



УДК 539.3

О методе ортогональных проекций в теории упругости

В. В. Стружанов

Институт машиноведения УрО РАН,
Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

Аннотация

Метод ортогональных проекций применен к решению задач по определению напряжений в упругих деформируемых телах, что позволило ослабить требования к гладкости функций, задающих внешние усилия, и к компонентам тензора первоначальных деформаций, которые вызывают появление уравновешенных собственных напряжений. Приведены примеры расчета закалочных напряжений в круговом цилиндре и остаточных напряжений после усадки связующего в композитном цилиндре, изготовленном методом намотки. На приведенных примерах показана эффективность метода ортогональных проекций для получения, по крайней мере, обобщенных решений краевых задач теории упругости по определению напряженного состояния деформируемых тел.

Ключевые слова: энергетические гильбертовы подпространства, ортогональные пространства, ортонормированная система, ортопроектор, остаточные напряжения.

Получение: 12 апреля 2017 г. / Исправление: 9 июня 2017 г. /

Принятие: 12 июня 2017 г. / Публикация онлайн: 10 июля 2017 г.

Введение. Всякое гильбертово пространство можно разбить на прямую сумму взаимно ортогональных подпространств [1–4]. То есть каждый элемент исходного пространства единственным образом представим суммой его ортогональных проекций в эти подпространства. На данном свойстве основан так называемый метод ортогональных проекций [5–9], позволяющий находить обобщенные решения систем дифференциальных уравнений, не прибегая к их непосредственному интегрированию. Эффективное применение этого метода в теории упругости связано с введением энергетических гильбертовых пространств тензоров напряжений [6].

Особенно продуктивно этот метод может быть использован при решении краевых задач по определению собственных напряжений, которые появля-

Статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Стружанов В.В. О методе ортогональных проекций в теории упругости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 2. С. 308–325. doi: [10.14498/vsgtu1542](http://doi.org/10.14498/vsgtu1542).

Сведения об авторе

Валерий Владимирович Стружанов <http://orcid.org/0000-0002-3669-2032>

доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. микромеханики материалов; e-mail: stru@imach.uran.ru

ются в деталях конструкций или при изготовлении, или при различных способах технологической обработки и упрочнения [10–15]. Дело в том, что до приложения внешней нагрузки в теле могут быть созданы так называемые первоначальные деформации, то есть остаточные деформации, свободные от связей малых элементов. Если они не удовлетворяют условиям совместности, то возникают усилия (собственные напряжения), создающие дополнительные деформации, такие, что суммарные деформации уже совместны и поэтому тело сохраняет сплошность [16]. Характерным свойством, присущим тензору первоначальных деформаций, является то, что их компоненты могут быть разрывными функциями (например, при усадке связующего в композитах), и тогда традиционные методы для решения соответствующих краевых задач непригодны.

В данной работе показано применение метода ортогональных проекций к решению задач теории упругости по определению напряжений, возникающих в телах под действием нагрузок, заданных, по крайней мере, интегрируемыми функциями, а также самоуравновешенных собственных напряжений, отвечающих первоначальному тензору деформаций, компонентами которых могут быть и разрывные функции. В одном из подпространств энергетического гильбертова пространства элементов, заданных в цилиндрических телах, находящихся в условиях плоской деформации, построен ряд ортонормированных базисов, необходимых для реализации метода. Приведены примеры рассчитанных распределений закалочных напряжений в цилиндрах и остаточных напряжений после усадки связующего в композитном цилиндре, изготовленном методом намотки.

1. Гильбертовы пространства тензоров. Пусть V — область в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 , ограниченная кусочно-гладкой поверхностью Γ .

Множество вещественных функций (тензоров нулевого ранга), определенных в V и квадратично суммируемых в V , есть линеал. Определим на этом линеале скалярное произведение, полагая [4]

$$(\varphi, \psi) = \int_V \varphi(x)\psi(x) dV,$$

где $x \in V$. Вводом скалярного произведения этот линеал превращен в вещественное сепарабельное гильбертово пространство $L_2(V)$ с нормой

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi).$$

Возьмем теперь линеал векторных функций (тензоров первого ранга), каждая из которых имеет компоненты, принадлежащие классу $L_2(V)$. На данном линеале введем скалярное произведение по формуле

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dv,$$

где (\mathbf{u}, \mathbf{v}) — трехмерные векторы, а точка означает скалярное произведение векторов. Тем самым получаем гильбертово пространство $L_2^v(V)$ с нормой

$$\|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u}),$$

обладающее свойством пространства $L_2(V)$.

И, наконец, рассмотрим линеал симметричных тензоров второго ранга с компонентами, принадлежащими классу $L_2(V)$. Превратим его в гильбертово пространство, определив на нем скалярное произведение и норму по формулам [3]

$$[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \int_V \mathbf{p} \cdot \cdot \mathbf{q} dV = \int_V p_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} dV, \quad \|\mathbf{p}\|^2 = [\mathbf{p}, \mathbf{p}],$$

где двумя точками обозначено двойное скалярное произведение тензоров [17]. Здесь $p_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}, (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ — компоненты тензоров, осуществляется суммирование по повторяющимся греческим индексам. Данное пространство $L_2^t(V)$ также обладает всеми свойствами пространства $L_2(V)$.

