



# Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 517.958:539.3(6)

## Применение метода возмущений при определении напряженно-деформированного состояния двухслойного слабоанизотропного стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении

А. В. Ковалев, И. Э. Свиридов, Ю. Д. Щеглова

Воронежский государственный университет,  
Россия, 394006, Воронеж, Университетская пл., 1.

### Аннотация

Рассматривается задача упругопластического кручения двухслойного слабоанизотропного стержня некругового поперечного сечения. Поперечное сечение представляет собой двухсвязную область. Стержень ориентирован в цилиндрической системе координат так, что ось  $Z$  направлена по оси стержня. Влияние массовых сил не учитывается. Стержень закручивается вокруг оси  $Z$  равными и противоположными парами сил. Предполагается, что боковая поверхность стержня свободна от нагрузок. Значение момента имеет такую величину, при которой в некоторых частях поперечного сечения материал переходит в пластическое состояние и образуются пластические зоны. Распространение пластического течения происходит от внешнего контура внутрь сечения. Предполагается, что значение момента такое, что пластическая область целиком охватывает внешний контур поперечного сечения и существует упругопластическая граница, которая расположена между внутренним контуром и границей раздела слоев. Предполагается, что внешний и внутренний слои обладают свойствами анизотропии, частными случаями которых

### Статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Применение метода возмущений при определении напряженно-деформированного состояния двухслойного слабоанизотропного стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 2. С. 292–307. doi: [10.14498/vsgtu1541](https://doi.org/10.14498/vsgtu1541).

### Сведения об авторах

*Алексей Викторович Ковалев* <http://orcid.org/0000-0002-3730-9621>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. механики и компьютерного моделирования; e-mail: [kav-mail@mail.ru](mailto:kav-mail@mail.ru)

*Илья Эдуардович Свиридов* <http://orcid.org/0000-0002-7401-7150>

аспирант; каф. механики и компьютерного моделирования; e-mail: [synett@gmail.com](mailto:synett@gmail.com)

*Юлия Дмитриевна Щеглова* <http://orcid.org/0000-0002-4295-5409>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. механики и компьютерного моделирования; e-mail: [scheglova@gmail.com](mailto:scheglova@gmail.com)

являются анизотропия согласно Хиллу и трансляционная анизотропия. Каждый из слоев имеет свои параметры анизотропии. С помощью метода малого параметра определены напряженно-деформированное состояние и упругопластическая граница в первом приближении.

**Ключевые слова:** деформации, напряжения, некруговой контур, упругопластическое кручение, анизотропия по Хиллу, трансляционная анизотропия, двухслойный стержень.

Получение: 12 апреля 2016 г. / Исправление: 19 мая 2017 г. /

Принятие: 12 июня 2017 г. / Публикация онлайн: 11 июля 2017 г.

С помощью метода малого параметра в работе [1] определено напряженно-деформированное состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов пластической анизотропии. В работе [2] в рамках метода возмущений определено напряженное состояние в цилиндрической трубе, подверженной действию внешнего и внутреннего давлений, с границами поперечного сечения, близким к круговым. При этом рассмотрен вопрос о существовании и единственности решения задачи на основе теоремы о неявных функциях. В работах [3, 4] представлены соотношения трансляционной идеальнопластической анизотропии по Хиллу при кручении. Работа [5] посвящена определению напряженного состояния двухслойного анизотропного кругового цилиндра при упругопластическом кручении. Исследованию напряженно-деформированного состояния стержня некругового поперечного сечения посвящена работа [6].

В данной работе методом малого параметра [7, 8] определено напряженно-деформированное состояние двухслойного анизотропного стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении с учетом того, что каждый из слоев обладает своими параметрами анизотропии [9, 10].

Рассматривается двухслойный цилиндрический стержень, находящийся под действием кручения [11], поперечное сечение которого ограничено контурами  $L_1$  и  $L_2$ . Границу раздела слоев обозначим через  $L_3$ , неизвестную упругопластическую границу —  $L_s$  (рис. 1).

Предположим, что внешний слой цилиндра (слой I,  $L_3 < \rho < L_1$ ) находится в пластическом состоянии, где условие пластичности общего вида задаётся соотношением

$$A_1(\tau_{xz} - k_1)^2 + B_1(\tau_{yz} - k_2)^2 = K_1^2, \quad (1)$$

$A_1, B_1, k_1, k_2$  — константы анизотропии,  $K_1$  — предел текучести. Внутренний слой (слой II,  $L_2 < \rho < L_3$ ) находится в упругопластическом состоянии. Условие пластичности для второго слоя примем в виде

$$A_2(\tau_{xz} - k_3)^2 + B_2(\tau_{yz} - k_4)^2 = K_2^2, \quad (2)$$

где  $A_2, B_2, k_3, k_4$  — константы анизотропии,  $K_2$  — предел текучести.

Далее перейдем к цилиндрической системе координат  $\rho, \theta, z$ , где ось  $z$  совпадает с осью стержня, и будем использовать безразмерные величины. Отнесем величины, имеющие размерность напряжений, к некоторой величине  $k_0$ , а величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу упругопластической границы в нулевом приближении  $\rho_0$ .

Учитывая формулы перехода компонент напряжений из декартовой в цилиндрическую систему координат

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \tau_{\rho z} \cos \theta - \tau_{\theta z} \sin \theta, \\ \tau_{yz} &= \tau_{\rho z} \sin \theta + \tau_{\theta z} \cos \theta,\end{aligned}$$

запишем условия пластичности (1), (2) следующим образом. Во внешней области I будем иметь

$$A_1(\tau_{\rho z} \cos \theta - \tau_{\theta z} \sin \theta - k_1)^2 + B_1(\tau_{\rho z} \sin \theta + \tau_{\theta z} \cos \theta - k_2)^2 = K_1^2, \quad (3)$$

а во внутренней области II получим

$$A_2(\tau_{\rho z} \cos \theta - \tau_{\theta z} \sin \theta - k_3)^2 + B_2(\tau_{\rho z} \sin \theta + \tau_{\theta z} \cos \theta - k_4)^2 = K_2^2. \quad (4)$$

Уравнение равновесия для задачи кручения имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0 \quad (5)$$

и выполняется в каждом слое и для каждого приближения.

В упругой области внутреннего слоя имеют место соотношения Коши

$$\varepsilon_{\rho z}^e = \frac{\omega}{2} \frac{\partial w^e}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z}^e = \frac{\omega}{2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w^e}{\partial \theta} + \rho \right), \quad (6)$$

связывающие компоненты тензора деформаций с функцией  $w^e$ , характеризующей депланацию поперечного сечения, где  $\omega$  — угол кручения на единицу длины.

