспонент) делили отрезки на несоизмеримые части, то корни уравнения (23), (24) и асимптотику корней уравнения (18)–(22) выписать было бы нельзя (см. [19, 20]).

Корни уравнения (23), (24) (а также корни уравнения (18)–(22)) находятся в четырех секторах бесконечно малого раствора, заштрихованных на рисунке (25), биссектрисы которых являются срединными перпендикулярами к сторонам квадрата. Точки, находящиеся на сторонах квадрата ($3w_1-2w_2=3-2i$, $3w_1-w_2=3-i$, $3w_1+w_2=3+i, \dots$), также будут оказывать влияние на поведение корней уравнений (23), (24) и (18)–(22). Точки, попадающие внутрь индикаторной диаграммы (25) ($2w_1-2w_2$, $2w_1-w_2$, $2w_1+w_2$, $2w_1+2w_2$, $w_1+2w_2, \dots$), на асимптотику корней уравнений (23), (24) и (18)–(22) влиять не будут.

4. Асимптотика собственных значений в секторе 1) индикаторной диаграммы (25)**.** Изучим сектор 1) индикаторной диаграммы (25). Из общей теории (см. [18, гл. 12], [19, 20]) следует, что в секторе 1) на асимптотику корней уравнений (23), (24) и (18)–(22) влияют только точки, находящиеся на отрезке $[3w_1 - 3w_2; 3w_1 + 3w_2]$, т. е. точки $3w_1 - 3w_2$, $3w_1 - 2w_2$, $3w_1 - w_2$, $3w_1 + w_2$, $3w_1 + 2w_2$ и $3w_1 + 3w_2$.

Лемма 4. *Основное приближение уравнения на собственные значения дифференциального оператора (1)–(3) в секторе 1) индикаторной диаграммы (25) имеет следующий вид*:

$$f_{0,1}(s) = (-2)z^{3w_1+3w_2} + (\alpha_2+\beta_2)z^{3w_1+2w_2} + (\alpha_1+\beta_1)z^{3w_1+w_2} + \\ + (\alpha_1+\beta_1)z^{3w_1-w_2} + (\alpha_2+\beta_2)z^{3w_1-2w_2} + (-2)z^{3w_1-3w_2} = 0. \quad (26)$$

В уравнении (26), поделив на $(-1)z^{3w_1} \neq 0$, сделаем замену $z^{w_2} = x \neq 0$. В итоге получим уравнение шестой степени:

$$g_1(x) = 2x^6 - (\alpha_2+\beta_2)x^5 - (\alpha_1+\beta_1)x^4 - (\alpha_1+\beta_1)x^2 - (\alpha_2+\beta_2)x + 2 = 0,$$

которое в силу граничных условий (2) ($\alpha_1 + \beta_1 = -10/3$, $\alpha_2 + \beta_2 = 16/3$) принимает следующий вид:

$$g_1(x) = 2x^6 - \frac{16}{3}x^5 + \frac{10}{3}x^4 + \frac{10}{x}x^2 - \frac{16}{3}x + 2 = 0. \quad (27)$$

Уравнение (27) легко раскладывается на множители:

$$g_1(x) = \frac{2}{3}(x-1)^4(3x^2+4x+3) = 0$$

и имеет следующие корни:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1 \quad \text{(кратность равна четырем)}; \\ x_5 = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}i = e^{i\varphi}, \ x_6 = \bar{x}_5 = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}i = e^{-i\varphi}, \\ \varphi = \arccos\Big(-\frac{2}{3}\Big) = \pi - \arcsin\Big(\frac{\sqrt{5}}{3}\Big). \quad (28)$$

Формула (28) задает корни основного приближения уравнения (18)–(22) в секторе 1) индикаторной диаграммы (25) (т. е. корни уравнений (26) и (27)). Из общей теории (см. [18, гл. 12]) нахождения корней квазиполиномов вида (18)–(22) следует, что в секторе 1) надо оставить только те экспоненты, которые соответствуют правому вертикальному отрезку индикаторной диаграммы (25). Поэтому для сектора 1) уравнение (17) принимает следующий вид:

$$f_1(s) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

$$b_{11} = z^{3w_1} - \frac{A_{31}(\pi, s)}{4s^3} + \underline{O}\Big(\frac{1}{s^6}\Big) + \bar{\bar{o}}(1),$$

$$z = e^{\frac{\pi}{3}s} \neq 0,$$

$$b_{21}=w_1^2z^{3w_1}-\frac{A_{31}^2(\pi,s)}{4s^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^6}\Big)+\bar{\bar{o}}(1),$$
$$w_1=1,\quad w_1^2=1,$$
$$b_{12}=\left[z^{3w_2}-\frac{A_{32}(\pi,s)}{4s^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^6}\Big)\right]-\alpha_2\left[z^{2w_2}-\frac{A_{32}(2\pi/3,s)}{4s^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^6}\Big)\right]-$$
$$-\alpha_1\left[z^{w_2}-\frac{A_{32}(\pi/3,s)}{4s^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^6}\Big)\right]-\alpha_1\left[z^{-w_2}-\frac{A_{34}(\pi/3,s)}{4s^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^6}\Big)\right]-$$
$$-\alpha_2\left[z^{-2w_2}-\frac{A_{34}(2\pi/3,s)}{4s^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^6}\Big)\right]+\left[z^{-3w_2}-\frac{A_{34}(\pi,s)}{4s^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^6}\Big)\right],$$
$$w_2=i,\quad w_4=-w_2=-i, \tag{29}$$

$$b_{22}=\left[w_2^2z^{3w_2}-\frac{A_{32}^2(\pi,s)}{4s^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^6}\Big)\right]-\beta_2\left[w_2^2z^{2w_2}-\frac{A_{32}^2(2\pi/3,s)}{4s^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^6}\Big)\right]-$$
$$-\beta_1\left[w_2^2z^{w_2}-\frac{A_{32}^2(\pi/3,s)}{4s^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^6}\Big)\right]-\beta_1\left[w_4^2z^{-w_2}-\frac{A_{34}^2(\pi/3,s)}{4s^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^6}\Big)\right]-$$
$$-\beta_2\left[w_4^2z^{-2w_2}-\frac{A_{34}^2(2\pi/3,s)}{4s^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^6}\Big)\right]+\left[w_4^2z^{-3w_2}-\frac{A_{34}^2(2\pi/3,s)}{4s^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^6}\Big)\right],$$
$$w_2^2=w_4^2=-1.$$

