Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 2. С. 278–291
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1507

УДК 517.977.56

О задаче оптимального управления коэффициентами эллиптического уравнения

Р. К. Тагиев, Р. С. Касымова

Бакинский государственный университет,
Азербайджан, AZ-1148, Баку, ул. З. Халилова, 23.

Аннотация

В данной работе рассматривается задача оптимального управления для линейного эллиптического уравнения второго порядка. Управляющие функции входят в коэффициенты уравнения для состояния, в том числе в коэффициенты при старших производных. Пространство управлений является произведением пространств Соболева и Лебега. Функционалом цели является сумма интегралов по области и по части ее границы. Исследованы вопросы корректности постановки задачи в слабой топологии пространства управлений. Доказано, что множество оптимальных управлений задачи не пусто, слабо компактно и любая минимизирующая последовательность функционала цели слабо сходится в пространстве управлений к множеству оптимальных управлений. Приведены примеры, показывающие, что решение рассматриваемой задачи может быть не единственным и минимизирующая последовательность функционала цели может не иметь предела в сильной топологии пространства управлений. Доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели и найдено выражение для его градиента. Установлено необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

Ключевые слова: оптимальное управление, эллиптическое уравнение, корректность задачи, условие оптимальности.

Получение: 26 августа 2016 г. / Исправление: 14 мая 2017 г. / Принятие: 12 июня 2017 г. / Публикация онлайн: 6 июля 2017 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Тагиев Р. К., Касымова Р. С. О задаче оптимального управления коэффициентами эллиптического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 2. С. 278–291. doi: 10.14498/vsgtu1507.

Сведения об авторах

Рафик Каландар Тагиев http://orcid.org/0000-0002-4185-4219
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. оптимизации и управления; e-mail: r.tagiyev@list.ru

Рена Саттар Касымова http://orcid.org/0000-0002-4753-7185
преподаватель; каф. оптимизации и управления; e-mail: rena.kasimova@list.ru

Введение. Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений возникают, например, в оптимизационных задачах механики сплошных сред, проектировании конструкций, теории упругости, конвекции-диффузии-реакции, экологического прогнозирования [1–3] и т. п. Среди этих задач особый интерес представляют задачи, в которых управляющие функции входят в коэффициенты уравнения для состояний, в том числе в коэффициенты при старших производных. При исследовании таких задач оптимального управления возникает ряд существенных трудностей, связанных с их невыпуклостью, сильной нелинейностью и некорректностью [4, 5].

Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах изучались в работах [4, 6–14] и др. В этих работах рассматриваемые критерии качества в основном являлись интегральными по всей области. Однако часто бывает удобнее вести наблюдения на границе области, и в таких случаях более естественными являются интегральные критерии качества по границе области. Такие задачи оптимального управления для эллиптических уравнений наименее изучены [4, 6].

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления коэффициентами линейного эллиптического уравнения. Функционалом цели является сумма интегралов по области и по части ее границы. Исследованы вопросы корректности рассматриваемой задачи, доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели, найдено выражение для его градиента и установлено необходимое условие оптимальности в форме вариационного неравенства.

1. Постановка задачи. Пусть

$$\Omega = \left\{x = (x_1, x_2) : 0 < x_i < l_i,\ i = 1, 2\right\}$$

— прямоугольник с границей Γ,

$$\Gamma_{-1} = \left\{s = (s_1, s_2) : s_1 = 0,\ 0 < s_2 < l_2\right\}$$

— левая вертикальная сторона прямоугольника Ω.

Пусть управляемый процесс описывается в Ω следующей смешанной краевой задачей для уравнения эллиптического типа:

$$-\sum_{i=1}^{2} \left(k_i(x) u_{x_i}\right)_{x_i} + q(x)u = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$-k_1(s) u_{x_1}(s) = g(s), \quad s \in \Gamma_{-1}, \tag{2}$$

$$u(s) = 0, \quad s \in \Gamma \backslash \Gamma_{-1}, \tag{3}$$

где $f(x) \in L_2(\Omega)$, $g(s) \equiv g(s_2) \in W_2^1(0, l_2)$ — заданные функции; $v(x) = \left(k_1(x), k_2(x), q(x)\right)$ — управление; $u(x) = u(x; v)$ — решение задачи (1)–(3) или состояние процесса, соответствующее управлению $v = v(x)$.

Введем множество допустимых управлений

$$V = \prod_{i=1}^{3} V_i \subset H = W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega) \tag{4}$$

при

$$
\begin{aligned}
V_i =&\big\{k_i(x) \in W_2^1(\Omega) : 0 < \nu_i \leqslant k_i(x) \leqslant \mu_i,\\
&\qquad |k_{ix_j}(x)| \leqslant d_j^{(i)},\ j = 1,2 \text{ п. в. на } \Omega\big\}, \quad i = 1,2,\\
V_3 =&\big\{q(x) \in L_2(\Omega) : 0 < q_0 \leqslant q(x) \leqslant q_1 \text{ п. в. на } \Omega\big\}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Здесь $\mu_i \geqslant \nu_i > 0$; $d_j^{(i)} > 0$, $i, j = 1, 2$; $q_1 \geqslant q_0 > 0$ — заданные числа.

