Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 2. С. 271–277
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1540

УДК 517.956.6

Об одной краевой задаче с операторами Сайго для уравнения смешанного типа

О. А. Репин

Самарский государственный экономический университет,
Россия, 443090, Самара, ул. Советской Армии, 141.

Аннотация

В силу прикладной важности теория уравнений смешанного типа является одним из важнейших разделов теории уравнений с частными производными. Это обусловлено тем, что уравнения смешанного типа непосредственно связаны с проблемами теории сингулярных интегральных уравнений, интегральных преобразований и специальных функций. Актуальным продолжением исследований в этих областях будет доказательство однозначной разрешимости внутреннекраевой задачи, когда в гиперболической части области задано условие, связывающее обобщенные производные и интегралы дробного порядка с гипергеометрической функцией Гаусса от значений решения на характеристике искомого уравнения.

Ключевые слова: краевая задача, гипергеометрическая функция Гаусса, оператор дробного порядка, задача Коши, интегральные уравнения.

Получение: 11 апреля 2017 г. / Исправление: 17 мая 2017 г. /
Принятие: 12 июня 2017 г. / Публикация онлайн: 6 июля 2017 г.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m = \text{const} > 0, \tag{1}$$

в конечной области Ω, ограниченной кусочно-гладкой кривой Жордана σ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, расположенной в полуплоскости $y > 0$, и его характеристиками

$$AC: \quad x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad BC: \quad x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 1.$$

Краткое сообщение

Образец для цитирования

Репин О. А. Об одной краевой задаче с операторами Сайго для уравнения смешанного типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 2. С. 271–277. doi: 10.14498/vsgtu1540.

Сведения об авторе

Олег Александрович Репин http://orcid.org/0000-0003-1522-3955
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. математической статистики и эконометрики; e-mail: matstat@mail.ru

Пусть Ω_1 и Ω_2 — эллиптическая и гиперболическая части смешанной области Ω. Под регулярным решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x,y) \in C\big(\overline{\Omega}\big) \cap C^1(\Omega) \cap C^2\big(\Omega_1 \cup \Omega_2\big)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$ и такую, что $u_y(x,0)$ может обращаться в бесконечность порядка ниже $1-2\beta$, $\beta = m/(2m+4)$, на концах A и B интервала I: $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \sigma, \tag{2}$$

$$A\big(I_{0+}^{\alpha,\mu,3\beta-1} u\big[\Theta_0(t)\big]\big)(x) + B\big(I_{0+}^{\alpha+\beta,\mu,2\beta-1} u(t,0)\big)(x) + \\ + C\big(I_{0+}^{\alpha+1-\beta,\mu+2\beta-1,2\beta-1} u_y(t,0)\big)(x) = g(x) \tag{3}$$

и условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} u_y(x,y) = \lim_{y\to 0-} u_y(x,y), \quad \lim_{y\to 0+} u(x,y) = \lim_{y\to 0-} u(x,y), \tag{4}$$

где A, B, C, α, μ — вещественные числа, на которые ниже будут наложены некоторые условия; $\varphi(x,y)$ и $g(x)$ — заданные функции, обладающие свойствами

$$\varphi(x,y) \in C^1(\sigma), \quad g(x) \in C^1(\overline{I});$$

$\big(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f\big)(x)$ — оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования, введенный в работе [1] (см. также [2, с. 326–327], [3, с. 14]) и имеющий при действительных α, β, η и $x > 0$ вид

$$\big(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f\big)(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\Big(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}\Big) f(t)\,dt & (\alpha > 0), \\ \dfrac{d^n}{dx^n}\big(I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n} f\big)(x) & (\alpha \leqslant 0,\ n = [-\alpha]+1). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $F(a,b;c;x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, $\Theta_0(x)$ — точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0) \in I$, с характеристикой AC.

Нелокальные задачи для уравнения (1) изучались многими авторами, но в основном в работах этих авторов использовались операторы Римана—Лиувилля. В данной работе продолжаются (см. [4]) исследования для уравнения (1), когда краевое условие содержит операторы, введенные японским математиком М. Сайго.

Единственность решения задачи.

Принцип экстремума. *Если $g(x) = 0$,*

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}(2-4\beta)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)},$$

$$\begin{cases} A\gamma_1 + B > 0, \\ A\gamma_2 - C > 0 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} A\gamma_1 + B < 0, \quad \alpha > -\beta, \\ A\gamma_2 - C < 0, \end{cases} \tag{6}$$

то положительный максимум и отрицательный минимум решения $u(x,y)$ задачи (1)–(3) в замкнутой области Ω_1 достигается лишь на кривой σ.