Изучая определитель $f_1(s)$ из (29), сделаем необходимые преобразования и убедимся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 5. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(3) *в секторе* 1) *индикаторной диаграммы* (25) *имеет следующий вид*:

$$f_1(s)=f_{0,1}(s)-\frac{f_{3,1}(s)}{4s^3}+\frac{f_{6,1}(s)}{16s^6}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)=0, \tag{30}$$
$$f_{0,1}(s)=\begin{vmatrix} z^{3w_1} & z^{3w_2}-\alpha_2z^{2w_2}-\alpha_1z^{w_2}-\alpha_1z^{-w_2}-\alpha_2z^{-2w_2}+z^{-3w_2} \\ z^{3w_1} & -z^{3w_2}+\beta_2z^{2w_2}+\beta_1z^{w_2}+\beta_1z^{-w_2}+\beta_2z^{-2w_2}-z^{-3w_2}\end{vmatrix}, \tag{31}$$
$$f_{3,1}=f_{3,1,1}(s)+f_{3,1,2}(s), \tag{32}$$
$$f_{3,1,1}(s)=\begin{vmatrix} A_{31}(\pi,s) & z^{3w_2}-\alpha_2z^{2w_2}-\alpha_1z^{w_2}-\alpha_1z^{-w_2}-\alpha_2z^{-2w_2}+z^{-3w_2} \\ A_{31}^2(\pi,s) & -z^{3w_2}+\beta_2z^{2w_2}+\beta_1z^{w_2}+\beta_1z^{-w_2}+\beta_2z^{-2w_2}-z^{-3w_2}\end{vmatrix}, \tag{33}$$
$$f_{3,1,2}(s)=\begin{vmatrix} z^{3w_1} & \begin{matrix} A_{32}(\pi,s)-\alpha_2A_{32}\big(\frac{2\pi}{3},s\big)-\alpha_1A_{32}\big(\frac{\pi}{3},s\big)-\alpha_1A_{34}\big(\frac{\pi}{3},s\big)- \\ -\alpha_2A_{34}\big(\frac{2\pi}{3},s\big)+A_{34}(\pi,s)\end{matrix} \\ z^{3w_1} & \begin{matrix} A_{32}^2(\pi,s)-\beta_2A_{32}^2\big(\frac{2\pi}{3},s\big)-\beta_1A_{32}^2\big(\frac{\pi}{3},s\big)-\beta_1A_{34}^2\big(\frac{\pi}{3},s\big)- \\ -\beta_2A_{34}^2\big(\frac{2\pi}{3},s\big)+A_{34}^2(\pi,s)\end{matrix}\end{vmatrix}. \tag{34}$$

Действительно, раскладывая определитель $f_1(s)$ из (30) по столбцам на сумму определителей и упорядочивая величины по росту s, получаем (30)–(34), величины $A_{31}(\pi,s)$, $A_{31}^2(\pi,s)$, $A_{32}(\pi,s),\ldots,A_{34}^2(\pi,s)$ определены формулами (12), (13).

Основное приближение уравнения (30)–(34) имеет вид $f_{0,1}(s) = 0$, где $f_{0,1}(s)$ определено формулой (31), и это уравнение преобразуется к виду

$$f_{0,1}(s) = z^{3w_1}\Big[(-2)z^{3w_2} + \big(\alpha_2+\beta_2\big)z^{2w_2} + \big(\alpha_1+\beta_1\big)z^{w_2} + \big(\alpha_1+\beta_1\big)z^{-w_2} + \\ + \big(\alpha_2+\beta_2\big)z^{-2w_2} + (-2)z^{-3w_2}\Big] = 0, \quad z^{3w_1} \neq 0.$$

Это уравнение при выполнении условия (2) принимает следующий вид:

$$3z^{3w_2} - 8z^{2w_2} + 5z^{w_2} + 5z^{-w_2} - 8z^{-2w_2} + 3z^{-3w_2} = 0,$$
$$3x^6 - 8x^5 + 5x^4 + 5x^2 - 8x + 3 = 0, \quad x = z^{w_2} = e^{a\frac{\pi}{3}w_2 s} \neq 0,$$

т. е. совпадает с уравнением $g_1(x) = 0$ из (27), которое имеет корни, описываемые формулой (28).

Изучим сначала наиболее интересный случай:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1 \quad (\text{кратность } 4) \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{3}w_2 s} = 1 = e^{2\pi i k}, \\ k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow s_{k,1,\text{осн}} = \frac{6ki}{w_2} \overset{(4)}{=} 6k \ (\text{кратность } 4),\ k \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

В формуле (35) у серии корней $s_{k,1,\text{осн}}$ индекс 1 показывает, что мы рассматриваем сектор 1) индикаторной диаграммы (25), «осн» означает «основное приближение». Из общей теории нахождения корней квазиполиномов вида (30)–(34) в случае условия (28) (см. [18, гл. 12], [11, 13, 20]) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(3) *в секторе* 1) *индикаторной диаграммы* (25) *имеет вид*

$$s_{k,1,p} = 6k + \frac{d_{1kp}}{k^{3/4}} + \frac{d_{2kp}}{k^{6/4}} + \frac{d_{3kp}}{k^{9/4}} + \frac{d_{4kp}}{k^{12/4}} + \underline{O}\Big(\frac{1}{k^{15/4}}\Big), \quad p = 1,2,3,4. \tag{36}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 необходимо показать, что коэффициенты d_{1kp}, d_{2kp}, d_{3kp}, ... $(p = 1,2,3,4)$ формулы (36) находятся в явном виде единственным образом.