Следующими соотношениями определяется закон Гука в упругой области внутреннего слоя II:

$$\tau_{\rho z}^e = 2G\varepsilon_{\rho z}^e, \quad \tau_{\theta z}^e = 2G\varepsilon_{\theta z}^e. \quad (7)$$

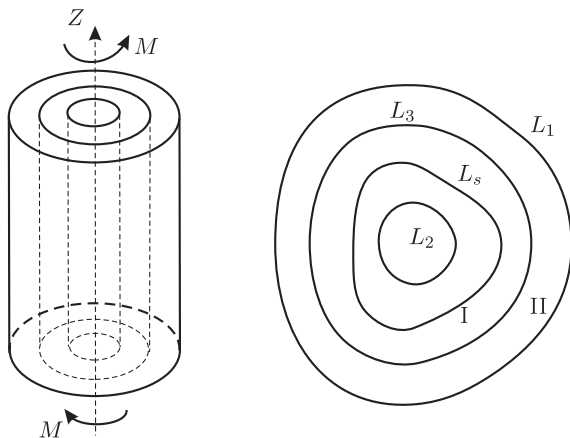


Рис. 1. Схема упругопластического кручения двухслойного стержня некругового поперечного сечения [Figure 1. The scheme of elastic-plastic torsion in a two-layer shaft of non-circular cross section]

Здесь  $G$  — модуль сдвига.

Во внутреннем слое II полная деформация в пластической области складывается из упругой и пластической составляющих:

$$\varepsilon_{\rho z} = \varepsilon_{\rho z}^e + \varepsilon_{\rho z}^p, \quad \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{\theta z}^e + \varepsilon_{\theta z}^p. \quad (8)$$

Здесь и далее символ « $p$ » подчеркивает принадлежность величин к пластической области, символ « $e$ » — к упругой области.

Учитывая условия пластичности (3), (4), ассоциированный закон пластического течения для первого и второго слоев соответственно примет вид

$$d\varepsilon_{\theta z I}^p = d\lambda \left( \tau_{\theta z I} (A_1 \cos^2 \theta + B_1 \sin^2 \theta) + \tau_{\rho z I} \frac{B_1 - A_1}{2} \sin 2\theta + A_1 k_1 \sin \theta - B_1 k_2 \cos \theta \right), \quad (9)$$

$$d\varepsilon_{\rho z I}^p = d\lambda \left( \tau_{\rho z I} (A_1 \cos^2 \theta + B_1 \sin^2 \theta) + \tau_{\theta z I} \frac{B_1 - A_1}{2} \sin 2\theta - A_1 k_1 \cos \theta - B_1 k_2 \sin \theta \right), \quad (10)$$

$$d\varepsilon_{\theta z II}^p = d\lambda \left( \tau_{\theta z II} (A_2 \cos^2 \theta + B_2 \sin^2 \theta) + \tau_{\rho z II} \frac{B_2 - A_2}{2} \sin 2\theta + A_2 k_3 \sin \theta - B_2 k_4 \cos \theta \right), \quad (11)$$

$$d\varepsilon_{\rho z II}^p = d\lambda \left( \tau_{\rho z II} (A_2 \cos^2 \theta + B_2 \sin^2 \theta) + \tau_{\theta z II} \frac{B_2 - A_2}{2} \sin 2\theta - A_2 k_3 \cos \theta - B_2 k_4 \sin \theta \right). \quad (12)$$

Здесь  $d\lambda$  — неизвестный скалярный множитель.

Закона Гука

$$\varepsilon_{\theta z}^e = \frac{\tau_{\theta z}^p}{2G}, \quad \varepsilon_{\rho z}^e = \frac{\tau_{\rho z}^p}{2G} \quad (13)$$

связывает упругие деформации с пластическими напряжениями в пластической области. Полные деформации связаны с перемещениями в пластической области соотношениями Коши

$$\varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2} \frac{\partial w^p}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w^p}{\partial \theta} + \omega \rho \right), \quad (14)$$

где  $w^p$  — депланация поперечного сечения в пластической области.

Так как боковые поверхности стержня свободны от нагрузки, на внешнем  $L_1$  и внутреннем  $L_2$  контурах поперечного сечения выполняются граничные условия в напряжениях

$$(\tau_{\rho z}^p n_{\rho 1} + \tau_{\theta z}^p n_{\theta 1})|_{L_1} = 0, \quad (\tau_{\rho z}^e n_{\rho 2} + \tau_{\theta z}^e n_{\theta 2})|_{L_2} = 0, \quad (15)$$

где  $n_{\theta i}$ ,  $n_{\rho i}$  — компоненты единичной нормали к контурам  $L_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Пусть  $\Phi_1(\rho, \theta) = 0$ ,  $\Phi_2(\rho, \theta) = 0$  — уравнения внешнего  $L_1$  и внутреннего  $L_2$  контуров поперечного сечения стержня соответственно. Тогда компоненты единичной нормали к контуру поперечного сечения стержня определяются формулами

$$\begin{aligned} n_{\theta i} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \left( \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1/2}, \\ n_{\rho i} &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \left( \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (16)$$

На упругопластической границе  $L_s$  (рис. 1), которая определяется в ходе решения, выполняются условия непрерывности напряжений и функции перемещения

$$[\tau_{\rho z}]|_{L_s} = [\tau_{\theta z}]|_{L_s} = [w]|_{L_s} = 0. \quad (17)$$

Здесь и далее квадратные скобки обозначают разность значений заключенных в скобки выражений соответствующих упругой и пластической областям. Также условия непрерывности напряжений и функции перемещения выполняются на границе раздела слоев

$$[\tau_{\rho z}]|_{L_3} = [\tau_{\theta z}]|_{L_3} = [w]|_{L_3} = 0. \quad (18)$$

В упругой области из уравнения равновесия (5), учитывая (6), (7), получим

$$\Delta w_{\text{II}}^e = 0, \quad (19)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$$

— оператор Лапласа,  $w_{\text{II}}^e$  — функция депланации в упругой области внутреннего слоя II.

