



УДК 539.313:517.968.72

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДРОБНЫХ АНАЛОГОВ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧЕ АППРОКСИМАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПО РАСТЯЖЕНИЮ ПОЛИВИНИЛХЛОРИДНОГО ПЛАСТИКАТА

Л. Г. Унгарова

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Рассматриваются и анализируются одноосные феноменологические модели вязкоупругого деформирования на основе дробных аналогов реологических моделей Скотт Блэра, Фойхта, Максвелла, Кельвина и Зенера. Получены аналитические решения соответствующих дифференциальных уравнений с дробными операторами Римана–Лиувилля при действии постоянных напряжений с последующей разгрузкой, которые записываются через обобщенную (двухпараметрическую) дробную экспоненциальную функцию, и в зависимости от типа модели содержат от двух до четырех параметров. Разработана методика идентификации параметров моделей на основе базовой информации для экспериментальных кривых ползучести при постоянных напряжениях. Нелинейная задача параметрической идентификации решается двухступенчатым итерационным способом. На первом этапе используются характерные экспериментальные точки диаграмм и особенности поведения моделей при неограниченном возрастании времени и определяются начальные приближения параметров. На втором этапе осуществляется уточнение этих параметров методом покоординатного спуска (методом Хука–Дживса) и минимизации функционала среднеквадратического отклонения расчетных значений от экспериментальных. Методика идентификации реализована для всех рассмотренных моделей на основании известных экспериментальных данных одноосного вязкоупругого деформирования поливинилхлоридного пластика при температуре 20 °С и пяти уровней растягивающего напряжения. Приводятся табличные значения параметров для всех моделей. Выполнен анализ погрешности построенных феноменологических моделей по экспериментальным данным для всего ансамбля кривых вязкоупругого деформирования. Установлено, что для модели Скотт Блэра погрешность составляет 14.17 %, Фойхта — 11.13 %, Максвелла — 13.02 %, Кельвина — 10.56 %, Зенера — 11.06 %. Приводятся графики расчетных и экспериментальных зависимостей вязкоупругой деформации для поливинилхлоридного пластика.

© 2016 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования

Унгарова Л. Г. Применение линейных дробных аналогов реологических моделей в задаче аппроксимации экспериментальных данных по растяжению поливинилхлоридного пластика // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 4. С. 691–706. doi: [10.14498/vsgtu1523](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1523).

Сведения об авторе

Луиза Гадильевна Унгарова (algluiza@gmail.com), аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

Ключевые слова: дробные реологические модели, идентификация параметров, оператор Римана—Лиувилля, экспериментальные данные, поливинилхлоридный пластикат, погрешность.

Введение. В работе [1] на основе гипотезы В. Вольтерры о наследственно упругом деформируемом твердом теле и метода структурного моделирования рассмотрены дробные аналоги некоторых классических реологических моделей: модель Скотт Блэра как аналог и обобщение модели Ньютона для вязкой жидкости, а также дробные аналоги моделей Фойхта, Максвелла, Кельвина и Зенера. В указанной работе было отмечено, что если в исходном определяющем соотношении В. Вольтерры использовано ядро Абеля, то возникающие в определяющих соотношениях дробные производные будут являться производными Римана—Лиувилля на отрезке временной оси. Показана корректность классической задачи Коши для возникающих из определяющих соотношений дробных дифференциальных уравнений относительно некоторых линейных комбинаций функций напряжений и деформаций. Найдены явные решения задачи о ползучести при постоянном напряжении на стадиях нагружения и разгрузки и отмечено, что они могут быть использованы для аппроксимации экспериментальных зависимостей деформации от времени, полученных в опытах по одноосному растяжению деформируемых тел (физических сред) под действием постоянных нагрузок. Успешное решение задачи аппроксимации позволяет идентифицировать параметры реологической модели и тем самым определить вид и структуру математической модели вязкоупругого поведения изучаемой среды в форме определяющего соотношения между функциями напряжения и деформации. В работе [1] авторы ограничились примером использования дробного аналога модели Фойхта для описания данных эксперимента по нагружению образцов из поливинилхлоридного пластиката, которые приведены в работе [2]. В настоящей работе решается задача идентификации параметров математической модели вязкоупругого деформирования указанных выше математических объектов и выполняется оценка погрешности построенных моделей.

Прежде чем перейти к описанию алгоритма построения математической модели одноосного вязкоупругого деформирования, отметим, что идея замены классических вязкоупругих моделей деформируемого твердого тела наследственно упругими моделями имеет давнюю историю, восходящую к работам В. Вольтерры [3, 4] и Х. Больцмана [5]. Она получила мощное развитие в работе Ю. Н. Работнова [6], которая, по существу, заложила начало школы по механике наследственно упругих твердых тел. Отметим здесь также несколько предшествующих работ [7–12].

К настоящему моменту опубликовано огромное количество работ, посвященных дробным реологическим моделям (см., например, библиографические списки в работах [13–17]). Как отмечено в монографии [15, с. 443], большинство авторов используют в определяющих соотношениях дробные производные Капуто, производные Грюнвальда—Летникова [18] или лиувиллевскую форму [19] дробного интегро-дифференцирования на всей числовой оси, в то время как дробные реологические модели выражаются через дробные производные Римана—Лиувилля. Для нахождения явных решений дифференциальных уравнений дробного порядка, возникающих из определяющих

соотношений, используется в основном преобразование Лапласа. В работе [1] показано, что они могут быть найдены собственно методами дробного анализа с использованием интегральных операторов с началом в нуле или в другой точке, соответствующей, например, конечному моменту времени.

Проблема идентификации параметров дробных реологических моделей и необходимость их определения из экспериментальных данных обсуждалась уже авторами ранних работ по наследственно упругим моделям (см., например, [8]). В монографии Ю. Н. Работнова [20, с. 86] приведен метод прямого определения параметров дробно-экспоненциального ядра ползучести, предложенный ранее авторами работы [21]. Однако указанный метод основан на сравнении образов преобразований Лапласа явного (аналитического) решения задачи с образом полиномиальной аппроксимации экспериментальных точек и минимизации суммы квадратов отклонений методом координатного спуска в пространстве параметров модели. В действительности проблема может быть решена непосредственно путем сопоставления экспериментальных и теоретических значений.