2. Энергетические пространства тензоров второго ранга. Возьмем симметричный положительно определенный тензор четвертого ранга $S(x)$, $x \in V$, в общем случае неоднородный и анизотропный. Будем рассматривать его как положительно определенный оператор, действующий в полном гильбертовом пространстве $L_2^t(V)$ по правилу $\mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{p} = \mathbf{q}$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in L_2^t(V)$. Построим энергетическое пространство $T(V)$ [6], определив на элементах из $L_2^t(V)$ скалярное произведение и норму по формулам

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = [\mathbf{q}, \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{p}] = \int_V \mathbf{q} \cdot \cdot \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{p} dV, \quad \|\mathbf{p}\|^2 = (\mathbf{p}, \mathbf{p}). \quad (1)$$

Непосредственно проверяется, что данные выражения удовлетворяют всем аксиомам скалярного произведения и нормы [6]:

$$(\lambda_1 \mathbf{q}_1 + \lambda_2 \mathbf{q}_2, \mathbf{p}) = \lambda_1 (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}) + \lambda_2 (\mathbf{q}_2, \mathbf{p}), \quad \lambda_1, \lambda_2 = \text{const}; \quad \mathbf{p}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in T;$$

далее в силу положительной определенности тензора S имеем

$$(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \int_V \mathbf{p} \cdot \cdot \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{p} dV \geq 0, \quad \lambda > 0$$

и, если $(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 0$, то $\mathbf{p} = 0$; наконец,¹

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_V S_{\alpha\beta\gamma\delta} q_{\alpha\beta} p_{\gamma\delta} dV = (\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Пространство $T(V)$ из-за положительной определенности оператора \mathbf{S} и сепарабельности исходного пространства $L_2^t(V)$ обладает всеми свойствами пространства $L_2^t(V)$ [6].

Выделим в пространстве $T(V)$ подпространства [6]

$$T_1 = \{\mathbf{p}' : \mathbf{e}' = \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{p}', \mathbf{e}' = \text{def } \mathbf{u}\}, \quad T_2 = \{\mathbf{p}'' : \nabla \cdot \mathbf{p}'' = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}'' = 0\},$$

замкнутые своими предельными точками. Здесь \mathbf{n} — вектор внешней нормали к поверхности Γ , \mathbf{u} — вектор с компонентами из $L_2(V)$, ∇ — дифференциальный оператор набла ($\nabla \cdot \mathbf{p}'' = \text{div } \mathbf{p}''$) [17], def — оператор деформации,

¹Ниже проводится суммирование по повторяющимся греческим индексам $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, 3$.

преобразующий векторы из $L_2^t(V)$ в симметричные тензоры второго ранга, компоненты которого определяются по правилу

$$e'_{ij} = (\text{def } \mathbf{u})_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где u_i — координаты вектора, запятой обозначаются производная по соответствующей координате x_i точки области V .

Элементы подпространства T_1 можно трактовать как тензоры напряжений, являющиеся решениями краевой задачи теории упругости при всевозможных объемных и поверхностных силах:

$$\nabla \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{f}, \quad \mathbf{e}' = \text{def } \mathbf{u}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{e}', \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{t}. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x)$ ($x \in V$) — вектор объемных сил, $\mathbf{t} = \mathbf{t}(x)$ ($x \in \Gamma$) — вектор поверхностных сил, $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}$ — тензор модулей упругости, \mathbf{S} — тензор модулей податливости, \mathbf{p}' — тензор напряжений, \mathbf{e}' — тензор деформаций, $\nabla \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{f}$ — уравнения равновесия, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{t}$ — граничные условия в напряжениях. Элементы подпространства T_2 можно трактовать как решения краевой задачи

$$\nabla \cdot \mathbf{p}'' = \mathbf{0}, \quad \mathbf{e}' = \text{def } \mathbf{u}, \quad \mathbf{p}'' = \mathbf{C} \cdot \cdot (\mathbf{e}' - \boldsymbol{\varepsilon}^*), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}'' = \mathbf{0} \quad (3)$$

для всевозможных симметричных тензоров второго ранга $\boldsymbol{\varepsilon}^*$. Тензоры \mathbf{p}'' представляют собой тензоры собственных самоуравновешенных в области V напряжений, возникающих в теле при создании в нем поля первоначальных (собственных) деформаций, заданного тензором $\boldsymbol{\varepsilon}^*$. При данной трактовке норма (1) задает выражение для потенциальной энергии упругих деформаций.