Поставим следующую задачу оптимального управления: *на множестве V при условиях* (1)–(3) *минимизировать функционал*

$$
J(v) = \alpha_1 \int_\Omega \big|u(x; v) - u_1(x)\big|^2 dx + \alpha_2 \int_{\Gamma_{-1}} \big|u(s; v) - u_2(s)\big|^2 ds, \tag{6}
$$

где $u_1(x) \in L_2(\Omega)$, $u_2(s) \equiv u_2\big(s_2\big) \in L_2(0, l_2)$ — заданные функции; α_1, $\alpha_2 = \text{const} > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$. Эту задачу оптимального управления ниже будем называть задачей (1)–(6).

Используемые в работе обозначения функциональных пространств и их норм соответствуют [15, с. 24–26]. Ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений, будем обозначать через M_j, $j = 1, 2, \ldots$.

Под решением краевой задачи (1)–(3), соответствующим управлению $v \in V$, будем понимать обобщенное решение из $W_{2,0}^1(\Omega)$, т. е. функцию $u(x) = u(x; v) \in W_{2,0}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$
\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{2} k_i(x) u_{x_i} \eta_{x_i} + q(x) u \eta\right) dx = \int_\Omega f(x) \eta dx + \int_{\Gamma_{-1}} g(s) \eta ds \tag{7}
$$

для всех $\eta = \eta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega)$. Здесь $W_{2,0}^1(\Omega)$ — подпространство пространства $W_2^1(\Omega)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega})$, равных нулю вблизи $\Gamma \backslash \Gamma_{-1}$.

Используя результаты из [15, с. 24–26], [16, с. 40–46], можно показать, что при каждом заданном $v \in V$ существует единственное обобщенное решение $u(x) = u(x; v) \in W_{2,0}^1(\Omega)$ задачи (1)–(3) и справедлива оценка

$$
\|u\|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant M_1\big(\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}}\big). \tag{8}
$$

Более того, обобщенное решение из $W_{2,0}^1(\Omega)$ краевой задачи (1)–(3) также принадлежит пространству $W_{2,0}^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) \cap W_{2,0}^1(\Omega)$ и верна оценка

$$
\|u\|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant M_2\big(\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)}\big). \tag{9}
$$

Известно [15, с. 84], что вложения $W_{2,0}^1(\Omega) \to C\big(\overline{\Omega}\big)$, $W_2^1(\Omega) \to L_{r_1}(\Omega)$ ограничены при любом $r_1 \in [2; \infty)$. Поэтому из (9) следует, что справедлива оценка

$$
\|u\|_{C(\overline{\Omega})} + \|u_x\|_{r_1,\Omega} + \|u_{xx}\|_{2,\Omega} \leqslant M_3\big(\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)}\big). \tag{10}
$$

Задачи оптимального управления типа (1)–(6) возникают в разных областях практики. В качестве примера рассмотрим задачу о положении равновесия неоднородной упругой мембраны из теории упругости [1]. Пусть мембрана, занимающая область Ω ограниченной границей Γ, закреплена на части $\Gamma\backslash\Gamma_{-1}$ границы Γ. На внутренние точки мембраны действует внешняя сила $f(x)$ и на границе Γ_{-1} заданы напряжения $g(s)$. Окружающая мембрану среда оказывают мембране сопротивление, пропорциональное смещению точек мембраны. Пусть функция $u(x)$ определяет прогиб мембраны в точке $x \in \Omega \cup \Gamma_{-1}$. В силу сделанных предположений состояние мембраны описывается краевой задачей (1)–(3) при $k_1(x) = k_2(x) = k(x)$. Роль управляющих функции выполняют функции $k(x)$ — коэффициент натяжения мембраны и $q(x)$ — коэффициент упругости окружающей среды. Ограничения (5) на функции $k(x)$ и $q(x)$ характеризуют границы их допустимых изменений, а также учитывают недопустимость резких перепадов в изменении упругих характеристик материала. Целевой функционал (6) в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ в нормах пространств $L_2(\Omega)$ и $L_2\big(\Gamma_{-1}\big)$ характеризует среднеквадратичное отклонение прогибов мембраны от заданных прогибов $u_1(x)$ и $u_2(s)$.

2. Корректность постановки задачи. Корректность задачи (1)–(6) является следствием теоремы 1.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия задачи* (1)–(6)*. Тогда множество оптимальных управлений задачи* (1)–(6)

$$V_* = \big\{v_* \in V : J(v_*) = J_* \equiv \inf\{J(v) : v \in V\}\big\}$$

не пусто, V_* — слабо компактно в H и любая минимизирующая последовательность $\{v^{(n)}\} \subset V$ функционала (5) *в H сходится слабо к множеству V_*.*

Доказательство. Покажем, что функционал (6) слабо в H непрерывен на V.