Применяя формулы Маклорена, имеем

$$z^{\pm w_2}\big|_{s_{k,1,p}} = e^{\pm s\frac{\pi}{3}w_2}\big|_{s_{k,1,p}} = 1 \pm \frac{\pi}{3}iM_{kp} - \frac{\pi^2}{9}M_{kp}^2 \mp \frac{\pi^3 i}{27}M_{kp}^3 + \\ + \frac{\pi^4}{81}M_{kp}^4 \pm \frac{\pi^5 i}{243}M_{kp}^5 - \ldots,$$

$$M_{kp} = \frac{d_{1kp}}{k^{3/4}} + \frac{d_{2kp}}{k^{6/4}} + \frac{d_{3kp}}{k^{9/4}} + \frac{d_{4kp}}{k^{12/4}} + \underline{O}\Big(\frac{1}{k^{15/4}}\Big), \tag{37}$$

$$z^{\pm 2w_2}\big|_{s_{k,1,p}} = 1 \pm \frac{2\pi}{3}iM_{kp} - \frac{4\pi^2}{9}M_{kp}^2 \mp \frac{8\pi^3}{27}iM_{kp}^3 +$$

$$+\frac{16\pi^4}{81}M_{kp}^4 \pm \frac{32\pi^5}{243}iM_{kp}^3 - \ldots, \quad (38)$$

$$z^{\pm 3w_2}\Big|_{s_{k,1,p}} = 1 \pm \pi i M_{kp} - \pi^2 M_{kp}^2 \mp \pi^3 i M_{kp}^3 + \pi^4 M_{kp}^4 \pm \pi^5 i M_{kp}^5 - \ldots, \quad (39)$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{s^3}\Big|_{s_{k,1,p}} = \frac{1}{6^3k^3}\left(1 - \frac{3d_{1kp}}{6k^{7/4}} + \underline{O}\Big(\frac{1}{k^{10/4}}\Big)\right), \\ \frac{1}{s_{k,1,p}^6} = \frac{1}{6^6k^6}\left(1 - \frac{6d_{1kp}}{6k^{7/4}} + \underline{O}\Big(\frac{1}{k^{10/4}}\Big)\right).\end{gathered} \quad (40)$$

Подставляя формулы (37)–(40) и (36) в уравнение (30)–(34), видим, что коэффициенты при M_{kp}^0, M_{kp}^1, M_{kp}^2, M_{kp}^3 равны нулю в силу уравнения (27), коэффициент при M_{kp}^4 равен $-\frac{160\pi^4}{81}$. В итоге мы получаем

$$\begin{gathered}-\frac{160\pi^4}{81}M_{kp}^4 + 0\cdot M_{kp}^5 + \gamma_6 M_{kp}^6 + \cdots - \\ -\frac{1}{24k^3}\left(1 - \frac{3d_{1kp}}{6k^{7/4}} + \underline{O}\Big(\frac{1}{k^{10/4}}\Big)\right)G_3(s)\Big|_{s_{k,1,k,p}} + \underline{O}\Big(\frac{1}{k^6}\Big) = 0, \quad \gamma_6 \neq 0, \quad (41)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}G_3(s) = \int_0^\pi q(t)dt_{a11}\Big[-2\cdot z^{3w_2} + \big(\alpha_2+\beta_2\big)z^{2w_2} + \big(\alpha_1+\beta_1\big)z^{w_2} + \\ + \big(\alpha_1+\beta_1\big)z^{-w_2} + \big(\alpha_2+\beta_2\big)z^{-2w_2} - 2\cdot z^{-3w_2}\Big] + G_2(s), \quad (42)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}G_2(s) = (-2)w_2z^{3w_2}\varphi_{22}(\pi,s) - 2w_4z^{-3w_2}\varphi_{24}(\pi,s) + \\ + \big(\alpha_2+\beta_2\big)w_2z^{2w_2}\varphi_{22}\Big(\frac{2\pi}{3},s\Big) + \big(\alpha_2+\beta_2\big)w_4z^{-2w_2}\varphi_{24}\Big(\frac{2\pi}{3},s\Big) + \\ + \big(\alpha_1+\beta_1\big)w_2z^{w_2}\varphi_{22}\Big(\frac{\pi}{3},s\Big) + \big(\alpha_1+\beta_1\big)w_4z^{-w_2}\varphi_{24}\Big(\frac{\pi}{3},s\Big) + \\ + \big(\alpha_1+\beta_1\big)w_2z^{w_2}\varphi_{42}\Big(\frac{\pi}{3},s\Big) + \big(\alpha_1+\beta_1\big)w_4z^{-w_2}\varphi_{44}\Big(\frac{\pi}{3},s\Big) + \\ + \big(\alpha_2+\beta_2\big)w_2z^{2w_2}\varphi_{42}\Big(\frac{2\pi}{3},s\Big) + \big(\alpha_2+\beta_2\big)w_4z^{-2w_2}\varphi_{44}\Big(\frac{2\pi}{3},s\Big) - \\ - 2w_2z^{3w_2}\varphi_{42}(\pi,s) - 2w_4z^{-3w_2}\varphi_{44}(\pi,s), \quad (43)\end{gathered}$$

где

$$w_2 \overset{(4)}{=} i, \quad w_4 \overset{(4)}{=} -i; \quad \alpha_1+\beta_1 \overset{(2)}{=} -\frac{10}{3}, \quad \alpha_2+\beta_2 \overset{(2)}{=} \frac{16}{3},$$

а функции $\varphi_{kn}(x,s)$ определены формулой (10).