Пространство T является ортогональной суммой подпространства T_1 и T_2 , то есть $T = T_1 \oplus T_2$. Действительно, если $\mathbf{p}' \in T_1$, а $\mathbf{p}'' \in T_2$, то, используя формулу Остроградского—Гаусса, находим

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}'', \mathbf{p}') &= \int_V \mathbf{p}'' \cdot \cdot \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{p}' dV = \int_V \mathbf{p}'' \cdot \cdot \mathbf{e}' dV = \int_V \mathbf{p}'' \cdot \cdot \text{dev } \mathbf{u} dV = \\ &= - \int_V \nabla \cdot \mathbf{p}'' \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}'' \cdot \mathbf{u} d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Отсюда подпространства T_1 и T_2 ортогональны. Далее любой тензор $\mathbf{p} \in T$ всегда можно единственным образом представить в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}'', \quad \mathbf{p}' \in T_1, \quad \mathbf{p}'' \in T_2.$$

Предположим, что составляющие тензора \mathbf{p} непрерывны и непрерывно дифференцируемы в $(V + \Gamma)$. Найдем

$$\nabla \cdot \mathbf{p} = \mathbf{f}', \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{t}'$$

и из решения задачи (2) с данными значениями объемных и поверхностных сил определим $\mathbf{p}' \in T_1$. Достаточно положить $\mathbf{p}'' = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Аналогично изложенному выше введем на элементах $L_2^t(V)$ энергетическое пространство $H(V)$ положительно определенного оператора \mathbf{C} ($\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}$), определив скалярное произведение и норму по формулам

$$(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta})_H = [\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}] = \int_V \boldsymbol{\theta} \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{e} dV, \quad \|\mathbf{e}\|_H^2 = (\mathbf{e}, \mathbf{e})_H, \quad \mathbf{e}, \boldsymbol{\theta} \in L_2^t(V).$$

Гильбертовы пространства T и H линейно изометричны в силу их сепарабельности и бесконечномерности [4]. Оператором линейной изометрии, отображающим H на T , является тензор \mathbf{C} . Действительно, пусть $\mathbf{e} \in H$, $\mathbf{p} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{e} \in T$. Тогда отображение H в T осуществляется с сохранением нормы

$$(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = (\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{e}, \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{e}) = [\mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{e}, \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{e}] = [\mathbf{e}, \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{e}] = (\mathbf{e}, \mathbf{e})_H.$$

Очевидно, что оператором линейной изометрии, отображающим T на H , является тензор \mathbf{S} . Применяя теперь оператор \mathbf{S} к элементам подпространств T_1 и T_2 , находим, что эти подпространства линейно изометричны подпространствам $H_1 = \{\mathbf{e}' : \mathbf{e}' = \text{def } \mathbf{u}\}$, $H_2 = \{\mathbf{e}'' : \mathbf{e}'' = \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{p}'', \mathbf{p}'' \in T_2\}$ и $H = H_1 \oplus H_2$. Заметим, что элементами подпространства H_1 являются тензоры деформации, удовлетворяющие условиям совместности [17]

$$\text{Jnk } \mathbf{e}' = \text{Jnk } \text{dev } \mathbf{u} = 0,$$

где Jnk — оператор несовместности. Элементами подпространства H_2 являются тензоры собственной несовместной деформации, которые вызывают появление полей самоуравновешенных напряжений и связаны с этими напряжениями непосредственно законом Гука. Из данных рассуждений следует, что закон Гука в линейной теории упругости осуществляет линейную изометрию между пространствами тензоров деформации и тензоров напряжений и наоборот:

$$\mathbf{p} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{p}.$$

3. Ортонормированные базисы. Так как подпространства полного сепарабельного гильбертова пространства сами являются полными сепарабельными гильбертовыми пространствами, в них существуют ортонормированные базисы [4]. Построим такой базис в подпространстве H_1 . Рассмотрим сначала пространство $L'_2(V)$ и представим его суммой подпространств

$$L''_2 = \left\{ \mathbf{u}'' : \mathbf{u}'' = \mathbf{A} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{r} \right\}, \quad L'_2 = \left\{ \mathbf{u}' : \int_V \mathbf{u}' dV = 0, \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{u}' dV = 0 \right\},$$

где \mathbf{A} — произвольный постоянный вектор, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор переменной точки области V , «косой крестик» означает векторное произведение векторов, $\mathbf{\Lambda}$ — кососимметричная матрица с постоянными компонентами:

$$\Lambda_{11} = \Lambda_{22} = \Lambda_{33} = 0, \quad \Lambda_{12} = -\Lambda_{21} = \gamma,$$

$$\Lambda_{31} = -\Lambda_{13} = \beta, \quad \Lambda_{23} = -\Lambda_{32} = \alpha.$$

Подпространства L'_2 , L''_2 замкнуты своими предельными точками. Элементами подпространства L''_2 являются все нетривиальные решения уравнения $\text{def } \mathbf{u} = 0$, то есть векторы жесткого смещения тела V . Элементами подпространства L'_2 являются векторы перемещения точек тела V , главный вектор и главный момент которых равны нулю (исключается жесткое смещение тела) и которые связаны с деформацией объема V по правилу $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{def } \mathbf{u}$ (производные здесь понимаются в обобщенном смысле). Таким образом, оператор def отображает элементы из L'_2 в подпространство H_1 .