Пусть $v = (k_1, k_2, q) \in V$ — некоторый элемент, $\{v^{(n)}\} = \big\{k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, q^{(n)}\big\} \subset V$ — произвольная последовательность такая, что $v^{(n)} \to v$ слабо в H при $n \to \infty$:

$$k_i^{(n)}(x) \to k_i(x),\ i = 1,2, \quad \text{слабо в } W_2^1(\Omega), \tag{11}$$

$$q^{(n)}(x) \to q(x) \quad \text{слабо в } L_2(\Omega). \tag{12}$$

Из компактности вложения $W_2^1(\Omega) \to L_{r_1}(\Omega)$ при любом $r_1 \in [2,\infty)$ [15, с. 84] и (11) следует, что

$$k_i^{(n)}(x) \to k_i(x),\ i = 1,2, \quad \text{сильно в } L_{r_1}(\Omega). \tag{13}$$

Кроме того, в силу однозначной разрешимости краевой задачи (1)–(3) каждому управлению $v^{(n)} \in V$ соответствует единственное решение $u^{(n)}(x) = u\big(x; v^{(n)}\big)$ задачи (1)–(3) и справедлива оценка

$$\|u^{(n)}\|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant M_4, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{14}$$

т. е. последовательность $\{u^{(n)}\}$ равномерно ограничена по норме пространства $W^2_{2,0}(\Omega)$. Тогда из компактности вложений $W^2_{2,0}(\Omega) \to W^1_{2,0}(\Omega)$, $W^2_{2,0}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ [15, с. 84] следует, что из последовательности $\{u^{(n)}\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u^{(n_m)}\}$ такую, что

$$u^{(n_m)}(x) \to u(x) \quad \text{слабо в } W^2_{2,0}(\Omega), \quad \text{сильно в } W^1_{2,0}(\Omega) \text{ и } C(\overline{\Omega}), \tag{15}$$

где $u = u(x)$ — некоторый элемент из $W^2_{2,0}(\Omega)$.

Покажем, что $u(x) = u(x; v)$ является решением задачи (1)–(3), соответствующим управлению $v \in V$. Ясно, что справедливы тождества

$$\int_\Omega \Big[\sum_{i=1}^{2} k_i^{(n_m)}(x) u_{x_i}^{(n)} \eta_{x_i} + q^{(nm)}(x) u^{(nm)} \eta\Big] dx = \\ = \int_\Omega f(x)\eta dx + \int_{\Gamma_{-1}} g(s)\eta ds, \quad \forall \eta = \eta(x) \in W^1_{2,0}(\Omega). \tag{16}$$

Используя соотношения (13), (15), ограничения $0 < \nu_i \leqslant k_i(x) \leqslant \mu_i$, $i = 1, 2$, п. в. на Ω, неравенство (1.8) из [17, с. 67] и оценки (10), имеем

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} k_i^{(n_m)}(x) u_{x_i}^{(n_m)} \eta_{x_i} dx - \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} k_i(x) u_{x_i} \eta_{x_i} dx\right| \leqslant \\ \leqslant \left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} k_i^{(n_m)}(x)\big(u_{x_i}^{(n_m)} - u_{x_i}\big)\eta_{x_i} dx\right| + \left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \big(k_i^{(n_m)}(x) - k_i(x)\big) u_{x_i} \eta_{x_i} dx\right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^{2} \mu_i \big\|u_{x_i}^{(n_m)} - u_{x_i}\big\|_{2,\Omega} \big\|\eta_{x_i}\big\|_{2,\Omega} + \\ + \sum_{i=1}^{2} \big\|k_{x_i}^{(n_m)} - k_i\big\|_{3,\Omega} \big\|u_{x_i}\big\|_{6,\Omega} \big\|\eta_{x_i}\big\|_{2,\Omega} \to 0. \tag{17}$$

Кроме этого, используя соотношения (12), (15), ограничение $0 \leqslant q_0 \leqslant q^{(n)}(x) \leqslant$ $\leqslant q_1$ п. в. на Ω и неравенство Коши—Буняковского, получаем

$$\left|\int_\Omega q^{(n_m)}(x) u^{(n_m)} \eta dx - \int_\Omega q(x) u \eta dx\right| \leqslant \\ \leqslant \left|\int_\Omega q^{(n_m)}(x)\big(u^{(n_m)} - u\big)\eta dx\right| + \left|\int_\Omega \big[q^{(n_m)}(x) - q(x)\big] u \eta dx\right| \leqslant \\ \leqslant q_1 \big\|u^{(n_m)} - u\big\|_{2,\Omega} \|\eta\|_{2,\Omega} + \left|\int_\Omega \big(q^{(n_m)} - q\big) u \eta dx\right| \to 0. \tag{18}$$

Тогда, переходя к пределу при $n \to \infty$ в (16) и учитывая соотношения (17), (18), получаем, что $u(x)$ удовлетворяет тождеству (7), т. е. является обобщенным решением из $W^1_{2,0}(\Omega)$ задачи (1)–(3), соответствующим управлению $v \in V$. Отсюда и из включения $u(x) \in W^2_{2,0}(\Omega)$ следует, что $u(x) = u(x; v)$.