Подставляя формулы (37)–(39) в формулу (43), имеем

$$\begin{gathered}G_2(s)\Big|_{s_{k,1,p}} = (-2)w_2\Big[1 + \pi i M_{kp} - \pi^2 M_{kp}^2 + \underline{O}(M_{kp}^3)\Big]\varphi_{22}(\pi, s_{s_{k,1,p}}) + \\ + 2w_2\Big[1 - \pi i M_{kp} - \pi^2 M_{kp}^2 + \underline{O}(M_{kp}^3)\Big]\varphi_{44}(\pi, s_{s_{k,1,p}}) +\end{gathered}$$

$$+\big(\alpha_2+\beta_2\big)w_2\Big[1+\frac{2\pi}{3}iM_{kp}-\frac{4\pi^2}{9}M_{kp}^2+\underline{O}(M_{kp}^3)\Big]\varphi_{22}\Big(\frac{2\pi}{3},s_{s_{k,1,p}}\Big)-$$
$$-\big(\alpha_2+\beta_2\big)w_2\Big[1-\frac{2\pi}{3}iM_{kp}-\frac{4\pi^2}{9}M_{kp}^2+\underline{O}(M_{kp}^3)\Big]\varphi_{44}\Big(\frac{2\pi}{3},s_{s_{k,1,p}}\Big)+$$
$$+\dots+H_2(s)\big|_{s_{k,1,p}},\quad p=1,2,3,4,\tag{44}$$

$$H_2(s)\big|_{s_{k,1,p}}=2w_2\Big[z^{-3w_2}\varphi_{24}\big(\pi,s_{s_{k,1,p}}\big)-z^{3w_2}\varphi_{42}\big(\pi,s_{s_{k,1,p}}\big)\Big]-$$
$$-\big(\alpha_2+\beta_2\big)w_2\Big[z^{-w_2}\varphi_{24}\Big(\frac{2\pi}{3},s_{s_{k,1,p}}\Big)-z^{2w_2}\varphi_{42}\Big(\frac{2\pi}{3},s_{s_{k,1,p}}\Big)\Big]+$$
$$+\big(\alpha_1+\beta_1\big)w_2\Big[z^{-w_2}\varphi_{24}\Big(\frac{\pi}{3},s_{s_{k,1,p}}\Big)-z^{w_2}\varphi_{42}\Big(\frac{2\pi}{3},s_{s_{k,1,p}}\Big)\Big].\tag{45}$$

Проведя в формуле (44) необходимые вычисления и преобразования и учитывая, что

$$\varphi_{22}(\pi,s)\overset{(10)}{=}\varphi_{42}(\pi,s)\overset{(10)}{=}\int_0^\pi q(t)dt,$$

получим

$$G_2(s)\big|_{s_{k,1,p}}=\frac{8}{9}w_2\pi i\int_0^\pi q(t)dt\Big[\frac{d_{1kp}}{k^{3/4}}+\frac{d_{2kp}}{k^{6/4}}+\underline{O}\Big(\frac{1}{k^{9/4}}\Big)+H_2(s)\Big]\Big|_{s_{k,1,p}}.\tag{46}$$

Учитывая, что $z=e^{\frac{\pi}{3}s}$, $w_2=i$, $w_4=-i$, и подставляя $s_{k,1,p}$ из (36) в формулу (45), имеем

$$\big[z^{-3w_2}\varphi_{24}(\pi,s)-z^{3w_2}\varphi_{42}(\pi,s)\big]\big|_{s_{k,1,p}}\overset{(10)}{=}$$
$$=\exp\Big[\frac{\pi i}{3}(-3)\big(6k+M_{kp}\big)\Big]\int_0^\pi q(t)\exp\Big[\big(w_2-w_4\big)\big(6k+M_{kp}t\big)\Big]dt-$$
$$-\exp\Big[\frac{\pi i}{3}3\big(6k+M_{kp}\big)\Big]\int_0^\pi q(t)\exp\Big[-\big(w_2-w_4\big)\big(6k+M_{kp}\big)t\Big]dt=$$
$$=2i\int_0^\pi q(t)\sin\big[12kt+(2t-\pi)M_{kp}\big]dt.\tag{47}$$

Аналогичным образом выводятся формулы

$$\Big[z^{-2w_2}\varphi_{24}\Big(\frac{2\pi}{3},s\Big)-z^{2w_2}\varphi_{42}\Big(\frac{2\pi}{3},s\Big)\Big]\Big|_{s_{k,1,p}}=$$
$$=2i\int_0^{2\pi/3} q(t)\sin\Big[12kt+\Big(2t-\frac{2\pi}{3}\Big)M_{kp}\Big]\,dt;\tag{48}$$

$$\Big[z^{-w_2}\varphi_{24}\Big(\frac{\pi}{3},s\Big)-z^{w_2}\varphi_{42}\Big(\frac{\pi}{3},s\Big)\Big]\Big|_{s_{k,1,p}}=$$
$$=2i\int_0^{\pi/3} q(t)\sin\Big[12kt+\Big(2t-\frac{\pi}{3}\Big)M_{kp}\Big]\,dt.\tag{49}$$

Подставляя формулы (47)–(49) в (45), получаем

$$H_2(s)\big|_{s_{k,1,p}} = (-4)\int_0^{\pi} q(t)\sin\big[12kt+(2t-\pi)M_{kp}\big]dt+ \\ +\frac{32}{3}\int_0^{2\pi/3} q(t)\sin\left[12kt+\left(2t-\frac{2\pi}{3}\right)M_{kp}\right]dt+ \\ +\frac{20}{3}\int_0^{\pi/3} q(t)\sin\left[12kt+\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)M_{kp}\right]dt. \quad (50)$$