Подпространства L_2'' и L_2' ортогональны. Действительно,

$$(\mathbf{u}'', \mathbf{u}') = \int_V (\mathbf{A} + \mathbf{\Lambda r}) \cdot \mathbf{u}' dV = \mathbf{A} \cdot \int_V \mathbf{u}' dV + \gamma \int_V (u'_1 x_2 - u'_2 x_1) dV + \\ + \beta \int_V (u'_3 x_1 - u'_1 x_3) dV + \alpha \int_V (u'_2 x_3 - u'_3 x_2) dV = 0$$

(в силу равенства нулю главного вектора и главного момента вектора \mathbf{u}'). Кроме этого, каждый элемент из L_2'' единственным образом представим суммой $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}''$. Достаточно взять за \mathbf{u}'' вектор $\mathbf{A} + \mathbf{\Lambda r}$, где \mathbf{A} и $\mathbf{\Lambda}$ — решения уравнений

$$\mathbf{A} \int_V dV = \int_V \mathbf{u} dV, \quad \int_V \mathbf{u} \times \mathbf{\Lambda r} dV = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{u} dV.$$

После этого $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - (\mathbf{A} + \mathbf{\Lambda r})$. Итак, $L_2'' = L_2' \oplus L_2''$.

Возьмем теперь в $L_2''(V)$ некоторую последовательность линейно независимых векторов \mathbf{u}_k , $k = 1, 2, \dots$. Каждый вектор единственным образом представим суммой

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}'_k + \mathbf{u}''_k, \quad \mathbf{u}''_k \in L_2'', \quad \mathbf{u}'_k \in L_2'.$$

Действуя на элементы исходной системы оператором def , получаем

$$\text{def } \mathbf{u}_k = \text{def } \mathbf{u}'_k + \text{def } \mathbf{u}''_k = \mathbf{e}'_k = \text{def } \mathbf{u}'_k,$$

где в силу линейности оператора def последовательность \mathbf{e}'_k является системой линейно независимых элементов подпространства H_1 . Применим к ней процесс ортогонализации Шмидта [4]. Полагаем

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{e}'_1, \quad \boldsymbol{\kappa}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 / \|\boldsymbol{\omega}_1\|_H, \\ \boldsymbol{\omega}_k = \mathbf{e}'_k - \sum_{n=1}^{k-1} (\mathbf{e}'_k, \boldsymbol{\kappa}_n)_H \boldsymbol{\kappa}_n, \quad \boldsymbol{\kappa}'_k = \boldsymbol{\omega}_k / \|\boldsymbol{\omega}_k\|_H, \quad k > 1.$$

Полученную ортонормированную систему \mathbf{e}'_k всегда можно достроить до ортонормального базиса подпространства H_1 [4]. Действуя затем на каждый элемент этого базиса оператором изометрии \mathbf{C} , находим ортонормальный базис $\mathbf{q}'_k = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\kappa}'_k$ подпространства T_1 .

4. Ортонормированные базисы в цилиндрических областях. Возьмем область V_r в виде длинного полого кругового цилиндра с внутренним радиусом a и внешним b . В частном случае $a = 0$. Пусть в V_r задан линейно-квадратично суммируемых функций, зависящих лишь от расстояния r от оси цилиндра ($a \leq r \leq b$). Тогда пространство $L_2''(V_r) = L_2(a, b)$ и скалярное произведение в нем

$$(\varphi, \psi) = 2\pi \int_a^b \varphi(r)\psi(r)r dr.$$

Полагаем далее, что пространство $L_2''(V_r)$ состоит из векторов, направленных по радиусам цилиндра, причем их длина зависит только от r , то есть эти векторы имеют только одну радиальную компоненту из класса $L_2(a, b)$

(остальные две компоненты равны нулю). Теперь пространство $H(V_r)$ состоит из диагональных тензоров с компонентами из $L_2(a, b)$:

$$e_{11} = e_r(r), \quad e_{22} = e_\theta(r), \quad e_{33} = e_z = 0.$$

Это обусловлено тем, что оператор def отображает элементы из $L_2'(V_r)$ в $H_1(V_r)$. Действуя же на векторы из $L_2'(V_r)$ оператором def , записанным в цилиндрической системе координат, получаем

$$e'_r = \frac{du}{dr}, \quad e'_\theta = \frac{u}{r}, \quad e'_z = 0.$$

Здесь и далее индексом r обозначены радиальные напряжения и деформации, индексом θ — тангенциальные, индексом z компоненты, направленные вдоль оси цилиндра, производная функция $u(r) \in L_2(a, b)$ в общем случае понимается в обобщенном смысле, т. е. функция ν является производной функции u , если для произвольной бесконечно дифференцируемой в замкнутой области и равной нулю в окрестности ее границы функции $\varphi(r)$ выполняется равенство

$$(u, \varphi'_r) = -(\nu, \varphi),$$

полученное интегрированием по частям выражения, стоящего слева.