Следуя [7], решение будем искать в виде разложения по малому безразмерному параметру  $\delta$  ( $\delta \ll 1$ ):

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \tau_{ij}^{(0)} + \delta \tau_{ij}^{(1)} + \delta^2 \tau_{ij}^{(2)} + \dots, \\ w &= w^{(0)} + \delta w^{(1)} + \delta^2 w^{(2)} + \dots, \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{(0)} + \delta \varepsilon_{ij}^{(1)} + \delta^2 \varepsilon_{ij}^{(2)} + \dots, \\ \rho_s &= \rho_1^{(0)} + \delta \rho_2^{(1)} + \delta^2 \rho_3^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Параметры анизотропии в областях I и II представим в виде [12]

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 + \delta a_1^{(1)}, & B_1 &= 1 + \delta b_1^{(1)}, & A_2 &= 1 + \delta a_2^{(1)}, & B_2 &= 1 + \delta b_2^{(1)}, \\ k_1 &= \delta k_1^{(1)}, & k_2 &= \delta k_2^{(1)}, & k_3 &= \delta k_3^{(1)}, & k_4 &= \delta k_4^{(1)}, \end{aligned} \quad (21)$$

от которого легко перейти к условию анизотропии по Хиллу (при обнулении  $k_i^{(1)}$ ) или к условию трансляционной анизотропии (при обнулении  $a_i^{(1)}$  и  $b_i^{(1)}$ ).

Уравнения контуров поперечного сечения и границы раздела слоев представим в виде

$$\begin{aligned}\Phi_1(\rho, \theta) &= \rho - (R_0 + \delta_1 R_1 + \delta_1^2 R_2 + \dots) = 0, \\ \Phi_2(\rho, \theta) &= \rho - (r_0 + \delta_2 r_1 + \delta_2^2 r_2 + \dots) = 0, \\ \Phi_3(\rho, \theta) &= \rho - (L_0 + \delta_3 L_1 + \delta_3^2 L_2 + \dots) = 0,\end{aligned}\quad (22)$$

где  $\delta_1 = d_1 \delta$ ,  $\delta_2 = d_2 \delta$ ,  $\delta_3 = d_3 \delta$  ( $-1 \leq d_i \leq 1$ ) — безразмерные параметры;  $R_0$ ,  $r_0$ ,  $L_0$  — константы;  $R_i = R_i(\theta)$ ,  $r_i = r_i(\theta)$ ,  $L_i = L_i(\theta)$  — функции координаты  $\theta$ ;  $i = 1, 2, 3$ .

Следуя методу малого параметра [7, 8], подставляя данные разложения (20)–(22) в соотношения (3)–(18) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\delta$ , получим системы уравнений для каждого приближения.

В исходном нулевом приближении имеет место задача упругопластического кручения изотропного двухслойного стержня с поперечным сечением в виде окружности в качестве внутреннего, внешнего контура и границы стыка слоев, радиусы которых равны соответственно  $r_0 = \alpha$ ,  $R_0 = \beta$ ,  $L_0 = \gamma$ . Решение такой задачи имеет вид

$$\tau_{\rho z I}^{(0)} = 0, \quad \tau_{\theta z I}^{(0)} = K_1, \quad \tau_{\rho z II}^{(0)} = 0, \quad \tau_{\theta z II}^{(0)} = K_2, \quad (23)$$

$$w_{II}^{e(0)} = 0, \quad \tau_{\rho z II}^{e(0)} = 0, \quad \tau_{\theta z II}^{e(0)} = G\omega\rho, \quad \rho_0 = 1. \quad (24)$$

Следуя [8], уравнения внешнего и внутреннего контуров примем в виде

$$\rho = \alpha(1 + \delta d_1 \cos m\theta), \quad \rho = \beta(1 + \delta d_2 \cos m\theta),$$

а уравнение границы раздела слоев представим как

$$\rho = \gamma(1 + \delta d_3 \cos m\theta).$$

Из условия пластичности (3) во внешнем слое в первом приближении с учетом известного решения первого приближения (23) получим компоненту  $\tau_{\theta z I}^{(1)}$  в форме

$$\tau_{\theta z I}^{p(1)} = k_2^{(1)} \cos \theta - k_1^{(1)} \sin \theta - \frac{K_1}{2} \left( a_1^{(1)} \sin^2 \theta + b_1^{(1)} \cos^2 \theta \right). \quad (25)$$

С учетом разложения (16), (20) и (22) граничное условие на внешнем контуре примет вид

$$\tau_{\rho z I}^{p(1)} \Big|_{\rho=R_0} = \frac{\dot{R}_1}{R_0} \tau_{\theta z I}^{p(0)} \Big|_{\rho=R_0} - R_1 \frac{\partial \tau_{\rho z I}^{p(0)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_0}. \quad (26)$$

Граничное условие на внешнем контуре (26) и уравнение равновесия (5) с учетом (23) составляют систему для определения компоненты  $\tau_{\rho z I}^{p(1)}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \tau_{\rho z I}^{p(1)}) = \frac{\partial \tau_{\theta z I}^{p(1)}}{\partial \theta}, \\ \tau_{\rho z I}^{p(1)} \Big|_{\rho=R_0} = -d_1 m \sin m\theta. \end{cases} \quad (27)$$

Решая систему (27) и учитывая, что компонента  $\tau_{\theta z I}^{p(1)}$  имеет вид (25), получим

$$\tau_{\rho z I}^{p(1)} = \left( k_2^{(1)} \sin \theta + k_1^{(1)} \cos \theta + \frac{K_1}{2} (a_1^{(1)} - b_1^{(1)}) \sin 2\theta \right) \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right) - \frac{\beta}{\rho} K_1 m d_1 \sin m\theta.$$

Подставляя (20) и (21) в условие пластичности (4), в первом приближении во внутреннем слое с учётом (24) для  $\tau_{\theta z II}^{p(1)}$  получим

$$\tau_{\theta z II}^{p(1)} = k_4^{(1)} \cos \theta - k_3^{(1)} \sin \theta - \frac{K_2}{2} (a_2^{(1)} \sin^2 \theta - b_2^{(1)} \cos^2 \theta). \quad (28)$$

На границе раздела слоев имеет место условие непрерывности компонент напряжений (18), которое с учетом (16), (20) и (22) в первом приближении дает

$$\begin{aligned} \left( \tau_{\rho z II}^{p(1)} + L_1 \frac{\partial \tau_{\rho z II}^{p(0)}}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=L_0} &= \left( \tau_{\rho z I}^{p(1)} + L_1 \frac{\partial \tau_{\rho z I}^{p(0)}}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=L_0}, \\ \left( \tau_{\theta z II}^{p(1)} + L_1 \frac{\partial \tau_{\theta z II}^{p(0)}}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=L_0} &= \left( \tau_{\theta z I}^{p(1)} + L_1 \frac{\partial \tau_{\theta z I}^{p(0)}}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=L_0}. \end{aligned} \quad (29)$$