Подставляя формулы (46), (50) в (41), (42), находим

$$\frac{d_{1kp}^4}{k^{12/4}}+\frac{4d_{1kp}^3 d_{2kp}}{k^{15/4}}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{18/4}}\right)= \\ =\frac{3^4}{15\cdot 2^8}\frac{1}{k^{12/4}}\left\{\pi i w_2\frac{d_{1kp}}{k^{3/4}}\left[(-4)\int_0^{\pi} q(t)dt+\frac{32}{3}\int_0^{2\pi/3} q(t)dt+\right.\right. \\ \left.+\frac{20}{3}\int_0^{\pi/3} q(t)dt\right]+\left[\frac{20}{3}v_1\left(\frac{\pi}{3},k\right)+\frac{32}{3}v_1\left(\frac{2\pi}{3},k\right)-4v_1(\pi,k)\right]+ \\ \left.+\frac{d_{1kp}}{k^{3/4}}\left[\frac{20}{3}v_2\left(\frac{\pi}{3},k\right)+\frac{32}{3}v_3\left(\frac{2\pi}{3},k\right)-4v_4(\pi,k)\right]+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{6/4}}\right)\right\}, \quad (51)$$

где введены следующие обозначения:

$$v_1(b,k)=\int_0^b q(t)\sin(12kt)dt;$$

$$v_2(b,k)=\int_0^b q(t)\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)\cos(12kt)dt;$$

$$v_3(b,k)=\int_0^b q(t)\left(2t-\frac{2\pi}{3}\right)\cos(12kt)dt;$$

$$v_4(b,k)=\int_0^b q(t)\left(2t-\frac{3\pi}{3}\right)\cos(12kt)dt.$$

Приравнивая в формуле (51) коэффициенты при $k^{-12/4}$, получим

$$d_{1kp}=\frac{3w_p}{2\sqrt[4]{15}}\sqrt[4]{F_k(q)},\quad k\in\mathbb{N},\quad p=1,2,3,4,\quad w_p=e^{\frac{2\pi i}{4}(p-1)}, \quad (52)$$

$$F_k(q)=\frac{20}{3}\int_0^{\pi/3} q(t)\sin(12kt)dt+ \\ +\frac{32}{3}\int_0^{2\pi/3} q(t)\sin(12kt)dt-4\int_0^{\pi} q(t)\sin(12kt)dt.$$

Таким образом, мы видим, что кратные в главном приближении корни $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ (кратности 4) (и $s_{k,1,\text{осн}}\overset{(35)}{=}6k$ кратности 4) «расщепляются» на четыре серии однократных собственных значений вида (36), (52).

Приравнивая в формуле (51) коэффициенты при $k^{-15/4}$ и проводя необходимые преобразования и упрощения, выводим

$$d_{2kp} = -\frac{27}{20\cdot 2^8}\frac{1}{d_{1kp}^2}\left\{\left[\frac{20}{3}\int_0^{\pi/3} q(t)dt + \frac{32}{3}\int_0^{2\pi/3} q(t)dt - 4\int_0^{\pi} q(t)dt\right]+ \right.$$
$$+\left[\frac{40}{3}v_5\Big(\frac{\pi}{3},k\Big) + \frac{64}{3}v_5\Big(\frac{2\pi}{3},k\Big) - 8v_5(\pi,k)\right] -$$
$$\left. -\frac{\pi}{3}\left[\frac{20}{3}v_6\Big(\frac{\pi}{3},k\Big) + \frac{64}{3}v_6\Big(\frac{2\pi}{3},k\Big) - 12v_6(\pi,k)\right]\right\},$$
$$k\in\mathbb{N},\quad p=1,2,3,4, \quad (53)$$

где

$$v_5(b,k) = \int_0^b tq(t)\cos(12kt)dt, \quad v_6(b,k) = \int_0^b q(t)\cos(12kt)dt,$$

а величины d_{1kp} определены формулой (52).

Получение формул (52), (53) завершает доказательство теоремы 1. □

Нахождение асимптотики собственных значений, соответствующих корням $x_{5,6} = e^{\pm i\varphi}$ формулы (28) (кратности 1), происходит согласно методике, продемонстрированной автором в работах [4, 21, 22]. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(3) (*в секторе* 1) *индикаторной диаграммы* (25), *соответствующих однократным корням* $x_{5,6} = e^{\pm i\varphi}$ *уравнения* (28), *имеет следующий вид*:

$$s_{k,1,m} = 6\tilde{k} + \frac{d_{3km}}{\tilde{k}^3} + \frac{d_{6km}}{\tilde{k}^6} + \underline{O}\Big(\frac{1}{\tilde{k}^9}\Big), \quad \tilde{k} = k \pm \frac{\varphi}{2\pi}, \quad m=5,6. \quad (54)$$

Доказательство. Действительно, уравнение на собственные значения оператора (1)–(3) в секторе 1) имеет вид (30)–(34), основное приближение которого (уравнение (27)) имеет корни, заданные формулой (28): $x_1 = x_2 = = x_3 = x_4 = 1$ (кратность 4, случай уже разобран в (36), (52), (53)) и $x_5 = e^{i\varphi}$, $x_6 = e^{-i\varphi}$, $\varphi = \arccos(-\frac{2}{3}) = \pi - \arcsin(\frac{\sqrt{5}}{3}) \in (\frac{\pi}{2};\pi)$, кратность равна 1, $x \overset{(26)}{=} z^{w_2} = e^{\frac{\pi}{3}is} \neq 0$.