Доказательство. Пусть, как и принято,

$$\tau(x) = u(x,0), \quad \nu(x) = u_y(x,0).$$

Тогда решение задачи Коши в области Ω_2 имеет вид [5, с. 265]

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau\Big[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)\Big] t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt +$$
$$+ \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} y \int_0^1 \nu\Big[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)\Big] t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt. \tag{7}$$

Используя (7) и (5), получим

$$u\big[\Theta_0(x)\big] = \gamma_1\big(I_{0+}^{\beta,0,\beta-1}\tau(t)\big)(x) - \gamma_2\big(I_{0+}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu(t)\big)(x).$$

Подставляя $u\big[\Theta_0(x)\big]$ в условие (3), опираясь на полугрупповое свойство обобщенных операторов [2, с. 327]

$$I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} I_{0+}^{\gamma,\delta,\eta-\beta-\gamma-\delta} f = I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta-\gamma-\delta} f, \quad \gamma > 0,$$

получим

$$\big(A\gamma_1 + B\big)\big(I_{0+}^{\alpha+\beta,\mu,2\beta-1}\tau\big)(x) + \big(C - A\gamma_2\big)\big(I_{0+}^{\alpha+1-\beta,\mu+2\beta-1,2\beta-1}\nu\big)(x) = g(x). \tag{8}$$

Подействуем на обе части (8) обратным оператором

$$\big(I_{0+}^{\alpha+1-\beta,\mu+2\beta-1,2\beta-1} f\big)^{-1} = I_{0+}^{\beta-1-\alpha,1-\mu-2\beta,\beta+\alpha} f$$

и воспользуемся формулой [2, с. 327]

$$I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} f = I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} f, \quad \gamma > 0.$$

После несложных преобразований получим

$$\nu(x) = \frac{A\gamma_1 + B}{A\gamma_2 - C} D_{0+}^{1-2\beta}\tau(x) + \frac{1}{C - A\gamma_2}\big(I_{0+}^{\beta-1-\alpha,1-\mu-2\beta,\beta+\alpha} g(t)\big)(x), \tag{9}$$

где $D_{0+}^{1-2\beta}\tau(x)$ — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля [2, с. 41–42].

А теперь на основании условий (6) и свойства дробной производной из (9) имеем неравенство $\nu(x) > 0$, что противоречит принципу Заремба—Жиро [6, с. 31].

Принцип экстремума доказан. □

Из принципа экстремума следует, что задача (1)–(3) при выполнении условий (6) не может иметь более одного решения.

Существование решения задачи. Переходя к доказательству существования решения задачи (1)–(3), будем считать, что кривая σ совпадает с «нормальной» кривой

$$\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=\frac{1}{4}, \quad y\geqslant 0.$$

Соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенное из эллиптической части Ω_1 смешанной области Ω на I, имеет вид [7, с. 133]

$$\tau(x)=-k\int_0^1\Big[\frac{1}{|t-x|^{2\beta}}-\frac{1}{(x+t-2tx)^{2\beta}}\Big]\nu(t)dt-\\ -\int_0^l H(t,x)\nu(t)dt-\int_0^l \varphi(s)\rho_1(s;x,0)ds,$$

где

$$k=\frac{1}{4\pi}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}, \quad H(t,x)=\int_0^l \rho_1(s;t,0)G(\xi,\eta;x,0)ds,$$

l — длина кривой σ; $G(x,y;x_0,y_0)$ — функция Грина этой задачи; $\rho_1(s;x,y)$ — известная функция, свойства которой подробно описаны в монографии [7, с. 132–140]; $\varphi(s)=u(x,y)|_\sigma$.

Используя (7), выпишем соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенное из гиперболической части Ω_2 смешанной области Ω на I:

$$\tau(x)=\frac{A\gamma_2-C}{A\gamma_1+B}\big(I_{0+}^{1-2\beta}\nu(t)\big)(x)+\frac{1}{A\gamma_1+B}\big(I_{0+}^{-(\alpha+\beta),-\mu,\alpha+3\beta-1}g(t)\big)(x). \quad (10)$$

Учитывая условия сопряжения (4), получим

$$a_1\big(I_{0+}^{1-2\beta}\nu(t)\big)(x)+g_1(x)=\\ =-k\int_0^1\Big[\frac{1}{|t-x|^{2\beta}}-\frac{1}{(x+t-2tx)^{2\beta}}\Big]\nu(t)dt-\\ -\int_0^l H(t,x)\nu(t)dt-\int_0^l \varphi(s)\rho_1(s;x,0)ds, \quad (11)$$