Используя единственность решения задачи (1)–(3), соответствующего управлению $v \in V$, можно показать, что соотношение (15) справедливо не только для подпоследовательности $\{u^{(n_m)}\}$, но и для всей последовательности $\{u^{(n)}\}$, т. е. $u^{(n)}(x) = u(x; v^{(n)}) \to u(x) = u(x; v)$ слабо в $W_{2,0}^2(\Omega)$, сильно в $W_{2,0}^1(\Omega)$ и $C(\overline{\Omega})$.

Теперь покажем, что $J(v^{(n)}) \to J(v)$ при $n \to \infty$. Используя равенство (6), нетрудно убедиться в том, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\big|J(v^{(n)}) - J(v)\big| &\leqslant \\ &\leqslant \alpha_1\big(\|u^{(n)}\|_{2,\Omega} + \|u\|_{2,\Omega} + 2\|u_1\|_{2,\Omega}\big)\|u^{(n)} - u\|_{2,\Omega} + \\ &\quad + \alpha_2\big(\|u^{(n)}\|_{2,\Gamma_{-1}} + \|u\|_{2,\Gamma_{-1}} + 2\|u_2\|_{2,\Gamma_1}\big)\|u^{(n)} - u\|_{2,\Gamma_{-1}}.\end{aligned}$$

Тогда, используя оценки (8), (10), неравенство (14) и соотношение (15), для последовательности $\{u^{(n)}\}$ получаем, что $J(v^{(n)}) \to J(v)$ при $n \to \infty$, т. е. функционал $J(v)$ слабо в H непрерывен на V. Кроме этого, множество V ограничено, замкнуто и выпукло в гильбертовом пространство H и поэтому оно слабо компактно в H [18, с. 51]. Тогда, применяя результат из [18, с. 49], заключаем, что справедливы утверждения теоремы 1. □

Замечание 1. Из теоремы 1 следует существование решения задачи (1)–(6). Однако, как показывает следующий пример, решение задачи (1)–(6) может быть не единственным.

Пример 1. Пусть в задаче (1)–(6) $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $d_j^{(i)} = 2$ $(i, j = 1, 2)$, $q_0 = 1$, $q_1 = 3\pi^2$, $l_1 = l_2 = 1$, $u_0(s) \equiv u_0(s_2) = 0$,

$$f(x) = -4\pi^2 \sin \pi x_1 \sin \pi x_2, \quad g(s) \equiv g(s_2) = \pi \sin \pi s_2.$$

Тогда нетрудно проверить, что минимальное значение функционала $J(v)$ достигается на двух допустимых управлениях:

$$v_*^{(1)}(x) = \big(k_{1*}^{(1)}(x) = 1, k_{2*}^{(1)}(x) = 2, q_*^{(1)}(x) = 2\pi^2\big),$$

$$v_*^{(2)}(x) = \big(k_{1*}^{(2)}(x) = 1, k_{2*}^{(2)}(x) = 2, q_*^{(2)}(x) = \pi^2\big)$$

и $J(v_*^{(1)}) = J(v_*^{(2)}) \equiv J_* = 0$, $u(x; v_*^{(1)}) = u(x; v_*^{(2)}) = -\sin \pi x_1 \sin \pi x_2$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, т. е. решение задачи (1)–(6) не единственно.

Замечание 2. Из теоремы 1 следует, что задача (1)–(6) корректно поставлена в слабой топологии пространства H. Однако, вообще говоря, это задача некорректна в метрике пространства H, т. е. могут существовать минимизирующие последовательности функционала $J(v)$, не сходящиеся к множеству V_* по норме пространства H. Следующий пример показывает, что минимизирующая последовательность функционала $J(v)$ может не иметь предела в пространстве H.

Пример 2. Рассмотрим задачу оптимального управления из примера 1. Тогда $v_*(x) = \big(k_{1*}(x) = 1, k_{2*}(x) = 1, q_*(x) = 2\pi^2\big) \in V$ — оптимальное управление и $u(x; v_*) = -\sin\pi x_1 \sin\pi x_2$, $x \in \Omega$, $J_* = J(v_*) = 0$. Возьмем последовательность управлений

$$v^{(m)}(x) = \big(k_1^{(m)}(x) = 1, k_1^{(m)}(x) = 1, q^{(m)}(x) = 2\pi^2 + \sin\pi m x_1\big) \in V,$$

$m = 1, 2, \ldots$, $x \in \Omega$. Тогда $v^{(m)}(x) \to v_*(x)$ слабо в H и поэтому из соотношения (6) следует, что $J(v^{(m)}) \to J\big(v_*\big) = J_* = 0$, т. е. последовательность $\{v^{(m)}\}$ является минимизирующей для функционала $J(v)$. Однако это последовательность не имеет предела в H, так как $\big\{\sin\pi m x_1\big\}$ сильно не сходится в $L_2(\Omega)$.