Поэтому

$$x_{5,6} = e^{\pm i\varphi} \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{3}w_2 s} = e^{\pm i\varphi}e^{2\pi i k}, \quad k\in\mathbb{N},$$

$$w_2 = i \Leftrightarrow s_{k,1,m} = 6k \pm \frac{3\varphi}{\pi} = 6\tilde{k}, \quad \tilde{k} = k\pm\frac{\varphi}{2\pi}, \quad k\in\mathbb{N}, \quad m=5,6.$$

Значит, из общей теории нахождения корней квазимногочленов вида (30)–(34) (см. [11, 13, 20]) следует, что асимптотику собственных значений необходимо искать в виде (54). Для нахождения коэффициентов d_{3km} $(m = 5,6)$ в явном виде действуем аналогично выкладкам (37)–(53). Используя формулы Тейлора, имеем

$$z^{\pm n w_2}\Big|_{s_{k,1,m}} = e^{\pm n\frac{\pi}{3}w_2 s}\Big|_{s_{k,1,m}} = \\ = \exp\Big(\pm n\frac{\pi}{3}w_2 6\tilde{k}\Big)\exp\Big[\pm n\frac{\pi}{3}w_2\Big(\frac{d_{3km}}{\tilde{k}^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{\tilde{k}^6}\Big)\Big)\Big] = \\ = e^{\pm ni\varphi}\Big[1 \pm \frac{n\pi w_2}{3}\frac{d_{3km}}{\tilde{k}^3}+\underline{O}\Big(\frac{1}{\tilde{k}^6}\Big)\Big], \quad n=1,2,3. \quad (55)$$

Подставляя формулы (54), (55) в уравнение (30)–(34), видим, что коэффициент при $\tilde{k}^0$ равен нулю в силу того, что $x_{5,6}=e^{\pm i\varphi}$ являются корнями уравнений (27) и $f_{0,1}=0$ из (30), (31). Приравнивая коэффициенты при $\tilde{k}^{-3}$, находим

$$d_{3km} = \frac{81\sqrt{5}}{20\pi\cdot 6^3\cdot 424}\frac{G_3(s)}{z^{3w_1}}\Big|_{s_{k,1,m,\text{осн}}}, \quad m=5, \quad m=6, \quad (56)$$

где функция $G_3(s)$ определена в (41)–(43). Произведя необходимые преобразования в (56), получаем

$$d_{3km} = \frac{3\sqrt{5}}{160\cdot 424\pi}\Big[4\sin(3\varphi)\int_0^{\pi} q(t)dt - \frac{32}{3}\sin(2\varphi)\int_0^{2\pi/3} q(t)dt + \\ + \frac{20}{3}\sin\varphi\int_0^{\pi/3} q(t)dt - 4\int_0^{\pi} q(t)\sin\big(12\tilde{k}t-3\varphi\big)dt + \\ + \frac{32}{3}\int_0^{2\pi/3} q(t)\sin\big(12\tilde{k}t-2\varphi\big)dt - \\ - \frac{20}{3}\int_0^{\pi/3} q(t)\sin\big(12\tilde{k}t-\varphi\big)dt\Big], \quad m=5, \quad m=6. \quad (57)$$

Если в уравнении (30)–(34) вести вычисления с точностью формул (12), (13) (а не только (10), (11)), то можно в явном виде вычислить коэффициенты d_{6km} формулы (54). Получение формул (57) завершает доказательство теоремы 2 (доказано, что коэффициенты d_{3km} формулы (54) находятся единственным образом и приведены явные формулы для их вычисления). □

Изучая аналогичным образом сектора 2), 3), 4) индикаторной диаграммы (25), доказываем следующее утверждение.

Теорема 3. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(3) в секторах 2), 3), 4) индикаторной диаграммы (25) подчиняется следующим законам:*

1) $$s_{k,n,p} = s_{k,1,p}e^{\frac{\pi i}{2}(n-1)}, \ n=2,3,4, \ p=1,2,3,4; \ \lambda_{k,n,p}=s_{k,n,p}^4, \quad (58)$$

$s_{k,1,p}$ *определены формулами (36), (52), (53);*

2) $$s_{k,n,m} = s_{k,1,m}e^{\frac{2\pi i}{4}(n-1)}, \ n=2,3,4, \ m=5, \ m=6; \ \lambda_{k,n,m}=s_{k,n,m}^4, \quad (59)$$

$s_{k,1,m}$ *определены формулами (54), (57).*

Формулы (36), (52)–(54), (57)–(59) позволяют вычислить асимптотику собственных функций многоточечного дифференциального оператора (1)–(3).

Аналогичное поведение спектра (с эффектом «расщепления» кратных в главном приближении собственных значений) наблюдается у дифференциального оператора, задаваемого дифференциальным уравнением (1) с граничными условиями

$$
\begin{gathered}
y'(0)=0; \quad y^{(3)}(0)=0; \quad y(\pi)=\alpha_1 y\Big(\frac{\pi}{3}\Big)+\alpha_2 y\Big(\frac{2\pi}{3}\Big); \\
y''(\pi)=\beta_1 y''\left(\frac{\pi}{3}\right)+\beta_2 y''\Big(\frac{2\pi}{3}\Big); \\
\beta_1=2-\alpha_1, \quad \alpha_1\in\mathbb{C}; \quad \beta_2=-\alpha_2, \quad \alpha_2\in\mathbb{C},
\end{gathered} \tag{60}
$$

с условием (3) суммируемости потенциала $q(x)$.

В этом случае уравнение (26), (27) (основное приближение уравнения (18)–(22)) принимает следующий вид:

$$
g_2(x)=2x^6-2x^4-2x^2+2=0, \quad x=z^{w_2}=e^{\frac{\pi}{3}is}\neq 0. \tag{61}
$$

Уравнение (61) имеет следующие корни $(g_2(x)=2(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1))$: $x_1=x_2=1$ (кратность 2), $x_3=x_4=-1$ (кратность 2), $x_5=i$ (кратность 1), $x_6=-i$ (кратность 1). Поэтому корни уравнения (18)–(22) (в основном приближении) имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
x_1=x_3=1 \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{3}is}=1=e^{2\pi ik} \Leftrightarrow s_{k,j,\text{осн}}=6k \ \text{ кратность } 2, \\
k\in\mathbb{N}, \ j=1,2; \\
x_3=x_4=-1 \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{3}is}=-1=e^{\pi i}e^{2\pi ik} \Leftrightarrow s_{k,j,\text{осн}}=6k+3 \ \text{ кратность } 2, \\
k\in\mathbb{N}, \ j=3,4; \\
x_{5,6}=\pm i \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{3}is}=e^{\pm i\frac{\pi}{2}}e^{2\pi ik} \Leftrightarrow s_{k,j,\text{осн}}=6k\pm\frac{3}{2} \ \text{ кратность } 1, \\
k\in\mathbb{N}, \ j=5,6.
\end{gathered}
$$

Справедливы утверждения, аналогичные теоремам 1, 2, 3.