В многочисленных публикациях последних десяти лет проблема идентификации параметров дробных моделей в основном решается на теоретическом уровне, например, методами спектрального анализа [22]. В работе [23] параметры модели определяются исходя из нескольких характерных точек, полученных в эксперименте, путем подстановки значений деформации в аналитические решения соответствующей задачи.

1. Описание эксперимента и идентификация параметров математических моделей. Рассмотрим дробные аналоги известных структурных моделей вязкоупругого тела: модели Ньютона, Максвелла, Фойхта, Кельвина и Зенера с дробным порядком $\alpha \in (0, 1)$. В работах [1, 24] были найдены явные решения задачи о ползучести при постоянном напряжении в случае нагружения и разгрузки для всех вышеупомянутых моделей. Рассмотрим применение этих математических моделей к конкретному эксперименту. В работе [2] исследовано поведение поливинилхлоридных трубок площадью поперечного сечения 1.2 мм^2 при температуре 20°C и постоянных напряжениях $\sigma_0 \in \{4.655; 6.288; 8.738; 10.372; 12.005\}$ МПа, действующих на образцы в течение 8 часов, после чего производилась полная разгрузка образцов ($\sigma = 0$ при $t > 8$ часов). При каждом напряжении испытывалось от 3 до 5 образцов, а затем результаты испытаний осреднялись. Анализ экспериментальных кривых показал, что данный материал обладает следующими свойствами: имеет мгновенную упругую деформацию при приложении и снятии нагрузки, а под действием постоянной нагрузки проявляет свойство вязкоупругости. Простейшей математической моделью, описывающей подобное поведение деформируемых тел, является дробный аналог модели Максвелла

$$\eta D_{0t}^\alpha \varepsilon(t) = \frac{\eta}{E_0} D_{0t}^\alpha \sigma(t) + \sigma(t), \quad (1)$$

где $D_{0t}^\alpha \varphi = (d/dt)^n I_{0t}^{n-\alpha} \varphi$ — левосторонняя дробная производная Римана—Лиувилля порядка $\alpha > 0$ функции $\varphi(t)$ ($t > 0$, $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ — целая часть числа $\alpha \in \mathbb{R}$), $I_{0t}^\beta \varphi = (I_{0+}^\beta \varphi)(t)$ — интеграл Римана—Лиувилля порядка $\beta > 0$ [15], E_0 и η — постоянные величины, которые при $\alpha = 1$ совпадают с модулем упругого элемента и коэффициентом демпфирования соответственно в клас-

сической модели Максвелла [1]. Для напряжения, изменяющегося по закону

$$\sigma(t) = \sigma_0[H(t) - H(t - t_1)], \quad (2)$$

где $\sigma_0 = \text{const} > 0$, $H(t)$ — функция Хевисайда, t_1 — момент времени разгрузки, решение задачи ползучести для модели (1) имеет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[\left(1 + \frac{\beta t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}\right) H(t) - \left(1 + \frac{\beta(t - t_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}\right) H(t - t_1) \right], \quad (3)$$

где $\beta = E_0/\eta$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция [25].

Рассмотрим методику идентификации параметров решения для дробного аналога модели Максвелла (3). Будем аппроксимировать данные эксперимента теоретическими значениями деформации на стадии нагружения по формуле

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{\sigma_0 t^\alpha}{\eta \Gamma(\alpha + 1)}. \quad (4)$$

Идентификации подлежат порядок дробности α и величины E_0 , η . Мгновенная упругая деформация выражается соотношением

$$\varepsilon(0+) = \sigma_0/E_0.$$

Тогда

$$E_0 = \sigma_0/\tilde{\varepsilon}(0),$$

где $\tilde{\varepsilon}(0) = \tilde{\varepsilon}_0$ — первое значение деформации, взятое из массива экспериментальных данных. Для нахождения остальных неизвестных величин воспользуемся методом наименьших квадратов.

Пусть t_i — набор n моментов времени t , при которых было произведено измерение экспериментальных значений деформации $\tilde{\varepsilon}_i = \tilde{\varepsilon}(t_i)$ в каждый момент времени t_i . Тогда равенство (4) можно записать в виде

$$\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_0 = \frac{\sigma_0 t_i^\alpha}{\eta \Gamma(\alpha + 1)}.$$

Разделив левую и правую части этого равенства на величину σ_0 и прологарифмировав, получим следующее выражение:

$$\ln(\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_0) - \ln \sigma_0 = \alpha \ln t_i - (\ln \eta + \ln \Gamma(\alpha + 1)). \quad (5)$$

Введем следующие обозначения:

$$u_i = \ln(\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_0) - \ln \sigma_0, \quad \tau_i = \ln t_i, \quad c = \ln \eta + \ln \Gamma(\alpha + 1).$$

Тогда (5) запишется в виде

$$u_i = \alpha \tau_i - c.$$

Найдем параметры α и c , минимизирующие функцию

$$f = \sum_{i=1}^n (u_i - \alpha \tau_i + c)^2 \rightarrow \min. \quad (6)$$

Используя необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial c} = 0$$

и решив систему уравнений метода наименьших квадратов, получим формулы для определения значений параметров α и c :

$$\alpha = \frac{n \sum_{i=1}^n u_i \tau_i - \sum_{i=1}^n \tau_i \sum_{i=1}^n u_i}{n \sum_{i=1}^n \tau_i^2 - (\sum_{i=1}^n \tau_i)^2},$$

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n u_i \tau_i \sum_{i=1}^n \tau_i - \sum_{i=1}^n u_i \sum_{i=1}^n \tau_i^2}{n \sum_{i=1}^n \tau_i^2 - (\sum_{i=1}^n \tau_i)^2}.$$

Возвращаясь к введенным выше обозначениям, находим коэффициент η :

$$\eta = e^c / \Gamma(\alpha + 1).$$

Найденные значения параметров позволяют по формуле (3) найти теоретические значения деформации в указанные выше моменты времени.