3. Дифференцируемость функционала цели и необходимое условие оптимальности. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для определения функции $\psi(x) = \psi(x; v)$ из условий

$$-\sum_{i=1}^{2}\big(k_i(x)\psi_{x_i}\big)_{x_i} + q(x)\psi = -2\alpha_1\big[u(x, v) - u_1(x)\big], \quad x \in \Omega, \tag{19}$$

$$-k_1(s)\psi_{x_1}(s) = 2\alpha_2\big[u(s; v) - u_2(s)\big], \quad s \in \Gamma_{-1}, \tag{20}$$

$$\psi(s) = 0, \quad s \in \Gamma\backslash\Gamma_{-1}. \tag{21}$$

Под решением краевой задачи (19)–(21), соответствующим управлению $v \in V$, будем понимать обобщенное решение из $W_{2,0}^1(\Omega)$, т. е. функцию $\psi(x) = \psi(x; v) \in W_{2,0}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{2} k_i(x)\psi_{x_i}\eta_{x_i} + q\psi\eta\right)dx = -2\alpha_1\int_\Omega (u - u_1)\eta dx - 2\alpha_2\int_{\Gamma_{-1}} (u - u_2)\eta ds \tag{22}$$

для всех $\eta = \eta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega)$.

Используя результаты из [15, с. 112–116], [16, с. 40–46], можно показать, что при каждом заданном $v \in V$ существует единственное обобщенное решение $\psi(x) = \psi(x; v) \in W_{2,0}^1(\Omega)$ задачи (19)–(21) и справедлива оценка

$$\|\psi\|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant M_5\big[\alpha_1\|u - u_1\|_{2,\Omega} + \alpha_2\|u - u_2\|_{2,\Gamma_{-1}}\big].$$

Более того, обобщенное решение из $W_{2,0}^1(\Omega)$ краевой задачи (19)–(21) принадлежит также пространству $W_{2,0}^2(\Omega)$ и верна оценка [15, с. 125–134]

$$\|\psi\|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant M_6\big[\alpha_1\|u - u_1\|_{2,\Omega} + \alpha_2\|u - u_2\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)}\big].$$

Тогда, используя ограниченность вложений $W_{2,0}^2(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$, $W_2^1(\Omega) \to L_{r_1}(\Omega)$ $\big(r_1 \in [2, \infty)\big)$ [15, с. 84] и оценки (9), получаем

$$\|\psi\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\psi_x\|_{r_1,\Omega} + \|\psi_{xx}\|_{2,\Omega} \leqslant \\ \leqslant M_7\big[\|f\|_{2,\Omega} + \alpha_1\|u_1\|_{2,\Omega} + \alpha_2\|u_2\|^{(1)}_{2,\Gamma_{-1}} + \|g\|^{(1)}_{2,\Gamma_{-1}}\big]. \quad (23)$$

Для каждого фиксированного $i = 1, 2$ поставим следующую краевую задачу для определения функции $\omega_i(x) = \omega_i(x; v)$ из условий:

$$-\sum_{j=1}^{2} \omega_{ix_ix_j} + \omega_i = u_{x_i}\psi_{x_i}, \quad x \in \Omega, \quad (24)$$

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad i = 1, 2, \quad (25)$$

где ν — внешняя нормаль к Γ.

Под решением краевой задачи (24), (25) при фиксированном $i = 1, 2$ и при заданном $v \in V$ будем понимать функцию $\omega_i(x) = \omega_i(x; v)$ из $W^1_{2,0}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^{2} \omega_{ix_j}\eta_{x_i} + \omega_i\eta\Big)dx = \int_\Omega u_{x_i}\psi_{x_i}\eta dx, \quad i = 1, 2. \quad (26)$$

Из включений $u_{x_i}\psi_{x_i} \in L_4(\Omega)$ следует, что u_{x_i}, $\psi_{x_i} \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2$. Поэтому из результатов монографии [15, с. 200–202] следует, что краевая задача (24), (25) однозначно разрешима в $W^1_2(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|\omega_i\|^{(1)}_{2,\Omega} \leqslant M_8\|u_{x_i}\psi_{x_i}\|_{6/5,\Omega}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда, используя оценки (8), (23), имеем

$$\|\omega_i\|^{(1)}_{2,\Omega} \leqslant M_9\big(\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}}\big)\times \\ \times\big(\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}} + \alpha_1\|u_1\|_{2,\Omega} + \alpha_2\|u_2\|_{2,\Gamma_{-1}}\big), \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

Дифференцируемость функционала (6) следует из теоремы 2.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия задачи (1)–(6). Тогда функционал (6) непрерывно дифференцируем по Фреше на V и его градиент в произвольной точке $v \in V$ определяется равенством*

$$J'(v) = \big(\omega_1(x; v), \omega_2(x; v), u(x; v)\psi(x; v)\big). \quad (28)$$