Теорема 4. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1), (60), (3) *в секторах* 1), 2), 3), 4) *индикаторной диаграммы* (25) *имеет следующий вид*:

1)
$$
\begin{gathered}
s_{k,1,j}=6k+\frac{d_{1kj}}{k^{3/2}}+\frac{d_{2kj}}{k^{6/2}}+\frac{d_{3kj}}{k^{9/2}}+\underline{O}\Big(\frac{1}{k^{12/2}}\Big), \\
k\in\mathbb{N}, \ j=1,2; \ s_{k,n,j}=s_{k,1,j}e^{\frac{\pi i}{2}(n-1)}, \ n=1,2,3,4; \\
\lambda_{k,n,j}=s^4_{k,n,j}, \ j=1,2; \ n=1,2,3,4;
\end{gathered} \tag{62}
$$

2)
$$
\begin{aligned}
s_{k,1,j}=6k+3+\frac{d_{1kj}}{(6k+3)^{3/2}}+\frac{d_{2kj}}{(6k+3)^{6/2}}+ \\
+\frac{d_{3kj}}{(6k+3)^{9/2}}+\underline{O}\Big(\frac{1}{(6k+3)^{12/2}}\Big),
\end{aligned} \tag{63}
$$

$$k \in \mathbb{N}, \quad j = 3, 4; \quad s_{k,n,j} = s_{k,1,j} e^{\frac{\pi i}{2}(n-1)}, \quad n = 1, 2, 3, 4;$$
$$\lambda_{k,n,j} = s_{k,n,j}^4, \quad j = 3, 4; \quad n = 1, 2, 3, 4;$$

3) $$s_{k,1,j} = 6\tilde{\tilde{k}} + \frac{d_{1kj}}{\tilde{\tilde{k}}^3} + \frac{d_{2kj}}{\tilde{\tilde{k}}^6} + \underline{O}\Big(\frac{1}{\tilde{\tilde{k}}^{12/2}}\Big), \ \tilde{\tilde{k}} = k + \frac{1}{4}, \tag{64}$$
$$j = 5, 6; \ s_{k,n,j} = s_{k,1,j} e^{\frac{\pi i}{2}(n-1)}, \ n = 1, 2, 3, 4;$$
$$\lambda_{k,n,j} = s_{k,n,j}^4, \ j = 5, 6; \ n = 1, 2, 3, 4.$$

Коэффициенты разложений (62)–(64) находятся аналогично получению формул (52), (53), (57).

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Митрохин С. И. О «расщеплении» кратных в главном собственных значений многоточечных краевых задач // *Изв. вузов. Матем.*, 1997. № 3. С. 38–43.
2. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // *Дифференц. уравнения*, 1998. Т. 34, № 10. С. 1423–1426.
3. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000. Т. 64, № 4. С. 47–108. doi: 10.4213/im295.
4. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами // *Вестник Московского университета. Сер. Матем., мех.*, 2009. № 3. С. 14–17.
5. Митрохин С. И. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом // *Уфимск. матем. журн.*, 2011. Т. 3, № 4. С. 95–115.
6. Ильин В. А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // *Матем. заметки*, 1977. Т. 22, № 5. С. 679–698.
7. Будаев В. Д. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами // *Дифференц. уравнения*, 1987. Т. 23, № 6. С. 941–952.
8. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // *Дифференц. уравнения*, 1986. Т. 22, № 12. С. 2059–2071.
9. Митрохин С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // *Докл. РАН*, 1997. Т. 356, № 1. С. 13–15.
10. Гуревич А. П., Хромов А. П. Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией // *Матем. заметки*, 1994. Т. 56, № 1. С. 3–15.

11. Лидский В. В., Садовничий В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // *Функц. анализ и его прил.*, 1967. Т. 1, № 2. С. 52–59.
12. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами // *Дифференц. уравнения*, 1992. Т. 28, № 3. С. 530–532.
13. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // *Матем. сб.*, 1968. Т. 75(117), № 4. С. 558–566.
14. Савчук А. М. Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма—Лиувилля с δ-потенциалом // *УМН*, 2000. Т. 55, № 6(336). С. 155–156. doi: 10.4213/rm352.
15. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма—Лиувилля с сингулярными потенциалами // *Матем. заметки*, 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912. doi: 10.4213/mzm1234.
16. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука, 1969. 528 с.
17. Левитан Б. М., Саргсян И. С. *Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы.* М.: Наука, 1970. 672 с.
18. Bellman R., Cooke K. L. *Differential-difference equations* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 6. New York–London: Academic Press, 1963. xvi+462 pp.
19. Садовничий В. А., Любишкин В. А. О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // *Дифференц. уравнения*, 1982. Т. 18, № 1. С. 109–116.
20. Садовничий В. А., Любишкин В. А., Белабасси Ю. О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса // *Докл. АН СССР*, 1980. Т. 254, № 6. С. 1346–1348.
21. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциального оператора Штурма—Лиувилля с запаздывающим аргументом // *Вестник Московского университета. Сер. Матем., мех.*, 2013. № 4. С. 38–42.
22. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечетного порядка с суммируемым потенциалом // *Дифференц. уравнения*, 2011. Т. 47, № 12. С. 1808–1811.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 249–270
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1504

MSC: 34B10, 47E05

On the "splitting" effect for multipoint differential operators with summable potential