Полагая, что тензоры \mathbf{C} и \mathbf{S} в объеме V_r однородны и изотропны, т. е. их компоненты имеют вид

$$\begin{aligned} C_{ijmn} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}), \\ S_{ijmn} &= -\lambda [2\mu(3\lambda + 2\mu)]^{-1} \delta_{ij} \delta_{mn} + (4\mu)^{-1} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}), \end{aligned}$$

где $\lambda = \nu E[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]^{-1}$, $\mu = E[2(1 + \nu)]^{-1}$ — коэффициенты Ляме; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; δ_{ij} — символ Кронекера, определяющий единичный изотропный тензор второго ранга, $i, j, m, n = 1, 2, 3$, получаем скалярное произведение и норму пространства $H(V_r)$ в виде

$$\begin{aligned} (\varepsilon, e)_{H(V_r)} &= 2\pi \int_a^b \{ \varepsilon_r [(\lambda + 2\mu) e_r + \lambda e_\theta] + \varepsilon_\theta [\lambda e_r + (\lambda + 2\mu) e_\theta] \} r dr, \\ \|\varepsilon\|_{H(V_r)}^2 &= 2\pi \int_a^b [(\lambda + 2\mu)(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2) + 2\lambda \varepsilon_r \varepsilon_\theta] r dr. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что компоненты тензоров, принадлежащих подпространству $H_1(V_r)$, суть деформации, имеющие место при осесимметричном плоском деформированном состоянии цилиндрической области $V(r)$. Квадрат нормы в выражении (4) определяет удвоенную потенциальную энергию цилиндрического тела единичной высоты.

Перейдем теперь к построению базисов в подпространстве $H_1(V_r)$, используя схему, изложенную выше. Подпространство $L_2'(V_r)$ состоит из векторов с одной радиальной компонентой $u_r(r)$. Известно [4], что одной из линейно независимых систем функций одной переменной r , заданных в неограниченной области V_r , является система

$$u_r : r, r^{-1}, r^2, r^{-2}, \dots \quad (5)$$

Применяя оператор def и ортонормируя полученную линейно независимую систему тензоров по методу Шмидта с использованием выражений (4), находим ортонормированную систему в $H_1(V_r)$: $\kappa'_1, \kappa'_2, \dots$. Затем получаем ортонормированную систему в $H_1(V_r)$: $q'_k = C \cdot \kappa'_k$. Отметим, что для осесимметричной задачи в случае плоской деформации закон Гука имеет вид

$$\begin{aligned} q'_r &= E[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]^{-1}[\kappa'_r(1 - \nu) + \nu\kappa'_\theta], \\ q'_\theta &= E[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]^{-1}[\kappa'_\theta(1 - \nu) + \nu\kappa'_r]. \end{aligned}$$

Выпишем компоненты нескольких элементов найденной системы:

$$\begin{aligned} q'_{1r} &= q'_{1\theta} = c(\sqrt{2\pi c(b^2 - a^2)})^{-1}, \quad c = E[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]^{-1}; \\ q'_{2r} &= -q'_{2\theta} = -c(1 - 2\nu)ba(r^2\sqrt{2\pi c(1 - 2\nu)(b^2 - a^2)})^{-1}, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Третий компонент диагонального тензора всегда определяем по формуле

$$q'_z = \nu(q'_r + q'_\theta).$$

Дополним систему (5) непрерывными кусочно-дифференцируемыми функциями специального вида, не изменяющими ее линейной независимости:

$$u_r : r, \frac{1}{r}, \frac{2}{r} \int_a^b z\lambda(z)dz, r^2, \frac{1}{r^2}, \frac{3}{r^2} \int_a^r z^2\lambda(z)dz, \dots, \quad (7)$$

где функция $\lambda(r)$ принимает значения «ноль» или «единица» в заданных отрезках. Ортонормированная система в подпространстве $T_1(V_r)$ имеет вид (компоненты соответствующих тензоров):

$$\begin{aligned} q'_{1r} &= q'_{1\theta} = c[2\pi c(b^2 - a^2)]^{-1/2}, \\ q'_{2r} &= -q'_{2\theta} = -c(1 - 2\nu)ba r^{-2}[2\pi c(1 - 2\nu)(b^2 - a^2)]^{-1/2}, \\ q'_{3r} &= A_1 \left[-\frac{(1 - 2\nu)}{r^2} \int_a^r z\lambda(z)dz + \lambda(r)(1 - \nu) - B_1 \int_a^b r\lambda(r)dr + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2B_2(1 - 2\nu)}{r^2} \int_a^b \frac{1}{r^3} \left(\int_a^r z\lambda(z)dz \right) dr - \frac{B_2(1 - 2\nu)}{r^2} \int_a^b \frac{1}{r} \lambda(r)dr \right], \quad (8) \\ q'_{3\theta} &= A_1 \left[\frac{(1 - 2\nu)}{r^2} \int_a^r z\lambda(z)dz + \lambda(r)\nu - B_1 \int_a^b r\lambda(r)dr - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2B_2(1 - 2\nu)}{r^2} \int_a^b \frac{1}{r^3} \left(\int_a^r z\lambda(z)dz \right) dr + \frac{B_2(1 - 2\nu)}{r^2} \int_a^b \frac{1}{r} \lambda(r)dr \right], \dots, \end{aligned}$$