Доказательство. Пусть v, $v + \Delta v \in V$ — произвольные управления, $\Delta v = (\Delta k_1, \Delta k_2, \Delta q)$ и $\Delta u = \Delta u(x) = u(x; v+\Delta v) - u(x; v)$. Из условий (1)–(3) следует, что Δu является решением из $W^2_{2,0}(\Omega)$ краевой задачи

$$-\sum_{i=1}^{2}\big((k_i + \Delta k_i)\Delta u_{x_i}\big)_{x_i} + (q + \Delta q)\Delta u = \sum_{i=1}^{2}(\Delta k_i u_{x_i})_{x_i} - \Delta q u, \ x \in \Omega, \quad (29)$$

$$-\big(k_1 + \Delta k_1\big)\Delta u_{x_1} = \Delta k_1 u_{x_1}, \quad s \in \Gamma_{-1}, \quad (30)$$

$$\Delta u(s) = 0, \quad s \in \Gamma \backslash \Gamma_{-1}. \tag{31}$$

Можно показать, что при сделанных предположениях для функции Δu справедлива оценка [17, с. 200]

$$\|\Delta u\|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant M_{10} \left[\sum_{i=1}^{2} \|\Delta k_i u_{x_i}\|_{2,\Omega} + \|\Delta q u\|_{6/5,\Omega} \right]. \tag{32}$$

Используя неравенство (1.8) из [17, с. 67], ограниченность вложения $W_2^1(\Omega) \to L_4(\Omega)$ и оценки (10), получаем следующие неравенства:

$$\sum_{i=1}^{2} \|\Delta k_i u_{x_i}\|_{2,\Omega} \leqslant \sum_{i=1}^{2} \|\Delta k_i\|_{4,\Omega} \|u_{x_i}\|_{4,\Omega} \leqslant M_{11} \sum_{i=1}^{2} \|\Delta k_i\|_{2,\Omega}^{(1)},$$
$$\|\Delta q u\|_{6/5,\Omega} \leqslant \|\Delta q\|_{2,\Omega} \|u\|_{3,\Omega} \leqslant M_{12} \|\Delta q\|_{2,\Omega}.$$

Учитывая эти неравенства в (32), получаем

$$\|\Delta u\|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant M_{13} \|\Delta v\|_H. \tag{33}$$

Приращение функционала (6) имеет вид

$$\Delta J(v) = J(v + \Delta v) - J(v) = 2\alpha_1 \int_{\Omega} \big[u(x; v) - u_1(x)\big] \Delta u(x) dx +$$
$$+ 2\alpha_2 \int_{\Gamma_{-1}} \big[u(s; v) - u_2(s)\big] \Delta u(s) ds + \alpha_1 \|\Delta u\|_{2,\Omega}^2 + \alpha_2 \|\Delta u\|_{2,\Gamma_{-1}}^2. \tag{34}$$

С помощью решений краевых задач (19)–(21) и (29)–(31) преобразуем приращения (34). Для решения краевой задачи (29)–(31) справедливо равенство

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{2} (k_i + \Delta k_i) \Delta u_{x_i} \psi_{x_i} + (q + \Delta q) \Delta u \psi \right] dx =$$
$$= - \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{2} \Delta k_i u_{x_i} \psi_{x_i} + \Delta q u \psi \right] dx. \tag{35}$$

Если в тождестве (22) положить $\eta = \Delta u$ и полученное равенство вычесть из (35), то получим

$$2\alpha_1 \int_{\Omega} (u - z_1) \Delta u dx + 2\alpha_2 \int_{\Gamma_{-1}} (u - z_2) \Delta u ds =$$
$$= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{2} u_{x_i} \psi_{x_i} \Delta k_i + u \psi \Delta q \right) dx + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{2} \Delta u_{x_i} \psi_{x_i} \Delta k_i + \Delta u \psi \Delta q \right) dx.$$

Учитывая это равенство в (34), имеем

$$\Delta J(v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{2} u_{x_i}\psi_{x_i}\Delta k_i + u\psi\Delta q \Big) dx + R, \tag{36}$$

где

$$R = \alpha_1 \|\Delta u\|^2_{2,\Omega} + \alpha_2 \|\Delta u\|^2_{2,\Gamma_{-1}} + \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{2} \Delta u_{x_i}\psi_{x_i}\Delta k_i + \Delta u\psi\Delta q \Big) dx. \tag{37}$$

Полагая в тождестве (26) $\eta = \Delta k_i$, получаем равенство

$$\int_\Omega \Big(\omega_i \Delta k_i + \sum_{j=1}^{2} \omega_{ix_j}\Delta k_{ix_j} \Big) dx = \int_\Omega u_{x_i}\psi_{x_i}\Delta k_i dx, \quad i = 1, 2,$$

учитывая которое в (36), получаем

$$\Delta J(v) = \int_\Omega \Big[\sum_{i=1}^{2} \Big(\omega_i \Delta k_i + \sum_{j=1}^{2} \omega_{ix_j}\Delta k_{ix_j} \Big) + u\psi\Delta q \Big] dx + R. \tag{38}$$

Используя теорему вложения [15, с. 84], нетрудно показать, что интегральные слагаемое в правой части (38) при заданном $v \in V$ определяет линейный ограниченный функционал от $\Delta v \in H$.