S. I. Mitrokhin

M. V. Lomonosov Moscow State University,
Vorob'evy gory, Moscow, 119899, Russian Federation.

Abstract

We study the differential operator of the fourth order with multipoint boundary conditions. The potential of the differential operator is summable function on a finite segment. For large values of spectral parameter the asymptotic behavior of solutions of differential equation which define the differential operator is found. The equation for eigenvalues of the studied operators is derived by studying the boundary conditions. The parameters of boundary conditions are selected in such a way that the main approach of the equation for eigenvalues has multiple roots. The author shows that for the studied operator the effect of "splitting" of multiple eigenvalues in the main approximation is observed. We derive all series of single eigenvalues of the investigated operator. The indicator diagram of the considered operator is studied. The asymptotic behavior of eigenvalues in all sectors of the indicator diagram is found. The obtained precision of the asymptotic formulas is enough for finding an asymptotics of eigenfunctions of the studied differential operator.

Keywords: differential operator, spectral parameter, summable potential, the equation for the eigenvalues, the indicator diagram, the asymptotic behavior of the eigenvalues.

Received: 24th August, 2016 / Revised: 13th May, 2017 /
Accepted: 12th June, 2017 / First online: 5th July, 2017

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any sponsorship.

Article

Please cite this article in press as:
Mitrokhin S. I. On the "splitting" effect for multipoint differential operators with summable potential, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 249–270. doi: 10.14498/vsgtu1504 (In Russian).

Author's Details:

Sergey I. Mitrokhin Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Senior Researcher; Research Computing Center; e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

References

1. Mitrokhin S. I. On the “splitting” of multiplicity in principal eigenvalues of multipoint boundary value problems, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1997, vol. 41, no. 3, pp. 37–42.
2. Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A. Arbitrary-order asymptotics of the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm–Liouville boundary value problem on an interval with integrable potential., *Differ. Equ.*, 1998, vol. 34, no. 10, pp. 1425–1429.
3. Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A. Asymptotics of any order for the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm–Liouville boundary-value problem on a segment with a summable potential, *Izv. Math.*, 2000, vol. 64, no. 4, pp. 695–754. doi: 10.1070/im2000v064n04ABEH000295.
4. Mitrokhin S. I. The asymptotics of the eigenvalues of a fourth order differential operator with summable coefficients, *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2009, vol. 64, no. 3, pp. 102–104. doi: 10.3103/S0027132209030024.
5. Mitrokhin S. I. On spectral properties of a differential operator with summable coefficients with a retarded argument, *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 95–115 (In Russian).
6. Il’in V. A. Convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator, *Math. Notes*, 1977, vol. 22, no. 5, pp. 870–882. doi: 10.1007/BF01098352.
7. Budaev V. D. The property of being an unconditional basis on a closed interval, for systems of eigen- and associated functions of a second-order operator with discontinuous coefficients, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 6, pp. 941–952 (In Russian).
8. Il’in V. A. Necessary and sufficient conditions for being a Riesz basis of root vectors of second-order discontinuous operators, *Differ. Uravn.*, 1986, vol. 22, no. 12, pp. 2059–2071 (In Russian).
9. Mitrokhin S. I. On some spectral properties of second-order differential operators with a discontinuous positive weight function, *Dokl. Akad. Nauk*, 1997, vol. 356, no. 1, pp. 13–15 (In Russian).
10. Gurevich A. P., Khromov A. P. First and second order differentiation operators with weight functions of variable sign, *Math. Notes*, 1994, vol. 56, no. 1, pp. 653–661. doi: 10.1007/BF02110552.
11. Lidskii V. B., Sadovnichii V. A. Regularized sums of zeros of a class of entire functions, *Funct. Anal. Appl.*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 133–139. doi: 10.1007/BF01076085.
12. Mitrokhin S. I. Spectral properties of differential operators with discontinuous coefficients, *Differ. Uravn.*, 1992, vol. 28, no. 3, pp. 530–532 (In Russian).
13. Lidskii V. B., Sadovnichii V. A. Asymptotic formulas for the zeros of a class of entire functions, *Math. USSR-Sb.*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 519–527. doi: 10.1070/SM1968v004n04ABEH002812.
14. Savchuk A. M. First-order regularised trace of the Sturm–Liouville operator with δ-potential, *Russian Math. Surveys*, 2000, vol. 55, no. 6, pp. 1168–1169. doi: 10.1070/rm2000v055n06ABEH000352.
15. Savchuk A. M., Shkalikov A. A. Sturm–Liouville operators with singular potentials, *Math. Notes*, 1999, vol. 66, no. 6, pp. 741–753. doi: 10.1007/BF02674332.
16. Naimark M. A. *Lineinye differentsial’nye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka, 1969, 528 pp. (In Russian)
17. Levitan B. M., Sargsian I. S. *Introduction to spectral theory. Selfadjoint ordinary differential operators*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 39. Providence, R.I., American Mathematical Society, 1975, xi+525 pp.
18. Bellman R., Cooke K. L. *Differential-difference equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 6. New York–London, Academic Press, 1963, xvi+462 pp.
19. Sadovnichii V. A., Lyubishkin V. A. Some new results of the theory of regularized traces of differential operators, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 109–116 (In Russian).
20. Sadovnichii V. A., Lyubishkin V. A., Belabbasi Yu. On regularized sums of roots of an entire function of a certain class, *Sov. Math., Dokl.*, 1980, vol. 22, pp. 613–616.

21. Mitrokhin S. I. Spectral properties of a Sturm–Liouville type differential operator with a retarding argument, *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2013, vol. 68, no. 4, pp. 198–201. doi: 10.3103/S0027132213040062.
22. Mitrokhin S. I. On the spectral properties of odd-order differential operators with integrable potential, *Differ. Equ.*, 2011, vol. 47, no. 12, pp. 1833–1836. doi: 10.1134/S0012266111120123.