Подставляя (28) в (5) и (24) в условие (29), получим систему, аналогичную (27), для определения компоненты напряжений  $\tau_{\rho z II}^{p(1)}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \tau_{\rho z II}^{p(1)}) = \frac{\partial \tau_{\theta z II}^{p(1)}}{\partial \theta}; \\ \tau_{\rho z I}^{p(1)} \Big|_{\rho=\gamma} = \left( k_2^{(1)} \sin \theta + k_1^{(1)} \cos \theta + \frac{K_1}{2} (a_1^{(1)} - b_1^{(1)}) \sin 2\theta \right) \left( 1 - \frac{\beta}{\gamma} \right) - \\ - \frac{\beta}{\gamma} K_1 m d_1 \sin m\theta. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z II}^{p(1)} &= \left( k_4^{(1)} \sin \theta + k_3^{(1)} \cos \theta + \frac{K_2}{2} (a_2^{(1)} - b_2^{(1)}) \sin 2\theta \right) \left( 1 - \frac{\gamma}{\rho} \right) + \\ &+ \left( k_2^{(1)} \sin \theta + k_1^{(1)} \cos \theta + \frac{K_1}{2} (a_1^{(1)} - b_1^{(1)}) \sin 2\theta \right) \frac{\gamma - \beta}{\rho} - \\ &- \frac{\beta}{\rho} K_1 m d_1 \sin m\theta. \end{aligned} \quad (30)$$

В упругой области внутреннего слоя компоненты напряжений из соотношений закона Гука (7) и соотношений Коши (6) в первом приближении представимы в виде

$$\tau_{\rho z II}^{e(1)} = G\omega \frac{\partial w_{II}^{e(1)}}{\partial \rho}, \quad \tau_{\theta z II}^{e(1)} = G\omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_{II}^{e(1)}}{\partial \theta}. \quad (31)$$

На внутреннем контуре выполняется граничное условие (15), которое с учетом (16), (20) и (22) примет форму

$$\tau_{\rho z \text{II}}^{e(1)} \Big|_{\rho=r_0} = \left( \dot{r}_1 \tau_{\theta z \text{II}}^{e(0)} - r_1 \frac{\partial \tau_{\rho z \text{II}}^{e(0)}}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=r_0}. \quad (32)$$

На упругопластической границе имеют место условия непрерывности (17) компонент напряжений, которые при подстановке в них (16), (20) и (22) в первом приближении дают соотношения

$$\left( \tau_{\rho z \text{II}}^{p(1)} + \rho_1 \frac{\partial \tau_{\rho z \text{II}}^{p(0)}}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=\rho_0} = \left( \tau_{\rho z \text{II}}^{e(1)} + \rho_1 \frac{\partial \tau_{\rho z \text{II}}^{e(0)}}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=\rho_0}, \quad (33)$$

$$\left( \tau_{\theta z \text{II}}^{p(1)} + \rho_1 \frac{\partial \tau_{\theta z \text{II}}^{p(0)}}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=\rho_0} = \left( \tau_{\theta z \text{II}}^{e(1)} + \rho_1 \frac{\partial \tau_{\theta z \text{II}}^{e(0)}}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=\rho_0}. \quad (34)$$

Объединение (19) с учетом (31), (32) и (33) соответствует задаче Неймана для функции депланации в упругой области слоя II:

$$\begin{cases} \Delta w_{\text{II}}^{e(1)} = 0, & \alpha < \rho < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\ \frac{\partial w_{\text{II}}^{e(1)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = \frac{1}{G\omega} \tau_{\rho z \text{II}}^{p(1)} \Big|_{\rho=1}, \\ \frac{\partial w_{\text{II}}^{e(1)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\alpha} = -md_2\alpha \sin m\theta. \end{cases} \quad (35)$$

Подставляя найденную компоненту  $\tau_{\rho z \text{II}}^{p(1)}$  из (30) и решая систему (35), получим

$$\begin{aligned} w_{\text{II}}^{e(1)} = & - \frac{(\rho^2 + a^2)(k_2^{(1)}(1 - \gamma) + k_1^{(1)}(\gamma - \beta))}{G\omega\rho(\alpha^2 - 1)} \cos \theta - \\ & - \frac{(\rho^2 + \alpha^2)(k_4^{(1)}(1 - \gamma) + k_3^{(1)}(\gamma - \beta))}{G\omega\rho(\alpha^2 - 1)} \sin \theta - \\ & - \frac{1}{4} \frac{(\rho^4 + \alpha^4)(K_2(1 - \gamma)(a_2^{(1)} - b_2^{(1)}) + K_1(\gamma - \beta)(a_1^{(1)} - b_1^{(1)}))}{G\omega\rho^2(\alpha^2 - 1)} \sin 2\theta - \\ & - \frac{G\omega\alpha(\rho^{2m} + 1) - \alpha^{m-1}\beta K_1(\rho^{2m}\alpha^{-2m} + 1)}{G\omega\alpha^{m-1}\rho^m(1 - \alpha^{-2m})} \sin m\theta. \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z \text{II}}^{e(1)} = & - \frac{(\rho^2 - a^2)(k_3^{(1)}(1 - \gamma) + k_1^{(1)}(\gamma - \beta))}{\rho^2(\alpha^2 - 1)} \cos \theta + \\ & + \frac{(\rho^2 - \alpha^2)(k_4^{(1)}(1 - \gamma) + k_3^{(1)}(\gamma - \beta))}{\rho^2(\alpha^2 - 1)} \sin \theta - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \frac{(\rho^4 - \alpha^4)(K_2(1 - \gamma)(a_2^{(1)} - b_2^{(1)}) + K_1(\gamma - \beta)(a_1^{(1)} - b_1^{(1)}))}{\rho^3(\alpha^2 - 1)} \sin 2\theta + \\
 & + m \frac{G\omega\alpha(1 - \rho^{2m}) - \alpha^{m-1}\beta K_1(1 - \rho^{2m}\alpha^{-2m})}{G\omega\alpha^{m-1}\rho^{m+1}(1 - \alpha^{-2m})} \sin m\theta.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{\theta z \text{II}}^{e(1)} = & \sin \theta \frac{(\rho^2 + a^2)(k_3^{(1)}(1 - \gamma) + k_1^{(1)}(\gamma - \beta))}{\rho^2(\alpha^2 - 1)} - \\
 & - \frac{(\rho^2 + \alpha^2)(k_4^{(1)}(1 - \gamma) + k_3^{(1)}(\gamma - \beta))}{\rho^2(\alpha^2 - 1)} \cos \theta - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{(\rho^4 + \alpha^4)(K_2(1 - \gamma)(a_2^{(1)} - b_2^{(1)}) + K_1(\gamma - \beta)(a_1^{(1)} - b_1^{(1)}))}{\rho^3(\alpha^2 - 1)} \cos 2\theta - \\
 & - m \frac{G\omega\alpha(\rho^{2m} + 1) - \alpha^{m-1}\beta K_1(\rho^{2m}\alpha^{-2m} + 1)}{G\omega\alpha^{m-1}\rho^m(1 - \alpha^{-2m})} \cos m\theta.
 \end{aligned}$$