где

$$B_1 = (b^2 - a^2)^{-1}, \quad B_2 = a^2 b^2 B_1,$$

$$A_1 = 2c \left[8\pi c(1 - \nu) \int_a^b r\lambda(r)dr \left(1 - 2B_1 \int_a^b r\lambda(r)dr \right) \right]^{-1/2}.$$

Пусть $a = 0$ (область V_r — сплошной цилиндр). Тогда ортонормированный базис строим на основе последовательности

$$u_r : r, r^2, r^3, \dots \quad (9)$$

Производя необходимые действия, получаем компоненты тензоров базиса в $T_1(V_r)$:

$$\begin{aligned}
 q'_{1r} &= q'_{1\theta} = c(b\sqrt{2\pi c})^{-1}, \\
 q'_{2r} &= M_1 [(2 - \nu)r - b], \\
 q'_{2\theta} &= M_1 [(1 + \nu)r - b], \\
 q'_{3r} &= M_2 \left[(3 - 2\nu)r^2 - \frac{8}{5}b(2 - \nu)r + \frac{3}{5}b^2 \right], \\
 q'_{3\theta} &= M_2 \left[(1 + 2\nu)r^2 - \frac{8}{5}b(1 + \nu)r + \frac{3}{5} \right], \dots; \\
 M_1 &= c(b^2\sqrt{2\pi c(1 - \nu)}/2)^{-1}, \\
 M_2 &= c(b^3\sqrt{2\pi c(1 - \nu)}/\frac{2}{75})^{-1}, \dots
 \end{aligned} \tag{10}$$

Дополним систему (9) непрерывными кусочно-дифференцируемыми функциями специального вида:

$$u_r : r, \frac{2}{r} \int_0^r z\lambda(z)dz, r^2, \frac{3}{r^2} \int_0^r z\lambda(z)dz, \dots \tag{11}$$

После выполнения необходимых действий находим ортонормированную систему тензоров в $T_1(V_r)$, компоненты которых

$$\begin{aligned}
 q'_{1r} &= q'_{1\theta} = c(b\sqrt{2\pi c})^{-1}, \\
 q'_{2r} &= A_2 \left[-\frac{(1 - 2\nu)}{r^2} \int_0^r z\lambda(z)dz + \lambda(r)(1 - \nu) - \frac{1}{b^2} \int_0^b z\lambda(z)dz \right], \\
 q'_{2\theta} &= A_2 \left[\frac{1 - 2\nu}{r^2} \int_0^r z\lambda(z)dz + \lambda(r)\nu - \frac{1}{b^2} \int_0^b z\lambda(z)dz \right], \\
 A_2 &= 2c \left[8\pi c(1 - \nu) \int_0^b r\lambda(r)dr \left(1 - \frac{2}{b^2} \int_0^b r\lambda(r)dr \right) \right]^{-1/2}, \dots
 \end{aligned} \tag{12}$$

И, наконец, возьмем линейно независимую систему

$$u_r : r, \begin{cases} a_1 r, & 0 \leq r \leq a_1, \\ a_1^3 r^{-1}, & a_1 \leq r \leq b, \end{cases} \begin{cases} a_1 r, & 0 \leq r \leq a_1, \\ r^2, & a_1 \leq r \leq b, \end{cases} \dots \tag{13}$$

Ей соответствует ортонормированная система тензоров из $T_1(V_r)$ с компонен-

тами

$$\begin{aligned}
 q'_{1r} &= q'_{1\theta} = c(b\sqrt{2\pi c})^{-1}; \\
 q'_{2r} &= q'_{2\theta} = A_3, \quad 0 \leq r \leq a_1; \\
 q'_{2r} &= -A_4 a_1^3 [b^2(1-2\nu) + r^2] / b^2 r^2, \quad a_1 \leq r \leq b; \\
 q'_{2\theta} &= A_4 a_1^3 [b^2(1-2\nu) - r^2] / b^2 r^2, \quad a_1 \leq r \leq b; \\
 A_3 &= A_4 a_1 (b^2 - a_1^2) / b^2; \\
 A_4 &= bc [2\pi c (b^2 - a_1^2) + 2a_1^4 (1 - \nu)]^{-1/2}; \\
 q'_{3r} &= q'_{3\theta} = 0, \quad 0 \leq r \leq a_1; \\
 q'_{3r} &= A_5 [(2 - \nu)r - b - b^2 a_1^2 (1 - 2\nu)(b + a_1)^{-1} r^{-2} - a_1^2 (b + a_1)^{-1}], \quad a_1 \leq r \leq b; \\
 q'_{3\theta} &= A_5 [(1 + \nu)r - b + b^2 a_1^2 (1 - 2\nu)(b + a_1)^{-1} r^{-2} - a_1^2 (b + a_1)^{-1}], \quad a_1 \leq r \leq b; \\
 A_5 &= c \{ \pi c (1 - \nu) [0.25(b^4 - a_1^4) - 2b^2 a_1^2 (b - a_1) / (b + a_1)] \}^{-1/2}; \dots
 \end{aligned}$$