Отметим, что если в решении задачи о ползучести в рамках дробного аналога Максвелла (3) отбросить мгновенную упругую деформацию, то получим решение соответствующей задачи для модели Скотт Блэра:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta \Gamma(\alpha + 1)} [t^\alpha H(t) - (t - t_1)^\alpha H(t - t_1)]. \quad (7)$$

При аппроксимации экспериментальных данных функцией (7) вычтем из тестовых экспериментальных значений деформации величину мгновенной упругой деформации, совпадающую со значением $\tilde{\varepsilon}(0)$. Тогда дальнейший поиск параметров α и η аналогичен алгоритму для модели Максвелла, при этом в минимизирующей функции (6) значения

$$u_i = \ln \tilde{\varepsilon}_i - \ln \sigma_0, \quad (8)$$

так как $\tilde{\varepsilon}_0 = 0$. Таким образом, параметры α и η в модели Скотт Блэра окажутся такими же, как и в дробном аналоге Максвелла.

Рассмотрим теперь дробный аналог модели Кельвина. В работе [1] для этой модели приведено решение в случае, когда $\sigma(t)$ определяется формулой (2):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_2} \left\{ H(t) \left[1 + \frac{E_2}{E_1} \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\eta}; t \right) \right) \right] - H(t - t_1) \left[1 + \frac{E_2}{E_1} \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\eta}; t - t_1 \right) \right) \right] \right\}, \quad (9)$$

где E_1, E_2 — коэффициенты упругих элементов,

$$\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) = t^{\mu-1} E_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu)$$

— обобщенная (двухпараметрическая) дробная экспоненциальная функция [26], $E_\alpha(z; \mu)$ — функция типа Миттаг—Лэффлера [27].

Из (9) следует, что идентификации подлежат коэффициенты α , E_1 , E_2 , η . Вновь ограничимся случаем нагружения

$$\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const} \quad (0 < t \leq t_1).$$

Деформация образца описывается выражением

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_2} + \frac{\sigma_0}{E_1} \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\eta}; t \right) \right). \quad (10)$$

Для нахождения параметра, характеризующего мгновенную упругую деформацию, используем первую экспериментальную точку $\tilde{\varepsilon}(0)$. Тогда

$$E_2 = \sigma_0 / \tilde{\varepsilon}(0).$$

Известно, что дробный аналог модели Кельвина имеет асимптоту [1]

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \sigma_0 / E,$$

где $E = E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$, если $\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}$, $t \in (0, +\infty)$. Подставив в это выражение последнее экспериментальное значение деформации $\tilde{\varepsilon}_n$ при нагружении, определим параметр $E_1 \approx \sigma_0 / \tilde{\varepsilon}_n$ в грубом приближении. Следующие параметры α и η также в грубом приближении будут определяться с помощью метода наименьших квадратов. Для этого разложим дробную экспоненциальную функцию $\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t)$ в ряд [26]

$$\text{Exp}(\alpha, 1; -\beta; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} = 1 + \frac{-\beta t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\beta^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots, \quad (11)$$

где $\beta = -E_1 / \eta$, и ограничимся первыми двумя членами ряда (11). Тогда зависимость деформации $\varepsilon(t)$ в случае нагрузки при $0 < t \leq t_1$ примет вид

$$\varepsilon(t) - \varepsilon(0) \approx \frac{\sigma_0}{E_1} \cdot \frac{\beta t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} = \frac{\sigma_0 t^\alpha}{\eta \Gamma(\alpha + 1)}. \quad (12)$$

Очевидно, что равенство (12) совпадает с решением задачи ползучести для дробного аналога модели Максвелла (4), для которого уже были найдены необходимые значения параметров. Дальнейшие уточнения параметров α , η и E_1 осуществляются методом покоординатного спуска (методом Хука—Дживса) [28]. Таким образом, аппроксимация дробным аналогом модели Максвелла является грубым приближением для аппроксимации дробной моделью Кельвина. Найденные параметры подставим в решение (9) и вычислим среднеквадратические оценки отклонений теоретических расчетных значений от экспериментальных значений деформаций на стадиях нагрузки и разгрузки по формуле

$$\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^n [\tilde{\varepsilon}(t_i) - \varepsilon(t_i)]^2 / \sum_{i=1}^n [\tilde{\varepsilon}(t_i)]^2} \cdot 100\%. \quad (13)$$

Заметим, что исключив мгновенную упругую деформацию из уравнения (9), получим решение задачи о ползучести в рамках дробного аналога модели Фойхта:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} \left[H(t) \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\eta}; t \right) \right) - H(t - t_1) \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_1}{\eta}; t - t_1 \right) \right) \right]. \quad (14)$$

Вычитая из экспериментальных данных первое значение деформации $\tilde{\varepsilon}(0)$, соответствующее упругой деформации, можно аппроксимировать полученные экспериментальные тестовые кривые уравнением (14). Для этого следует воспользоваться идеей, изложенной выше при использовании в качестве аппроксимирующей модели дробного аналога модели Кельвина (9). Минимизирующая функция в этом случае совпадает с минимизирующей функцией для модели Скотт Блэра (7), в которой u_i задается формулой (8).

Рассмотрим далее дробный аналог модели Зенера, для которого решение задачи о ползучести имеет вид [1]

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1 + E_2} \left\{ H(t) \left[1 + \frac{E_1}{E_2} \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_0}{\eta}; t \right) \right) \right] - H(t - t_1) \left[1 + \frac{E_1}{E_2} \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_0}{\eta}; t - t_1 \right) \right) \right] \right\}, \quad (15)$$

где $E_0 = E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$.