Подставляя (36) в (31), получим компоненты напряжений в упругой области слоя II в виде

$$\begin{aligned}
 \tau_{\rho z \text{II}}^{e(1)} = & -G\omega \left[ \frac{\gamma - 1}{1 - \alpha^2} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) (k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta) + \right. \\
 & \left. + \frac{K_1(a_1 - b_1)(\beta - \gamma)}{4(1 - \alpha^4)} \left( \rho - \frac{\alpha^4}{\rho^3} \right) \sin 2\theta \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{\theta z \text{II}}^{e(1)} = & -G\omega \left[ \frac{\gamma - 1}{1 - \alpha^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) (-k_1^{(1)} \sin \theta + k_2^{(1)} \cos \theta) + \right. \\
 & \left. + \frac{K_1(a_1 - b_1)(\beta - \gamma)}{4(1 - \alpha^4)} \left( \rho + \frac{\alpha^4}{\rho^3} \right) \cos 2\theta \right]. \quad (37)
 \end{aligned}$$

Условие (34) с учетом (24) позволяет определить соотношение для радиуса упругопластической границы в первом приближении

$$\rho_1 = (\tau_{\theta z \text{II}}^{p(1)} - \tau_{\theta z \text{II}}^{e(1)}) \Big|_{\rho=1}. \quad (38)$$

Подставляя в (38) найденные ранее компоненты напряжения  $\tau_{\theta z \text{II}}^{(1)}$  (28) и (37), получим

$$\begin{aligned}
 \rho_1 = & \frac{1}{G\omega} \left( k_4^{(1)} \cos \theta - k_3^{(1)} \sin \theta - \frac{k_2}{2} (a_2^{(1)} \sin^2 \theta + b_2^{(1)} \cos^2 \theta) \right) - \\
 & - \frac{(1 + \alpha^2)(k_1^{(1)}(\gamma - \beta) + k_2^{(1)}(1 - \gamma))}{G\omega(\alpha^2 - 1)} \sin \theta + \\
 & + \frac{(1 + \alpha^2)(k_3^{(1)}(\gamma - \beta) + k_4^{(1)}(1 - \gamma))}{G\omega(\alpha^2 - 1)} \cos \theta +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \frac{K_2(a_2^{(1)} - b_2^{(1)})(1 - \gamma)(1 + \alpha^4)}{G\omega(\alpha^4 - 1)} \cos 2\theta - \\
 & - m \frac{2G\omega\alpha - \beta K_1\alpha^{-m-1}(1 - \alpha^{2m})}{G\omega(1 - \alpha^{-2m})\alpha^{m-1}} \cos m\theta.
 \end{aligned}$$

Перейдем к определению функции перемещения  $w_{\Pi}^{p(1)}$  в первом приближении в пластической области внутреннего слоя II. Из соотношений ассоциированного закона пластического течения (11), (12) имеем

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_{\theta z \Pi}^p & \left( \tau_{\rho z \Pi}^p (A_2 \cos^2 \theta + B_2 \sin^2 \theta) + \right. \\
 & \left. + \tau_{\theta z \Pi}^p \frac{B_2 - A_2}{2} \sin 2\theta - A_2 k_3 \cos \theta - B_1 k_3 \sin \theta \right) = \\
 & = d\varepsilon_{\rho z \Pi}^p \left( \tau_{\theta z \Pi}^p (A_2 \cos^2 \theta + B_2 \sin^2 \theta) + \right. \\
 & \left. + \tau_{\rho z \Pi}^p \frac{B_2 - A_2}{2} \sin 2\theta + A_2 k_3 \sin \theta - B_2 k_4 \cos \theta \right). \quad (39)
 \end{aligned}$$

Подставляя в (39) разложения (20), (21), в первом приближении получим

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_{\rho z \Pi}^{p(0)} & \left( \tau_{\theta z \Pi}^{p(0)} (a_2^{(1)} \sin^2 \theta + b_2^{(1)} \cos^2 \theta) + \tau_{\theta z \Pi}^{p(1)} + \right. \\
 & \left. + (b_2^{(1)} - a_2^{(1)}) \tau_{\rho z \Pi}^{p(0)} \cos \theta \sin \theta + k_3^{(1)} \sin \theta - k_4^{(1)} \cos \theta \right) + d\varepsilon_{\rho z \Pi}^{p(1)} \tau_{\theta z \Pi}^{p(0)} = \\
 & = d\varepsilon_{\theta z \Pi}^{p(0)} \left( \tau_{\rho z \Pi}^{p(0)} (a_2^{(1)} \cos^2 \theta + b_2^{(1)} \sin^2 \theta) + \tau_{\rho z \Pi}^{p(1)} + \right. \\
 & \left. + (b_2^{(1)} - a_2^{(1)}) \tau_{\theta z \Pi}^{p(0)} \cos \theta \sin \theta - k_3^{(1)} \cos \theta - k_4^{(1)} \sin \theta \right) + d\varepsilon_{\theta z \Pi}^{p(1)} \tau_{\rho z \Pi}^{p(0)}.
 \end{aligned}$$

Учитывая нулевое приближение (24), получим ассоциированный закон в следующем виде:

$$d\varepsilon_{\rho z \Pi}^{p(1)} = d\varepsilon_{\theta z \Pi}^{p(0)} \left( \tau_{\rho z \Pi}^{p(1)} + \frac{K_2}{2} (b_2^{(1)} - a_2^{(1)}) \sin 2\theta - k_3^{(1)} \cos \theta - k_4^{(1)} \sin \theta \right), \quad (40)$$

где

$$\varepsilon_{\theta z \Pi}^{p(0)} = \lambda^{(0)} = \frac{G\omega\rho - 1}{2G}, \quad (41)$$

$\lambda^{(0)}$  — скалярный множитель в нулевом приближении [13].