5. Метод ортогональных проекций. Рассмотрим сначала систему уравнений линейной теории упругости (2). Очевидно, ее решением является некоторый тензор напряжений $\mathbf{p}' \in T_1$, удовлетворяющий условиям

$$\nabla \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{f}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{t},$$

где \mathbf{f} , \mathbf{t} — заданные системы векторов, главные векторы и главные моменты которых равны нулю. Найдем коэффициенты разложения этого тензора в ряд Фурье по ортонормальному базису \mathbf{q}'_k подпространства T_1 . Применяя формулу интегрирования по частям Остроградского—Гаусса, находим

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{p}', \mathbf{q}'_k) &= \int_V \mathbf{p}' \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{q}'_k dV = \int_V \mathbf{p}' \cdot \mathbf{e}'_k dV = \int_V \mathbf{p}' \cdot \mathbf{u}'_k dV = \\
 &= - \int_V \nabla \cdot \mathbf{p}' \cdot \mathbf{u}'_k dV + \int_\Gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}' \cdot \mathbf{u}'_k d\Gamma = - \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}'_k dV + \int_\Gamma \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}'_k d\Gamma,
 \end{aligned}$$

где \mathbf{u}'_k — непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции из $L'_2(V)$. Если $\mathbf{f} \in L'_2(V)$ и заданный на поверхности Γ вектор \mathbf{t} суммируем с квадратом по Γ , то интегралы в правой части данного равенства существуют. Тогда обобщенное решение системы (2) представляется в виде ортогонального (в энергетическом пространстве) ряда с вычисленными коэффициентами Фурье

$$\mathbf{p}' = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{p}', \mathbf{q}'_k) \mathbf{q}'_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(- \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}'_k dV + \int_\Gamma \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}'_k d\Gamma \right) \mathbf{q}'_k. \quad (14)$$

Этот ряд в силу полноты пространства T сходится как в энергетической метрике, так и в метрике исходного пространства $L'_2(V)$ [6].

Полученное решение является единственным. Действительно, пусть тензоры $\sigma'_1, \sigma'_2 \in T_1$ — два решения системы (2). Тогда $\sigma = \sigma'_1 - \sigma'_2 \in T_1$ также является решением. Однако $\nabla \cdot \sigma = \mathbf{0}$, $\mathbf{n} \cdot \sigma = \mathbf{0}$ и, следовательно, $\sigma \in T_2$, т. е. $\sigma \in T_1 \cap T_2$. Но $T_1 \cap T_2 = \mathbf{0}$. Отсюда $\sigma = \mathbf{0}$ и $\sigma'_1 = \sigma'_2$.

Далее пусть \mathbf{p}^* — любой тензор, удовлетворяющий уравнениям равновесия и граничным условиям задачи (2). Тогда $\mathbf{p}^* - \mathbf{p}' = \mathbf{q}'' \in T_2$ и

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}'_k) = (\mathbf{q}'' + \mathbf{p}', \mathbf{q}'_k) = (\mathbf{p}', \mathbf{q}'_k).$$

Отсюда тензор \mathbf{p}' , решающий задачу (2), есть проекция тензора \mathbf{p}^* в подпространство T_1 . В этом заключается смысл формулы (14). Так как $\mathbf{p}^* - \mathbf{p}' \in T_2$,

$$(\mathbf{p}', \mathbf{p}^* - \mathbf{p}') = 0 \quad \text{и} \quad \|\mathbf{p}^*\|^2 = \|\mathbf{p}'\|^2 + \|\mathbf{p}^* - \mathbf{p}'\|^2 \geq \|\mathbf{p}'\|^2.$$

Последнее неравенство выражает принцип Кастильяно — из всех тензоров, удовлетворяющих уравнениям равновесия и краевым условиям, заданным в напряжениях, наименьшую потенциальную энергию деформации сообщает телу тензор упругих напряжений [6]. Из приведенных рассуждений следует, что формула (14) фактически решает задачу о минимуме функционала $\|\mathbf{p}^* - \boldsymbol{\sigma}'\|^2$ при заданном тензоре \mathbf{p}^* , т. е. из всех значений $\boldsymbol{\sigma}' \in T_1$ минимум этому функционалу доставляет тензор \mathbf{p}' — решение задачи (2).

Отметим, что формула (14) позволяет находить, по крайней мере приближенно, так называемые слабые решения в тех случаях, когда непрерывных и непрерывно дифференцируемых решений не существует. При этом уравнения равновесия и условия совместности для соответствующего тензора деформаций удовлетворяются только в обобщенном смысле, а компоненты вектора перемещений могут иметь только первые обобщенные производные.