Ограничимся стадией нагружения:

$$\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const} \quad (0 < t \leq t_1).$$

Деформация будет определяться равенством

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1 + E_2} + \frac{E_1 \sigma_0}{E_2 (E_1 + E_2)} \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_0}{\eta}; t \right) \right). \quad (16)$$

Выделим мгновенную упругую компоненту деформации, благодаря которой вычисляется величина

$$E_1 + E_2 = \sigma_0 / \tilde{\varepsilon}(0),$$

где $\varepsilon(0)$ — экспериментальное значение упругой деформации. Устремляя в уравнении (16) $t \rightarrow +\infty$, получим

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \sigma_0 / E_2 \approx \tilde{\varepsilon}_n,$$

откуда следует, что

$$E_2 \approx \sigma_0 / \tilde{\varepsilon}_n.$$

Тогда

$$E_1 \approx \sigma_0 / \tilde{\varepsilon}(0) - E_2 \approx \sigma_0 (1 / \tilde{\varepsilon}(0) - 1 / \tilde{\varepsilon}_n).$$

Решение (16) по структуре аналогично (10). Вновь разложим дробную экспоненциальную функцию в ряд и ограничимся первыми двумя членами. Тогда на стадии нагрузки из (16) получим

$$\varepsilon(t) - \varepsilon(0) = \frac{\sigma_0 E_1^2 t^\alpha}{(E_1 + E_2)^2 \eta \Gamma(\alpha + 1)}.$$

Минимизируя функцию (6), в которой

$$u_i = \ln \frac{(\varepsilon(t) - \varepsilon(0))(E_1 + E_2)^2}{\sigma_0 E_1^2},$$

находим коэффициенты α и η в грубом приближении. Далее, следуя методу Хука–Дживса, аппроксимируем экспериментальные данные уравнением (15) при любом t и находим отклонение

теоретической зависимости $\varepsilon(t_i)$ с найденными параметрами α , E_1 , E_2 , η от экспериментальных данных $\tilde{\varepsilon}(t_i)$ по формуле (13).

Нетрудно увидеть, что при отбрасывании начального упругого значения деформации решение задачи о ползучести для дробного аналога модели Зенера принимает вид, подобный решению для дробного аналога модели Фойхта (14):

$$\varepsilon(t) = \frac{E_1 \sigma_0}{E_2 (E_1 + E_2)} \left(1 - \text{Exp} \left(\alpha, 1; -\frac{E_0}{\eta}; t \right) \right).$$

Последнее равенство, в свою очередь, при замене дробной экспоненты на первые два члена ее ряда принимает вид решения уравнения Скотт Блэра (7), в котором значения параметров уже известны.

2. Анализ и сравнение результатов аппроксимаций. В результате первичной обработки каждой кривой вязкоупругого деформирования при всех пяти напряжениях σ_0 при нагрузке

$$\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const} \quad (0 \leq t \leq 8), \quad \sigma(t) = 0 \quad (8 < t \leq 12)$$

найлены значения параметров для всех рассмотренных моделей.

В табл. 1 приведены значения параметров аппроксимации для дробного аналога модели Кельвина. В колонке Δ с использованием нормы (13) приведены отклонения теоретической зависимости $\varepsilon(t_i)$, рассчитанной по формуле (9) при каждом значении напряжения σ_0 с найденными параметрами

Таблица 1

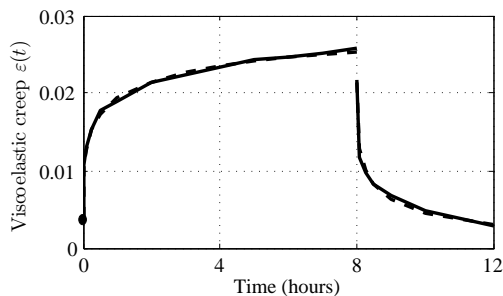
Значения параметров аппроксимации (9) и погрешности для дробного аналога модели Кельвина [The values of the approximation parameters for Eq. (9) and measure of inaccuracy for fractional Kelvin model]

σ_0 , МПа	α	E_1 , МПа	E_2 , МПа	η	Δ , %
4.655	0.355	145.525	1163.800	190.067	2.586
6.288	0.326	133.601	898.329	158.793	4.097
8.738	0.394	140.194	1028.000	128.956	3.168
10.372	0.318	97.571	829.733	158.840	3.468
12.005	0.400	127.962	857.500	113.856	3.121

α , E_1 , E_2 , η , от экспериментальных данных. В качестве примера на рис. 1 штриховой линией представлена полученная по формуле (9) расчетная зависимость при $\sigma_0 = 4.655$ МПа с параметрами из первой строки табл. 1. Погрешность аппроксимации конкретной реализации в данном случае равна 2.586 %. Анализ данных табл. 1 свидетельствует о том, что, вообще говоря, для дробного аналога модели Кельвина наблюдается существенный разброс параметров модели для реализаций при различных значениях напряжений.

Рис. 1. Экспериментальная (сплошная линия) и расчетная по модели (9) (штриховая линия) кривые вязкоупругого деформирования поливинилхлоридного пластика при напряжении $\sigma_0 = 4.655$ МПа с последующей разгрузкой

[Figure 1. Experimental (solid line) and calculated by the Kelvin's fractional model (9) (dashed line) viscoelastic creep curves of the flexible PVC at the stress $\sigma_0 = 4.655$ MPa with subsequent unloading]



Аналогичный расчет проведен и для других рассмотренных в настоящей работе моделей при всех пяти уровнях напряжений. Для построения исследуемых моделей, «работоспособных» при напряжениях σ_0 от 4.655 МПа до 12.005 МПа, выполнено усреднение параметров по пяти реализациям для каждой из них. В табл. 2 представлены полученные значения усредненных параметров $\bar{\alpha}$, \bar{E}_1 , \bar{E}_2 , $\bar{\eta}$ для всех рассмотренных моделей.

В табл. 3 приведены погрешности отклонений расчетных значений вязко-

Таблица 2

Усредненные значения параметров для дробных моделей
[The averaged parameter values for the fractional models]

Fractional Models	$\bar{\alpha}$	\bar{E}_1 , MPa	\bar{E}_2 , MPa	$\bar{\eta}$
The Scott Blair's fractional model (7)	0.179	—	—	289.847
The Voigt's fractional model (14)	0.359	128.971	—	150.102
The Maxwell's fractional model (3)	0.179	—	955.472	289.847
The Kelvin's fractional model (9)	0.359	128.971	955.472	150.102
The Zener's fractional model (15)	0.285	1078.692	92.418	143.029

Таблица 3

Погрешности аппроксимаций (Δ , %) для всех исследуемых моделей после осреднения параметров для пяти реализаций [The approximation errors Δ (in percentages) for all investigated models after averaging parameters for the five realizations]

Fractional Models	Stresses σ_0 , MPa				
	4.655	6.288	8.738	10.372	12.005
The model (7)	19.139	12.538	10.192	13.237	15.745
The model (14)	18.580	8.892	4.841	11.062	12.273
The model (3)	19.792	9.671	8.578	12.609	14.429
The model (9)	19.325	6.606	3.964	11.153	11.843
The model (15)	19.018	7.394	4.937	11.438	12.527