где

$$a_1=\frac{A\gamma_2-C}{A\gamma_1+B}, \quad g_1(x)=\frac{1}{A\gamma_1+B}\big(I_{0+}^{-(\alpha+\beta),-\mu,\alpha+3\beta-1}g(t)\big)(x).$$

Применив к обеим частям (11) оператор $D_{0+}^{1-2\beta}$, будем иметь

$$a_1\nu(x)+D_{0+}^{1-2\beta}g_1(x)=\\ =-D_{0+}^{1-2\beta}\Big[k\int_0^1\Big(\frac{1}{|t-x|^{2\beta}}-\frac{1}{(x+t-2tx)^{2\beta}}\Big)\nu(t)dt+$$

$$+\int_0^l H(t,x)\nu(t)dt + \int_0^l \varphi(s)\rho_1(s;x,0)ds\Big].$$

Далее, поступая аналогично тому, как это сделано в работе [4], получим сингулярное интегральное уравнение нормального типа, индекс которого равен нулю.

Единственное решение этого уравнения может быть построено в требуемом классе функций согласно обшей теории.

По найденной функции $\nu(x)$ из (10) определим $\tau(x)$ и решение задачи (1)–(3) как решение задачи N в области Ω_1 и как решение задачи Коши в области Ω_2.

Конкурирующие интересы. У меня нет конкурирующих интересов.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без грантовой поддержки.

Библиографический список

1. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function // *Math. Rep. College General Educ., Kyushu Univ.*, 1978. vol. 11, no. 2. pp. 135–143.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
3. Репин О. А. *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов*. Саратов: Саратов. ун-т, 1992. 161 с.
4. Репин О. А., Кумыкова С. К. Внутреннекраевая задача с операторами Сайго для уравнения Геллерстедта // *Дифференц. уравнения*, 2013. Т. 49, № 10. С. 1340–1349.
5. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*. М.: Наука, 1981. 448 с.
6. Бицадзе А. В. *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка*. М.: Наука, 1966. 203 с.
7. Смирнов М. М. *Уравнения смешанного типа*. М.: Наука, 1970. 296 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 271–277

MSC: 35M12

On a boundary-value problem with Saigo operators for a mixed-type equation

O. A. Repin

Samara State Economic University,
141, Sovetskoy Armii st., Samara, 443090, Russian Federation.

Abstract

The theory of mixed type equations is one of the most important parts of the theory of partial differential equations. This is due to the fact that equations of mixed type are connected with the problems of the theory of singular integral equations, integral transformations, and special functions. An actual continuation of the research in these fields will be the proof of the unique solvability of the inner-boundary problem. In the hyperbolic part of the domain, a condition is established that relates the generalized derivatives and fractional-order integrals to the Gauss hypergeometric function.

Keywords: boundary value problem, Gauss hypergeometric function, fractional-order operator, Cauchy problem, integral equations.

Received: 11th April, 2017 / Revised: 17th May, 2017 /
Accepted: 12th June, 2017 / First online: 6th July, 2017

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

References

1. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function, *Math. Rep. College General Educ., Kyushu Univ.*, 1978, vol. 11, no. 2, pp. 135–143.
2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)

Short Communication

Please cite this article in press as:
Repin O. A. On a boundary-value problem with Saigo operators for a mixed-type equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 271–277. doi: 10.14498/vsgtu1540 (In Russian).

Author's Details:
Oleg A. Repin http://orcid.org/0000-0003-1522-3955
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Mathematical Statistics and Econometrics; e-mail: matstat@mail.ru

3. Repin O. A. *Kraevye zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii giperbolicheskogo i smeshannogo tipov* [Boundary value problems with shift for equations of hyperbolic and mixed type]. Saratov, Saratov University, 1992, 161 pp. (In Russian)
4. Repin O. A., Kumykova S. K. Interior-boundary value problem with Saigo operators for the gellerstedt equation, *Differ. Equ.*, 2013, vol. 49, no. 10, pp. 1307–1316. doi: 10.1134/S0012266113100121.
5. Bitsadze A. V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. Moscow, Nauka, 1981, 448 pp. (In Russian)
6. Bitsadze A. V. *Boundary value problems for second order elliptic equations*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 5. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1968, 211 pp.
7. Smirnov M. M. *Uravneniia smeshannogo tipa* [Equations of mixed type]. Moscow, Nauka, 1970, 296 pp. (In Russian)