Проведем оценку (37). Используя ограниченность вложения $W_2^1(\Omega) \to L_4(\Omega)$ [15, с. 84], неравенство (1.8) из [17, с. 67] и оценки (23), (33), имеем

$$\Big| \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{2} \Delta u_{x_i}\psi_{x_i\Delta k_i} + \Delta u\psi\Delta q \Big) dx \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \|\Delta u_{x_i}\|_{4,\Omega} \|\psi_{x_i}\|_{2,\Omega} \|\Delta k_i\|_{4,\Omega} +$$
$$+ \|\Delta u\|_{4,\Omega} \|\psi\|_{4,\Omega} \|\Delta q\|_{2,\Omega} \leqslant M_{14} \|\Delta v\|^2_H. \tag{39}$$

Учитывая в (37) оценки (33) и (39), получаем оценку

$$|R| \leqslant M_{15} \|\Delta v\|^2_H.$$

Тогда, используя эту оценку в (36), заключаем, что функционал (6) дифференцируем по Фреше на V и его градиент определяется равенством (28).

Используя оценки (10), (23) и (27), можно показать, что отображение $J'(v) : V \to H$ непрерывно. Теорема 2 доказана. □

Следствие. Оптимальное управление $v_* = (k_*, q_*) \in V$ для задачи (1)–(6) устанавливается следующим условием:

$$\max_{v \in V} \int_\Omega H\big(u_*(x), k, q, \psi_*(x), \omega_*(x)\big) dx = \int_\Omega H\big(u_*(x), k_*, q_*, \psi_*(x), \omega_*(x)\big) dx,$$

где

$$H(u,k,q,\psi,\omega) = \left[\sum_{i=1}^{2}\left(\omega_i k_i + \sum_{j=1}^{2}\omega_{ix_j}k_{ix_j}\right) + u\psi q\right]$$

— функция Гамильтона—Понтрягина задачи (1)–(6); $u_* = u_*(x) = u(x; v_*)$, $\psi_* = \psi_*(x) = \psi(x; v_*)$, $\omega_{i*} = \omega_{i*}(x) = \omega_i(x; v_*)$, $i = 1, 2$ — решения задач (1)–(3); (19)–(21) и (24), (25) при $v = v_*$ соответственно.

Замечание. Полученные выше результаты могут быть обобщены для произвольной ограниченной области с гладкой границей и интегральной составляющей критерия по произвольной части границы.

Конкурирующие интересы. Мы не имеем конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Лурье К. А. *Оптимальное управления в задачах математической физики.* М.: Наука, 1975. 480 с.
2. Литвинов В. Г. *Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике.* М.: Наука, 1987. 368 с.
3. Марчук Г. И. *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.* М.: Наука, 1982. 320 с.
4. Lions J.-L. *Optimal control of systems governed by partial differential equations* / Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. vol. 170. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1971. xi+396 pp. doi: 10.1007/978-3-642-65024-6.
5. Murat F. Contre-exemples pour divers problèms où le contrôle intervient dans les coefficients // *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1977. vol. 112. pp. 49–68.
6. Tagiev R. K., Kasymova R. S. On an optimal problem for the coefficients of an elliptic equation a quality criterion of the boundary of domain // *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, 2015. vol. 35, no. 1. pp. 157–163, http://trans.imm.az/volumes/35-1/35-01-23.pdf.
7. Zolezzi T. Necessary conditions for optimal control of elliptic or parabolic problems // *SIAM J. Control*, 1972. vol. 10, no. 4. pp. 594–607. doi: 10.1137/0310044.
8. Мадатов М. Д. О задачах с управлениями в коэффициентах эллиптических уравнений // *Матем. заметки*, 1983. Т. 34, № 6. С. 873–882.
9. Райтум У. Е. *Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. Математические вопросы.* Рига: Зинатне, 1989. 277 с.
10. Tagiyev R. K. Optimal control problems for elliptic equation with controls in coefficients // *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, 2003. vol. 23, no. 4. pp. 251–260.
11. Casado D., Couce C., Martin G. Optimality conditions for nonconvex multistate control problems in the coefficients // *SIAM J. Control Optim.*, 2004. vol. 43, no. 1. pp. 216–239. doi: 10.1137/S0363012902411714.
12. Тагиев Р. К. Оптимальное управление коэффициентами квазилинейного эллиптического уравнения // *Автомат. и телемех.*, 2010. № 9. С. 19–32.
13. Тагиев Р. К. Об оптимальном управлении коэффициентами эллиптического уравнения // *Дифференц. уравнения*, 2011. Т. 47, № 6. С. 871–879.

14. Iskenderov A. D., Tagiyev R. K. Optimal control problem with controls in coefficients of quasilinear elliptic equation // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2013. vol. 1, no. 2. pp. 21–39.
15. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973. 408 с.
16. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями.* М.: Высш. шк., 1987. 296 с.
17. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973. 736 с.
18. Васильев Ф. П. *Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация.* М.: Наука, 1981. 400 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 278–291
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1507

MSC: 49K20, 35J25

On the problem of optimal control in the coefficients of an elliptic equation

R. K. Tagiev, R. S. Kasimova

Baku State University,
23, Z. Khalilov st., Baku, AZ-1148, Azerbaijan.