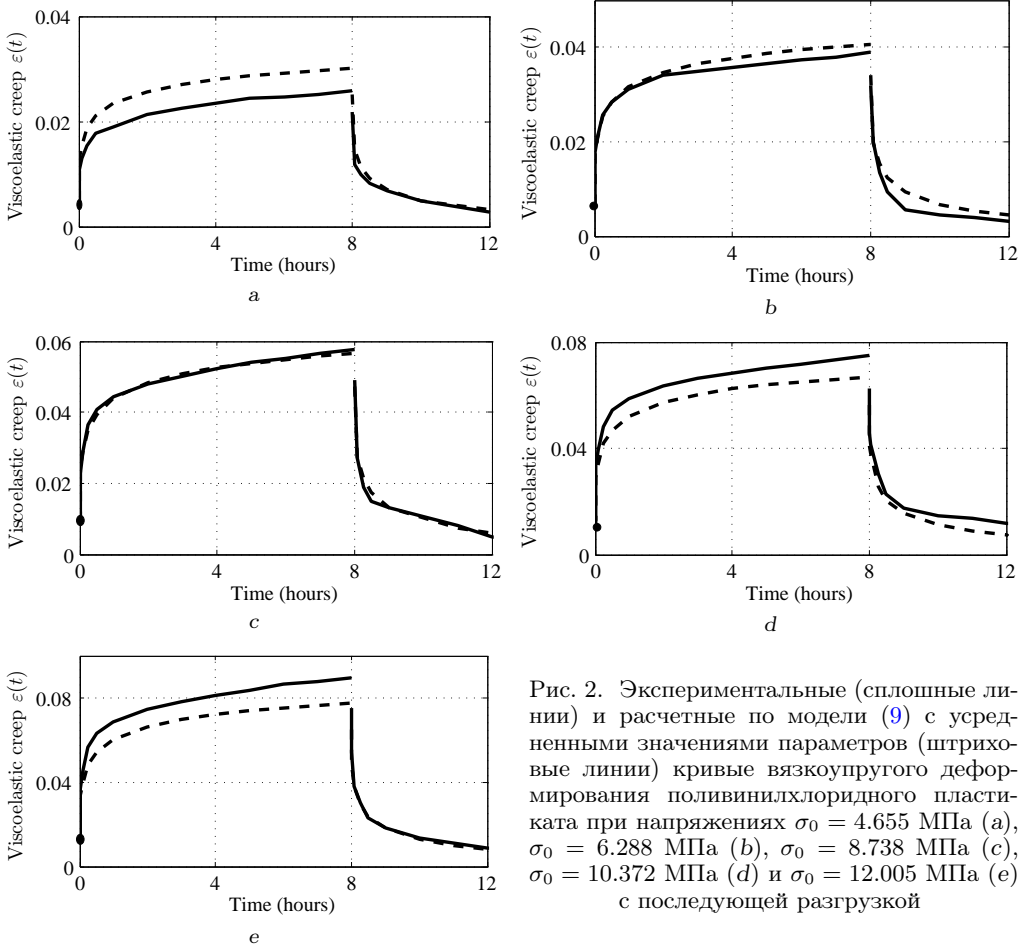


Рис. 2. Экспериментальные (сплошные линии) и рассчитанные по модели (9) с усредненными значениями параметров (штриховые линии) кривые вязкоупругого деформирования поливинилхлоридного пластика при напряжениях $\sigma_0 = 4.655$ МПа (a), $\sigma_0 = 6.288$ МПа (b), $\sigma_0 = 8.738$ МПа (c), $\sigma_0 = 10.372$ МПа (d) и $\sigma_0 = 12.005$ МПа (e) с последующей разгрузкой

[Figure 2. Experimental (solid line) and calculated by the Kelvin's fractional model (9) with averaged values of parameters (dashed line) viscoelastic creep curves of the flexible PVC at the stresses $\sigma_0 = 4.655$ MPa (a), $\sigma_0 = 6.288$ MPa (b), $\sigma_0 = 8.738$ MPa (c), $\sigma_0 = 10.372$ MPa (d), and $\sigma_0 = 12.005$ MPa (e) with subsequent unloading]