Подставляя выражение для компоненты напряжения  $\tau_{\rho z \Pi}^{p(1)}$  из (30) в (40), получим

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_{\rho z \Pi}^{p(1)} & = d\lambda^{(0)} \left( \left( k_2^{(1)} \sin \theta + k_1^{(1)} \cos \theta + \frac{K_1}{2} (a_1^{(1)} - b_1^{(1)}) \sin 2\theta \right) \frac{\gamma - \beta}{\rho} - \right. \\
 & \left. - \frac{\gamma}{\rho} \left( k_4^{(1)} \sin \theta + k_3^{(1)} \cos \theta + \frac{K_2}{2} (a_2^{(1)} - b_2^{(1)}) \sin 2\theta \right) - \frac{\beta}{\rho} K_1 m d_1 \sin m\theta \right). \quad (42)
 \end{aligned}$$

В процессе нагружения частица тела переходит в пластическое состояние в момент прохождения через упругопластическую границу, что соответствует

$\rho = 1$ . Следовательно, в процессе пластического деформирования безразмерный радиус в точке будет изменяться от 1 до некоторого значения  $\rho$ , соответствующего текущему значению приложенных внешних усилий [8].

Соотношение (41) позволяет в (42) перейти от интегрирования по  $\lambda^{(0)}$  к интегрированию по радиусу, в результате чего получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho z \Pi}^{p(1)} = & \frac{\omega}{2} \ln \frac{1}{\rho} \left( \gamma \left( k_4^{(1)} \sin \theta + k_3^{(1)} \cos \theta + \frac{K_2}{2} (a_2^{(1)} - b_2^{(1)}) \sin 2\theta \right) - \right. \\ & - \left( k_2^{(1)} \sin \theta + k_1^{(1)} \cos \theta + \frac{K_1}{2} (a_1^{(1)} - b_1^{(1)}) \sin 2\theta \right) (\gamma - \beta) + \\ & \left. + \beta K_1 d_1 m \sin m\theta \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Для определения перемещения в пластической зоне внутреннего слоя  $\Pi$  воспользуемся соотношениями (6), (8), (13) и (14):

$$\frac{\partial w_{\Pi}^{p(1)}}{\partial \rho} = 2\varepsilon_{\rho z \Pi}^{p(1)} + \frac{\tau_{\rho z \Pi}^{p(1)}}{G}. \quad (44)$$

Подставляя выражения (30) и (43) и решая уравнение (44), найдем  $w_{\Pi}^{p(1)}$  с точностью до функции координаты  $\theta$ :

$$\begin{aligned} w_{\Pi}^{p(1)} = & \left( k_4^{(1)} \sin \theta + k_3^{(1)} \cos \theta + \frac{K_2}{2} (a_2^{(1)} - b_2^{(1)}) \sin 2\theta \right) \times \\ & \times \left( \frac{\rho}{G} + \gamma \left( \left( \ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) (\omega \rho + 1) - 1 \right) \right) - \\ & - \left( k_2^{(1)} \sin \theta + k_1^{(1)} \cos \theta + \frac{K_1}{2} (a_1^{(1)} - b_1^{(1)}) \sin 2\theta \right) \times \\ & \times (\gamma - \beta) \left( \rho \omega \left( \ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) + \frac{1}{G} \ln \frac{1}{\rho} \right) + \\ & + \beta K_1 d_1 m \sin m\theta \left( \omega \rho \left( \ln \frac{1}{\rho} + 1 \right) + \frac{1}{G} \ln \frac{1}{\rho} \right) + \varphi_1(\theta). \end{aligned} \quad (45)$$

Функцию  $\varphi_1(\theta)$  определим из условия непрерывности перемещений на упругопластической границе (17). Это условие в первом приближении с учетом (20) и (22) примет вид

$$w_{\Pi}^{p(1)} \Big|_{\rho=1} = w_{\Pi}^{e(1)} \Big|_{\rho=1}. \quad (46)$$

Подставляя (45) и (36) в (46), а затем найденное выражение для функции  $\varphi_1(\theta)$  в (45), получим поле перемещений в пластической области в первом приближении во внутреннем слое. С использованием вторых соотношений (6), (8), (13), (14), (28) и (45) определяются компоненты деформации  $\varepsilon_{\theta z \Pi}^{(1)}$  и  $\varepsilon_{\rho z \Pi}^{p(1)}$ .

Определим функции перемещения  $w_{\Gamma}^{p(1)}$  в первом приближении во внешнем слое. Из соотношений ассоциированного закона пластического течения (9), (10) получим

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_{\theta z I}^p & \left( \tau_{\rho z I}^p (A_1 \cos^2 \theta + B_1 \sin^2 \theta) + \right. \\
 & \left. + \tau_{\theta z I}^p \frac{B_1 - A_1}{2} \sin 2\theta - A_1 k_1 \cos \theta - B_1 k_2 \sin \theta \right) = \\
 & = d\varepsilon_{\rho z I}^p \left( \tau_{\theta z I}^p (A_1 \cos^2 \theta + B_1 \sin^2 \theta) + \right. \\
 & \left. + \tau_{\rho z I}^p \frac{B_1 - A_1}{2} \sin 2\theta + A_1 k_1 \sin \theta - B_1 k_2 \cos \theta \right). \quad (47)
 \end{aligned}$$

Подставляя в (47) разложения (20), (21), с учетом нулевого приближения (23) ассоциированный закон в первом приближении запишется в виде

$$d\varepsilon_{\rho z I}^{p(1)} = d\varepsilon_{\theta z I}^{p(0)} \left( \tau_{\rho z I}^{p(1)} + \frac{K_1}{2} (b_1^{(1)} - a_1^{(1)}) \sin 2\theta - k_1^{(1)} \cos \theta - k_2^{(1)} \sin \theta \right), \quad (48)$$

где, аналогично (41),

$$\varepsilon_{\theta z I}^{p(0)} = \lambda^{(0)} = \frac{G\omega\rho - 1}{2G}.$$

Подставляя в соотношение (48) выражение (30), имеем

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_{\rho z I}^{p(1)} & = -\frac{\beta}{\rho} \left( k_1^{(1)} \cos \theta + k_2^{(1)} \sin \theta + \right. \\
 & \left. + \frac{K_1}{2} (a_1^{(1)} - b_1^{(1)}) \sin 2\theta + \frac{\beta}{\rho} K_1 m d_1 \sin m\theta \right) d\lambda^{(0)}.
 \end{aligned}$$

Безразмерный радиус в точке будет изменяться от  $\gamma$  до некоторого значения  $\rho$ , соответствующего текущему значению приложенных внешних усилий. Переход от интегрирования по  $\lambda^{(0)}$  к интегрированию по радиусу позволяет получить