Abstract

In this paper we consider the optimal control problem for linear elliptic equations of the second order. Control functions are included in the coefficients of the equation for the state, including the coefficients of the highest derivatives. Space management is a product of Lebesgue and Sobolev spaces. The functional purpose is the sum of the integrals over the region and part of its border. The problems of correct statement of the problem in the weak topology of the space of controls are studied. It is proved that a set of optimal control problems is not empty, it is weakly compact and every minimizing sequence of the functional goals converges weakly in the space of controls to the set of optimal controls. The examples show that the solution of the problem can be not unique and minimizing sequence for the functional purpose can not have a limit in the strong topology of space management. Differentiability of proved Frechet functional is proved and the expression for its gradient is found. A necessary condition for optimality in the form of variational inequalities.

Keywords: optimal control, elliptic equation, correctness of the problem, optimality condition.

Received: 26th August, 2016 / Revised: 14th May, 2017 / Accepted: 12th June, 2017 / First online: 6th July, 2017

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Research Article

Please cite this article in press as:
Tagiev R. K., Kasimova R. S. On the problem of optimal control in the coefficients of an elliptic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 278–291. doi: 10.14498/vsgtu1507 (In Russian).

Authors' Details:
Rafig K. Tagiev http://orcid.org/0000-0002-4185-4219
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of the Dept.; Dept. of Optimization and Control; e-mail: r.tagiyev@list.ru

Rena S. Kasimova http://orcid.org/0000-0002-4753-7185
Teacher; Dept. of Optimization and Control; e-mail: rena.kasimova@list.ru

Funding. The research has not had any sponsorship.

References

1. Lur'e K. A. *Optimal'noe upravleniia v zadachakh matematicheskoi fiziki* [Optimal Control in the Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1975, 480 pp. (In Russian)
2. Litvinov V. G. *Optimizatsiia v ellipticheskikh granichnykh zadachakh s prilozheniiami k mekhanike* [Optimization of elliptic boundary value problems with applications to mechanics]. Moscow, Nauka, 1987, 368 pp. (In Russian)
3. Marchuk G. I. *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhaiushchei sredy* [Mathematical modelling in the problem of environment]. Moscow, Nauka, 1982, 320 pp. (In Russian)
4. Lions J.-L. *Optimal control of systems governed by partial differential equations*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 170. Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1971, xi+396 pp. doi: 10.1007/978-3-642-65024-6.
5. Murat F. Contre-exemples pour divers problèms où le contrôle intervient dans les coefficients, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1977, vol. 112, pp. 49–68.
6. Tagiev R. K., Kasymova R. S. On an optimal problem for the coefficients of an elliptic equation a quality criterion of the boundary of domain, *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, 2015, vol. 35, no. 1, pp. 157–163, http://trans.imm.az/volumes/35-1/35-01-23.pdf.
7. Zolezzi T. Necessary conditions for optimal control of elliptic or parabolic problems, *SIAM J. Control*, 1972, vol. 10, no. 4, pp. 594–607. doi: 10.1137/0310044.
8. Madatov M. D. Problems with control in the coefficients of elliptic equations, *Math. Notes*, 1983, vol. 34, no. 6, pp. 932–937. doi: 10.1007/BF01157410.
9. Raitums U. E. *Zadachi optimal'nogo upravleniia dlia ellipticheskikh uravnenii. Matematicheskie voprosy* [Problems of optimal control for elliptic equations. Mathematical questions]. Riga, Zinatne, 1989, 277 pp. (In Russian)
10. Tagiyev R. K. Optimal control problems for elliptic equation with controls in coefficients, *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, 2003, vol. 23, no. 4, pp. 251–260.
11. Casado D., Couce C., Martin G. Optimality conditions for nonconvex multistate control problems in the coefficients, *SIAM J. Control Optim.*, 2004, vol. 43, no. 1, pp. 216–239. doi: 10.1137/S0363012902411714.
12. Tagiev R. K. Optimal control of the coefficients of quasilinear elliptic equation, *Autom. Remote Control*, 2010, vol. 71, no. 9, pp. 1757–1769. doi: 10.1134/S000511791009002X.
13. Tagiev R. K. On optimal control by coefficients in an elliptic equation, *Differ. Equ.*, 2011, vol. 47, no. 6, pp. 877–886. doi: 10.1134/S0012266111060139.
14. Iskenderov A. D., Tagiyev R. K. Optimal control problem with controls in coefficients of quasilinear elliptic equation, *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2013, vol. 1, no. 2, pp. 21–39.
15. Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary-value problems of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1973, 408 pp. (In Russian)
16. Samarskii A. A., Lazarov R. D., Makarov V. L. *Raznostnye skhemy dlia differentsial'nykh uravnenii s obobshchennymi resheniiami* [Difference schemes for partial differential equations with generalized solutions]. Moscow, Vyssh. shk., 1987, 296 pp. (In Russian)
17. Ladyzhenskaia O. A., Ural'tseva N. N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellipticheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. Moscow, Nauka, 1973, 736 pp. (In Russian)
18. Vasil'ev F. P. *Metody resheniia ekstremal'nykh zadach. Zadachi minimizatsii v funktsional'nykh prostranstvakh, reguliarizatsiia, approksimatsiia* [Methods for solving extremal problems. Minimization problems in function spaces, regularization, approximation]. Moscow, Nauka, 1981, 400 pp. (In Russian)