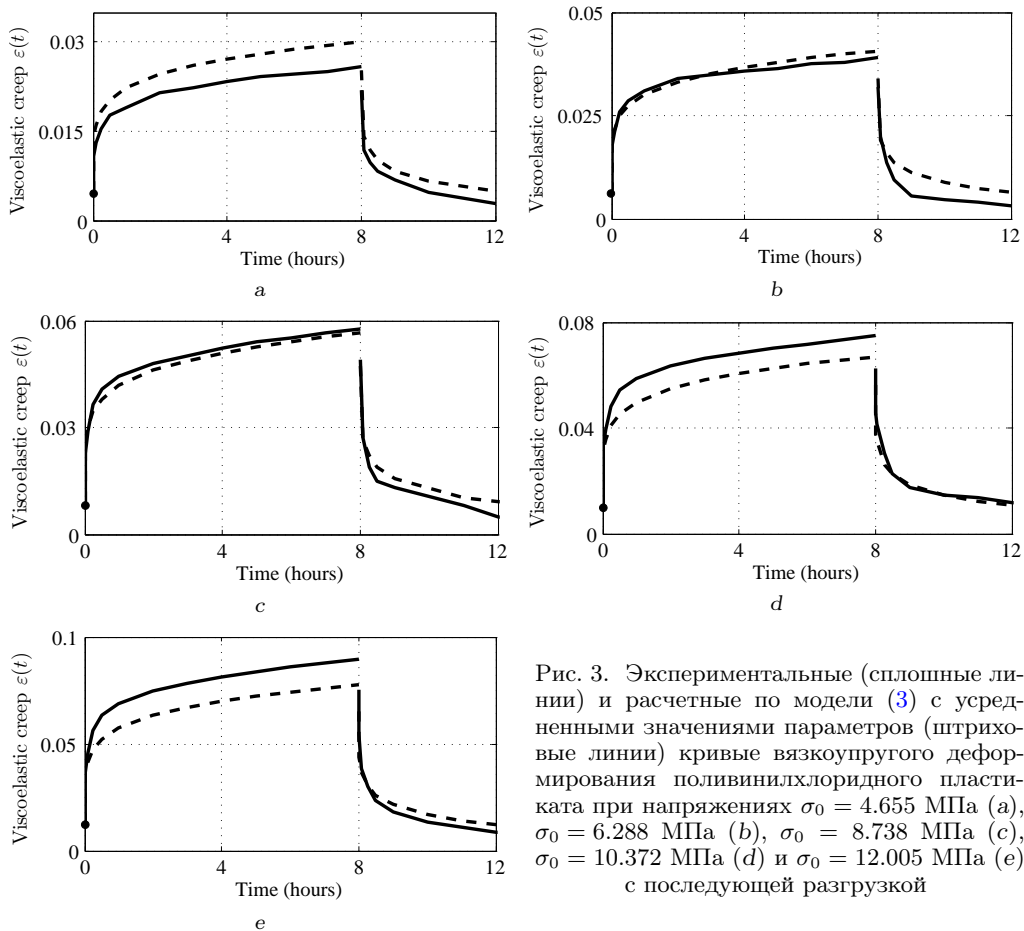


Рис. 3. Экспериментальные (сплошные линии) и рассчитанные по модели (3) с усредненными значениями параметров (штриховые линии) кривые вязкоупругого деформирования поливинилхлоридного пластика при напряжениях $\sigma_0 = 4.655$ МПа (a), $\sigma_0 = 6.288$ МПа (b), $\sigma_0 = 8.738$ МПа (c), $\sigma_0 = 10.372$ МПа (d) и $\sigma_0 = 12.005$ МПа (e) с последующей разгрузкой

[Figure 3. Experimental (solid line) and calculated by the Maxwell's fractional model (3) with averaged values of parameters (dashed line) viscoelastic creep curves of the flexible PVC at the stresses $\sigma_0 = 4.655$ MPa (a), $\sigma_0 = 6.288$ MPa (b), $\sigma_0 = 8.738$ MPa (c), $\sigma_0 = 10.372$ MPa (d), and $\sigma_0 = 12.005$ MPa (e) with subsequent unloading]

упругой деформации от экспериментальных для всех пяти моделей с усредненными параметрами, вычисленные по формуле (13) при каждом уровне напряжений. Средняя же погрешность по всем пяти реализациям для модели Скотт Блэра равна 14.170 %, для дробных аналогов модели Фойхта — 11.130 %, Максвелла — 13.016 %, Кельвина — 10.578 % и Зенера — 11.063 %. Таким образом, наилучшее приближение теоретической кривой к экспериментальным значениям дает дробный аналог модели Кельвина. В качестве иллюстрации на рис. 2 и 3 штриховой линией построены расчетные значения вязкоупругой деформации по моделям (9) и (3) соответственно с усредненными коэффициентами.

Отметим, что в настоящей работе все вычисления и графические построения производились в пакете MATLAB, а для вычисления дробной экспоненциальной функции $\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t)$ использован «Автоматизированный исследовательский комплекс «MitLef».¹

3. Выводы. Сравнительный анализ погрешностей отклонений расчетных кривых от экспериментальных для всех моделей показал, что дробный аналог модели Кельвина наилучшим образом аппроксимирует экспериментальные данные, полученные при растяжении поливинилхлоридного стержня. Однако по результатам вычислений средней погрешности отклонений расчетных кривых с усредненными параметрами для пяти уровней напряжений по каждой модели видно, что дробная модель Кельвина с коэффициентами $\bar{\alpha}$, \bar{E}_1 , \bar{E}_2 , $\bar{\eta}$ не столь существенно улучшает аппроксимацию экспериментальных данных в сравнении с другими моделями. Близкие результаты дают также дробный аналог модели Фойхта с тремя параметрами и Зенера с четырьмя параметрами.

Декларация о финансовых и других взаимоотношениях. Исследование не имело спонсорской поддержки. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена автором. Автор не получил гонорар за статью.

ORCID

Луиза Гадильевна Унгарова: <http://orcid.org/0000-0001-5388-8101>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Огородников Е. Н., Радченко В. П., Унгарова Л. Г. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 167–194. doi: [10.14498/vsgtu1456](https://doi.org/10.14498/vsgtu1456).
2. Радченко В. П., Голудин Е. П. Феноменологическая стохастическая модель изотермической ползучести поливинилхлоридного пластика // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 1(16). С. 45–52. doi: [10.14498/vsgtu571](https://doi.org/10.14498/vsgtu571).
3. Volterra V. Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità // *Rend. Acc. Naz. Lincei*, 1909. vol. 18. pp. 295–301.
4. Volterra V. *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publ., Inc., 1959. 226 pp.
5. Boltzmann L. Theorie der elastischen Nachwirkung (Theory of elastic after effects) // *Wien. Ber.*, 1874. vol. 70. pp. 275–306; Boltzman L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung

¹Электронный ресурс «Автоматизированный исследовательский комплекс «MitLef»/ Н. С. Яшагин, Е. Н. Огородников, Зарег. в ОФЭРНиО № 17486 от 11.10.2011 г. и ФГНУ ЦИТиС № 50201151294 от 18.11.2011 г.