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\rho z I}^{p(1)} & = \frac{\omega\beta}{2} \ln \frac{\gamma}{\rho} \left( k_2^{(1)} \sin \theta + k_1^{(1)} \cos \theta + \right. \\
 & \left. + \frac{K_1}{2} (a_1^{(1)} - b_1^{(1)}) \sin 2\theta + K_1 m \sin m\theta \right). \quad (49)
 \end{aligned}$$

Для определения функции перемещения  $w_I^{p(1)}$  в первом приближении во внешнем слое составим следующее уравнение, которое с учетом (14) и (49) примет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w_{II}^{p(1)}}{\partial \rho} & = \omega\beta \ln \frac{\gamma}{\rho} \left( k_2^{(1)} \sin \theta + k_1^{(1)} \cos \theta + \right. \\
 & \left. + \frac{K_1}{2} (a_1^{(1)} - b_1^{(1)}) \sin 2\theta + K_1 m \sin m\theta \right). \quad (50)
 \end{aligned}$$

Решая уравнение (50), найдем  $w_I^{p(1)}$  с точностью до функции координат  $\rho$  и  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
 w_I^{p(1)} & = \omega\beta \left( k_2^{(1)} \sin \theta + k_1^{(1)} \cos \theta + \right. \\
 & \left. + \frac{K_1}{2} (a_1^{(1)} - b_1^{(1)}) \sin 2\theta + K_1 m \sin m\theta \right) \left( 1 + \ln \frac{\gamma}{\rho} \right) \rho + \varphi_2(\rho, \theta). \quad (51)
 \end{aligned}$$

Функция  $\varphi_2(\rho, \theta)$  определяется из условия непрерывности перемещений на границе стыка (18). В первом приближении это условие с учетом (20), (23) будет иметь вид

$$w_I^{p(1)}|_{\rho=\gamma} = w_{II}^{p(1)}|_{\rho=\gamma}. \quad (52)$$

Подставляя (51) и поле перемещений  $w_{II}^{p(1)}$  (45) в условие (52), а затем найденное выражение для функции  $\varphi_2(\rho, \theta)$  в (51), получим поле перемещений во внешнем слое в первом приближении. С использованием второго соотношения (14) определим компоненту деформации  $\varepsilon_{\theta z1}^{p(1)}$ .

На рис. 2 изображена упругопластическая граница в нулевом приближении  $\rho_0$  и в первом приближении  $\rho_s = \rho_0 + \delta\rho_1$  при  $\delta = 0.025$ ,  $k_1 = k_3 = 0.5$ ,  $k_2 = k_4 = 0.6$ ,  $a_1 = a_2 = 0.3$ ,  $b_1 = b_2 = 0.4$ ,  $m = 4$ ,  $G\omega = 1$ ,  $G = 323.67$ . Выбор значения малого параметра обусловлен соответствием полученных результатов их физическому смыслу. При данном значении пластическая область не выходит за границы геометрии стержня, а лежит между внутренним контуром и границей раздела слоев, как и было указано в предположении.

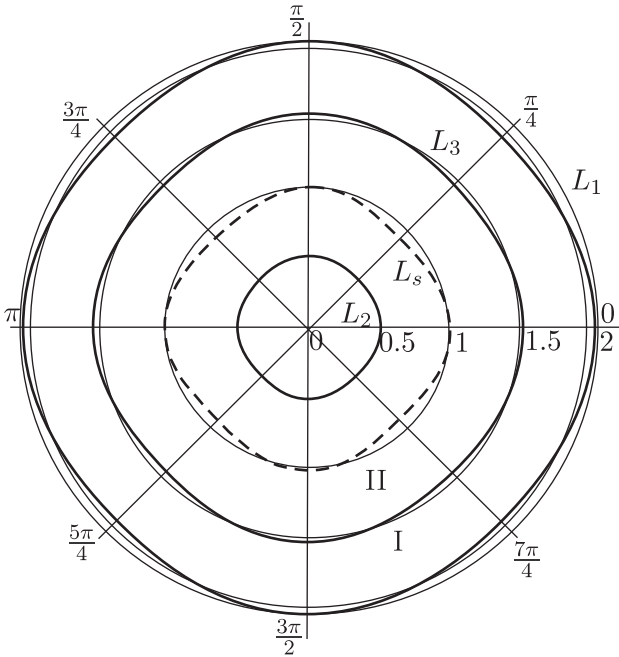


Рис. 2. Упругопластическая граница в нулевом и первом приближении  
 [Figure 2. The elastic-plastic, boundary in the zero and first approximation]

**Конкурирующие интересы.** Мы не имеем конкурирующих интересов.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

## Библиографический список

1. Фоминых С. О. Упругопластическое состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов пластической анизотропии // *Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2011. № 1(9). С. 211–226.
2. Задорожный В. Г., Ковалев А. В., Спорыхин А. Н. Об аналитичности решения плоской упругопластической задачи // *Изв. РАН. МТТ*, 2008. № 1. С. 138–146.
3. Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // *Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2010. № 2(8). С. 576–579.
4. Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. О кручении анизотропных цилиндрических стержней // *Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2011. № 1(9). С. 150–155.
5. Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Об определении напряжённого состояния двухслойного анизотропного кругового цилиндра при упругопластическом кручении / *XI Всероссийский Съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник докладов (20–24 августа 2015 г.)*. Казань, 2015. С. 3379–3381.
6. Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д., Свиридов И. Э. Упругопластическое состояние толстостенного стержня некругового поперечного сечения при кручении в случае анизотропии общего вида // *Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2016. № 4(30). С. 42–54.
7. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. *Метод возмущений в теории упругопластического тела*. М.: Наука, 1978. 208 с.
8. Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. *Неоднородные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей*. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2004. 219 с.
9. Hill R. *The Mathematical theory of plasticity* / Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. Oxford: Oxford University Press, 1998. ix+355 pp.
10. Ивлев Д. Д., Максимова Л. А. О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса // *Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2010. № 2(8). С. 583–584.
11. Качанов Л. М. *Основы теории пластичности*. М.: Наука, 1969. 420 с.
12. Фоминых С. О. Определение упругопластического состояния в толстостенной трубе при условии идеальнопластической анизотропии // *Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2013. № 2(16). С. 150–153.
13. Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д. Об определении перемещений в задаче упругопластического кручения кругового цилиндра в случае трансляционной анизотропии / *Механика предельного состояния и смежные вопросы: Материалы всероссийской научной школы-конференции, посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева*. Чебоксары, 2015. С. 113–117.