- (On the elastic after effect) // *Pogg. Ann.* (2), 1878. vol. 5. pp. 430–432; Boltzman L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung / *Wissenschaftliche Abhandlungen*. vol. 2 / Cambridge Library Collection; ed. Friedrich Hasenöhr. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. pp. 318–320. doi: [10.1017/CB09781139381437.015](https://doi.org/10.1017/CB09781139381437.015).
6. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // *ПММ*, 1948. Т. 12, № 1. С. 53–62.
 7. Duffing G. Elastizität und Reibung beim Riemetrieb (Elasticity and friction of the belt drive) // *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*, 1931. vol. 2, no. 3. pp. 99–104. doi: [10.1007/BF02578795](https://doi.org/10.1007/BF02578795).
 8. Gemant A. A Method of Analyzing Experimental Results Obtained from Elasto-Viscous Bodies // *J. Appl. Phys.*, 1936. vol. 7. pp. 311–317. doi: [10.1063/1.1745400](https://doi.org/10.1063/1.1745400).
 9. Gemant A. On fractional differentials // *Philos. Mag., VII. Ser.*, 1938. vol. 25. pp. 540–549.
 10. Бронский А. П. Явление последствия в твердом теле // *ПММ*, 1941. Т. 5, № 1. С. 31–56.
 11. Слонимский Г. Л. О законах деформации реальных материалов // *ЖТФ*, 1939. Т. 9, № 20. С. 1791–1799.
 12. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // *ПММ*, 1948. Т. 12, № 3. С. 251–260.
 13. Булгаков И. И. *Ползучесть полимерных материалов*. М.: Наука, 1973. 288 с.
 14. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 198. San Diego: Academic Press, 1999. xxiv+340 pp.
 15. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006. xx+523 pp.
 16. Учайкин В. В. *Метод дробных производных*. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
 17. Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models*. Hackensack, NJ: World Scientific, 2010, xx+347 pp. doi: [10.1142/9781848163300](https://doi.org/10.1142/9781848163300).
 18. Schmidt A., Gaul L. Parameter Identification and FE Implementation of a Viscoelastic Constitutive Equation Using Fractional Derivatives // *Proc. Appl. Math. Mech.*, 2002. vol. 1(1). pp. 153–154. doi: [10.1002/1617-7061\(200203\)1:1<153::AID-PAMM153>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/1617-7061(200203)1:1<153::AID-PAMM153>3.0.CO;2-J).
 19. Lewandowski R., Chorażyczewski B. Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers // *Computers and Structures*, 2009. vol. 88, no. 1–2. pp. 1–17. doi: [10.1016/j.compstruc.2009.09.001](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.09.001).
 20. Работнов Ю. Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.
 21. Звонов Е. Н., Малинин Н. И., Паперник Л. Х., Цейтлин Б. М. Определение характеристик ползучести линейных упруго-наследственных материалов с использованием ЭЦВМ // *Изв. АН СССР, МТТ*, 1968. № 5. С. 76–85.
 22. Vasques C. M. A., Dias Rodrigues J., Moreira R. A. S. Experimental identification of GHM and ADF parameters for viscoelastic damping modeling / *III European Conference on Computational Mechanics*. Berlin: Springer, 2006. doi: [10.1007/1-4020-5370-3_173](https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_173).
 23. Ерохин С. В., Алероев Т. С., Фриштер Л. Ю., Колесниченко А. В. Параметрическая идентификация математической модели вязкоупругих материалов с использованием производных дробного порядка // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2015. Т. 11, № 3. С. 82–86.
 24. Абусайтова Л. Г., Огородников Е. Н. О некоторых специальных функциях, связанных с функцией Миттаг–Леффлера, их свойствах и применении / *Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики: Материалы X Школы молодых ученых*. Нальчик: КБНЦ РАН, 2012. С. 13–15.
 25. Bateman G., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*. vol. 1. New York: McGraw-Hill, 1953. 302 pp.

26. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Некоторые специальные функции в решении задачи Коши для одного дробного осцилляционного уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. № 1(18). С. 276–279. doi: [10.14498/vsgtu685](https://doi.org/10.14498/vsgtu685).
27. Джрбашян М. М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*. М.: Наука, 1966. 672 с.
28. Hooke R., Jeeves T. A. “Direct Search” Solution of Numerical and Statistical Problems // *Journal of the ACM (JACM)*, 1961. no. 2. pp. 212–229. doi: [10.1145/321062.321069](https://doi.org/10.1145/321062.321069).

Поступила в редакцию 18/XI/2016;
в окончательном варианте — 04/XII/2016;
принята в печать — 09/XII/2016.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[*J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.*], 2016, vol. 20, no. 4, pp. 691–706

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1523>

MSC: 74D10, 26A33

THE USE OF LINEAR FRACTIONAL ANALOGUES RHEOLOGICAL MODELS IN THE PROBLEM OF APPROXIMATING THE EXPERIMENTAL DATA ON THE STRETCH POLYVINYLCHLORIDE ELASTRON

L. G. Ungarova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

We consider and analyze the uniaxial phenomenological models of viscoelastic deformation based on fractional analogues of Scott Blair, Voigt, Maxwell, Kelvin and Zener rheological models. Analytical solutions of the corresponding differential equations are obtained with fractional Riemann–Liouville operators under constant stress with further unloading, that are written by the generalized (two-parameter) fractional exponential function and contains from two to four parameters depending on the type of model. A method for identifying the model parameters based on the background information for the experimental creep curves with constant stresses was developed. Non-linear problem of parametric identification is solved by two-step iterative method. The first stage uses the characteristic data points diagrams and features in the behavior of the models under unrestricted growth of time and the initial approximation of parameters are determined. At the second stage, the refinement of these parameters by coordinate descent (the Hooke–Jeeves’s method) and minimizing the functional standard deviation for calculated and experimental values is made. Method of identification

© 2016 Samara State Technical University.

Please cite this article in press as:

Ungarova L. G. The use of linear fractional analogues rheological models in the problem of approximating the experimental data on the stretch polyvinylchloride elastron, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 4, pp. 691–706. doi: [10.14498/vsgtu1523](https://doi.org/10.14498/vsgtu1523). (In Russian)

Author Details:

Luiza G. Ungarova (algluiza@gmail.com), Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.

is realized for all the considered models on the basis of the known experimental data uniaxial viscoelastic deformation of Polyvinylchloride Elastron at a temperature of 20°C and five the tensile stress levels. Table-valued parameters for all models are given. The errors analysis of constructed phenomenological models is made to experimental data over the entire ensemble of curves viscoelastic deformation. It was found that the approximation errors for the Scott Blair fractional model is 14.17%, for the Voigt fractional model is 11.13%, for the Maxwell fractional model is 13.02%, for the Kelvin fractional model 10.56%, for the Zener fractional model is 11.06%. The graphs of the calculated and experimental dependences of viscoelastic deformation of Polyvinylchloride Elastron are submitted.

Keywords: fractional rheological models, parameter identification, Riemann–Liouville operator, experimental data, polyvinylchloride elastron, approximation error.

Declaration of Financial and Other Relationships. The research has not had any sponsorship. The author is absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. The author has approved the final version of manuscript. The author has not received any fee for the article.

ORCID

Luiza G. Ungarova: <http://orcid.org/0000-0001-5388-8101>

REFERENCES

1. Ogorodnikov E. N., Radchenko V. P., Ungarova L. G. Mathematical modeling of hereditary elastically deformable body on the basis of structural models and fractional integro-differentiation Riemann-Liouville apparatus, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol.20, no.1, pp. 167–194 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1456](https://doi.org/10.14498/vsgtu1456).
2. Radchenko V. P., Goludin E. P. Phenomenological stochastic isothermal creep model for an polivinylnchloride elastron, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2008, no. 1(16), pp. 45–52 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu571](https://doi.org/10.14498/vsgtu571).
3. Volterra V. Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, 1909, vol. 18, pp. 295–301.
4. Volterra V. *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. New York, Dover Publ., Inc., 1959, 226 pp.
5. Boltzmann L. Theorie der elastischen Nachwirkung (Theory of elastic after effects), *Wien. Ber.*, 1874, vol. 70, pp. 275–306; Boltzman L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung (On the elastic after effect), *Pogg. Ann.* (2), 1878, vol. 5, pp. 430–432; Boltzman L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung, In: *Wissenschaftliche Abhandlungen*, vol. 2, Cambridge Library Collection; ed. Friedrich Hasenöhr. Cambridge, Cambridge University Press, 2012, pp. 318–320. doi: [10.1017/CB09781139381437.015](https://doi.org/10.1017/CB09781139381437.015).
6. Rabotnov Yu. N. Equilibrium of an elastic medium with after-effect, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2014, vol. 17, no. 3, pp. 684–696. doi: [10.2478/s13540-014-0193-1](https://doi.org/10.2478/s13540-014-0193-1).
7. Duffing G. Elastizität und Reibung beim Riemetrieb (Elasticity and friction of the belt drive), *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*, 1931, vol. 2, no. 3, pp. 99–104. doi: [10.1007/BF02578795](https://doi.org/10.1007/BF02578795).
8. Gemant A. A Method of Analyzing Experimental Results Obtained from Elasto-Viscous Bodies, *J. Appl. Phys.*, 1936, vol. 7, pp. 311–317. doi: [10.1063/1.1745400](https://doi.org/10.1063/1.1745400).
9. Gemant A. On fractional differentials, *Philos. Mag., VII. Ser.*, 1938, vol. 25, pp. 540–549.
10. Bronskij A. P. Residual effect in rigid bodies, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1941, vol. 5, no. 1, pp. 31–56 (In Russian).

11. Slonimsky G. L. On the laws of deformation of real materials. I. The theories of Maxwell and Boltzmann, *Acta physicochim. URSS*, 1940, vol. 12, pp. 99–128.
12. Gerasimov A. N. A generalization of linear laws of deformation and its application to internal friction problem, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1948, vol. 12, no. 3, pp. 251–260 (In Russian).
13. Bulgakov I. I. *Polzuchest' polimernykh materialov* [Creep of Polymer Materials]. Moscow, Nauka, 1973, 288 pp. (In Russian)
14. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego, Academic Press, 1999, xxiv+340 pp.
15. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xx+523 pp.
16. Uchaikin V. V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [The fractional derivatives method]. Ulyanovsk, Artishok, 2008, 512 pp. (In Russian)
17. Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models*. Hackensack, NJ, World Scientific, 2010, xx+347 pp. doi: [10.1142/9781848163300](https://doi.org/10.1142/9781848163300).
18. Schmidt A., Gaul L. Parameter Identification and FE Implementation of a Viscoelastic Constitutive Equation Using Fractional Derivatives, *Proc. Appl. Math. Mech.*, 2002, vol. 1(1), pp. 153–154. doi: [10.1002/1617-7061\(200203\)1:1<153::AID-PAMM153>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/1617-7061(200203)1:1<153::AID-PAMM153>3.0.CO;2-J).
19. Lewandowski R., Chorążyczewski B. Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers, *Computers and Structures*, 2009, vol. 88, no. 1–2, pp. 1–17. doi: [10.1016/j.compstruc.2009.09.001](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.09.001).
20. *Elements of hereditary solid mechanics*. Moscow, Mir Publ., 1980, 388 pp.
21. Zvonov E. N., Malinin N. I., Papernik L. H., Ceytlin B. M. Determination of the creep characteristics of linear elastic-hereditary materials using an electronic digital computer, *Izv. AN SSSR, MTT*, 1968, no. 5, pp. 76–85 (In Russian).
22. Vasques C. M. A., Dias Rodrigues J., Moreira R. A. S. Experimental identification of GHM and ADF parameters for viscoelastic damping modeling, In: *III European Conference on Computational Mechanics*. Berlin, Springer, 2006. doi: [10.1007/1-4020-5370-3_173](https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_173).
23. Erokhin S. V., Aleroev T. S., Frishter L. Yu., Kolesnichenko A. V. Parameter identification of the viscoelastic materials mathematical model using fractional derivatives, *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 82–86 (In Russian).
24. Abusaitova L. G., Ogorodnikov E. N. Some special functions associated with the Mittag-Leffler function, their properties, and applications, In: *Nelokal'nye kraevye zadachi i problemy sovremennogo analiza i informatiki* [Non-local boundary value problems and problems of modern analysis and informatics]. Nalchik, 2012, pp. 13–15 (In Russian).
25. Bateman G., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*, vol. 1. New York, McGraw-Hill, 1953, 302 pp.
26. Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S. Some Special Functions in the Solution To Cauchy Problem for a Fractional Oscillating Equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2009, no. 1(18), pp. 276–279 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu685](https://doi.org/10.14498/vsgtu685).
27. Dzhrbashyan M. M. *Integral'nye preobrazovaniia i predstavleniia funktsii v kompleksnoi oblasti* [Integral Transforms and Representation of Functions in Complex Domain]. Moscow, Nauka, 1966, 672 pp. (In Russian)
28. Hooke R., Jeeves T. A. “Direct Search” Solution of Numerical and Statistical Problems, *Journal of the ACM (JACM)*, 1961, no. 2, pp. 212–229. doi: [10.1145/321062.321069](https://doi.org/10.1145/321062.321069).

Received 18/XI/2016;
 received in revised form 04/XII/2016;
 accepted 09/XII/2016.