MSC: 74C05, 74E10

# Application of the perturbation method for the determination of stress-strain state of a thick-style two-layer anisotropic shaft of non-circular cross section with elastoplastic torsion

A. V. Kovalev, I. E. Sviridov, Yu. D. Scheglova

Voronezh State University,

1, Universitetskaya pl., Voronezh, 394006, Russian Federation.


## Abstract

The present work is devoted to the problem of elastoplastic torsion of the two-layer slightly anisotropic non-circular cross section shaft. The cross section is a doubly connected region. The shaft is oriented in a cylindrical coordinate system so that the  $Z$  axis is directed along the axis of the shaft. The influence of mass forces is not taken into account. Let the rod twist about the  $Z$  axis by equal and opposite pairs of forces. Suppose that the lateral surface of the rod is free of loads. The value of the moment is such that for some parts of the cross section the material passes into a plastic state and plastic zones are formed. The propagation of plastic flow comes from the outer contour inside the section. Suppose that the value of the torque is such that the plastic region entirely covers the outer contour of the cross section, and there is an elastoplastic boundary that is located between the inner contour and the interface of the layers. It is considered as an anisotropic material that in particular cases is in the kinematic properties of the anisotropy and anisotropy according to Hill. Each of the layers has its own anisotropy parameters. With using perturbation method, stress-strain state and elastoplastic boundary at first approximate is defined.

**Keywords:** strain, stress, non-circular cross section, elastoplastic torsion, anisotropy according to Hill, kinematic anisotropy, two-layer shaft.

Received: 12<sup>th</sup> April, 2016 / Revised: 19<sup>th</sup> May, 2017 /Accepted: 12<sup>th</sup> June, 2017 / First online: 11<sup>th</sup> July, 2017

## Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)


### Please cite this article in press as:

Kovalev A. V., Sviridov I. E., Scheglova Yu. D. Application of the perturbation method for the determination of stress-strain state of a thick-style two-layer anisotropic shaft of non-circular cross section with elastoplastic torsion, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 292–307. doi: [10.14498/vsgtu1541](https://doi.org/10.14498/vsgtu1541) (In Russian).


### Authors' Details:

*Alexey V. Kovalev*  <http://orcid.org/0000-0002-3730-9621>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of the Dept.; Dept. of Mechanics and Computer Simulation; e-mail: [kav-mail@mail.ru](mailto:kav-mail@mail.ru)

*Ilya E. Sviridov*  <http://orcid.org/0000-0002-7401-7150>

Postgraduate Student; Dept. of Mechanics and Computer Simulation; e-mail: [synett@gmail.com](mailto:synett@gmail.com)

*Yulia D. Scheglova*  <http://orcid.org/0000-0002-4295-5409>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mechanics and Computer Simulation; e-mail: [scheglova@gmail.com](mailto:scheglova@gmail.com)

**Competing interests.** We have no competing interests.

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

**Funding.** The research has not had any sponsorship.

## References

1. Fominykh S. O. Elastoplastic state of a thick-walled pipe at the interaction of different types of plastic anisotropy, *Vestnik Chuvash. gos. ped. un-ta im. I. Ia. Iakovleva. Ser. Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2011, no. 1(9), pp. 211–226 (In Russian).
2. Zadorozhnyi V. G., Kovalev A. V., Sporykhin A. N. Analyticity of the solution of a plane elastoplastic problem, *Mechanics of Solids*, 2008, vol. 43, no. 1, pp. 117–123. doi: [10.1007/s11964-008-1011-1](https://doi.org/10.1007/s11964-008-1011-1).
3. Ivlev D. D., Mironov B. G. On the relations of translational ideal-plastic anisotropy in torsion, *Vestnik Chuvash. gos. ped. un-ta im. I. Ia. Iakovleva. Ser. Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2010, no. 2(8), pp. 576–579 (In Russian).
4. Mironov B. G., Mitrofanova T. V. On the torsion of anisotropic cylindrical rods, *Vestnik Chuvash. gos. ped. un-ta im. I. Ia. Iakovleva. Ser. Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2011, no. 1(9), pp. 150–155 (In Russian).
5. Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. On the determination of the stressed state of a two-layer anisotropic circular cylinder under elastoplastic torsion, In: *XI Vserossiiskii S"ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki* [XI All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics]. Kazan', 2015, pp. 3379–3381 (In Russian).
6. Kovalev A. V., Shcheglova Yu. D., Sviridov I. E. Elastoplastic torsion of thick-walled non-circular cross section shaft in case of general form anisotropy, *Vestnik Chuvash. gos. ped. un-ta im. I. Ia. Iakovleva. Ser. Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2016, no. 4(30), pp. 42–54 (In Russian).
7. Ivlev D. D., Ershov L. V. *Metod vozmushchenii v teorii uprugoplasticheskogo tela* [Perturbation Method in the Theory of Elastoplastic Body]. Moscow, Nauka, 1978, 208 pp. (In Russian)
8. Sporykhin A. N., Kovalev A. V., Shcheglova Yu. D. *Neodnomernye zadachi uprugoviazkoplastichnosti s neizvestnoi granitsej* [Nonuniform elastic-viscoplasticity problems with an unknown boundary]. Voronezh, Voronezh State Univ., 2004, 219 pp. (In Russian)
9. Hill R. *The Mathematical theory of plasticity*, Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. Oxford, Oxford University Press, 1998, ix+355 pp.
10. Ivlev D. D., Maksimova L. A. On the relations of the theory of translational ideal-anisotropy under generalization of the Mises plasticity condition, *Vestnik Chuvash. gos. ped. un-ta im. I. Ia. Iakovleva. Ser. Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2010, no. 2(8), pp. 583–584 (In Russian).
11. Kachanov L. M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Fundamentals of the Theory of Plasticity]. Moscow, Nauka, 1969, 420 pp. (In Russian)
12. Fominykh S. O. Determination of elastic-plastic state in a thick-walled tube, provided translational ideal-anisotropy, *Vestnik Chuvash. gos. ped. un-ta im. I. Ia. Iakovleva. Ser. Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2013, no. 2(16), pp. 150–153 (In Russian).
13. Kovalev A. V., Sviridov I. E., Shcheglova Yu. D. On the determination of displacements in the problem of elastoplastic torsion of a circular cylinder in the case of translational anisotropy, In: *Mekhanika predel'nogo sostoianiia i smezhnye voprosy* [Critical State Mechanics and Related Topics]. Cheboksary, 2015, pp. 113–117 (In Russian).