Перейдем к решению краевой задачи (3). Применяя оператор изометрии \mathbf{S} к определяющему соотношению, получаем равенство

$$\mathbf{e}'' = \mathbf{e}' - \boldsymbol{\varepsilon}^*,$$

где $\mathbf{e}'' \in H_2$ ($\mathbf{p}'' \in T_2$), $\boldsymbol{\varepsilon}^* \in H$, $\mathbf{e}' \in H_1$ — тензор совместной деформации. Найдём ортопроекции тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ в подпространства H_1 и H_2 . Имеем

$$\mathbf{e}' = Y_1 \boldsymbol{\varepsilon}^* \in H_1, \quad \mathbf{e}'' = Y_2 \boldsymbol{\varepsilon}^* \in H_2,$$

где Y_1, Y_2 — соответствующие операторы ортогонального проектирования (ортопроекторы). Тогда

$$\mathbf{e}' + \mathbf{e}'' = Y_1 \boldsymbol{\varepsilon}^* + Y_2 \boldsymbol{\varepsilon}^* = (Y_1 + Y_2) \boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}^*$$

($Y_1 + Y_2 = J$, J — единичный оператор). Отсюда

$$\mathbf{e}'' = \mathbf{e}' - \boldsymbol{\varepsilon}^* = -\boldsymbol{\varepsilon}''.$$

Очевидно, что данное равенство может быть выполнено, если $\mathbf{e}' = \boldsymbol{\varepsilon}'$. Следовательно, $\mathbf{e}'' = -\boldsymbol{\varepsilon}''$.

Применим теперь оператор изометрии \mathbf{C} к разложению тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^*$. Получаем

$$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}' + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'' \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\sigma}'',$$

где $\boldsymbol{\sigma}^* \in T$, $\boldsymbol{\sigma}' \in T_1$, $\boldsymbol{\sigma}'' \in T_2$. Очевидно, что $\boldsymbol{\sigma}' = P_1 \boldsymbol{\sigma}^*$ — ортопроекция тензора $\boldsymbol{\sigma}^*$ в подпространство T_1 , $\boldsymbol{\sigma}'' = P_2 \boldsymbol{\sigma}^*$ — ортопроекция в подпространство T_2 (P_1, P_2 — соответствующие ортопроекторы). Отсюда

$$\mathbf{p}'' = \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}'' = -\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'' = -P_2 \boldsymbol{\sigma}^*.$$

Таким образом, решением задачи (3) является взятая со знаком минус проекция элемента $\sigma^* \in T$ ($\sigma^* = C \cdot \varepsilon^*$) в подпространство T_2 . При этом совместные деформации, возникающие в теле, определяются тензором $e' = S \cdot P_1 \sigma^*$. Отметим, что и в данном случае возможно нахождение слабых решений, т. к. никаких ограничений, кроме принадлежности пространству T , на тензор σ^* не накладывается.

Приведем некоторые следствия, вытекающие из полученного результата.

Во-первых, зачастую удобнее находить решение задачи (3) в следующем виде:

$$p'' = -P_2 \sigma^* = -(J - P_1) \sigma^* = P_1 \sigma^* - \sigma^* = \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma^*, q'_k) q'_k - \sigma^*, \quad (15)$$

т. е. сначала осуществить проекцию тензора σ^* в подпространство T_1 .

Во-вторых, если $\varepsilon^* \in H_1$, то в теле возникают деформации $\varepsilon' = \varepsilon^*$ без образования напряжений. Если $\varepsilon^* \in H_2$, то в теле возникает самоуравновешенное поле напряжений без образования совместных деформаций, т.е. без изменения геометрии тела.

6. Иллюстрация метода ортогональных проекций. В качестве иллюстрации метода ортогональных проекций рассмотрим несколько примеров для нахождения напряжений в цилиндрических телах при плоской деформации.

Задача Ляме. Определим напряжения в толстостенной трубе при следующих условиях. На внешней границе с радиусом b заданы одинаковые векторы внешних сил, имеющие одну направленную к центру трубы радиальную компоненту ($-t$) (равномерное внешнее давление). Внутренняя граница с радиусом a свободна от нагрузки. Объемные силы отсутствуют.

Для более эффективного применения методики желательно на начальной стадии, используя внешние признаки задачи, сделать некоторые правдоподобные допущения относительно перемещений. Это позволит построить в подпространстве T_1 такой базис, при котором ряд Фурье, получающийся в результате операции проектирования, сходился бы достаточно быстро. В данном случае вектор перемещений имеет одну радиальную компоненту, зависящую только от расстояния от оси трубы. Эта компонента может быть представлена непрерывными и непрерывно дифференцируемыми необходимым числом раз функциями от r , в том числе и обладающими сингулярностями при $r = 0$.

Следовательно, можно воспользоваться последовательностью (5), элементы которой обладают указанным свойством. Базис в подпространстве $T_1(V_r)$, соответствующий последовательности перемещений (5), задан выражениями (6).

Для применения формулы (14) необходимо перейти от базисных напряжений к перемещениям, определяя из закона Гука деформацию

$$e'_\theta = E^{-1} [q_\theta(1 - \nu^2) - q_r \nu(1 + \nu)]$$

и затем перемещение $u = \varepsilon_\theta r$ из одного из соотношений Коши. В результате получаем

$$u_1 = r k_1, \quad u_2 = r^{-1} k_2, \quad \dots,$$

где

$$k_1 = [2\pi c(b^2 - a^2)]^{-1/2}, \quad k_2 = ba[2\pi c(1 - 2\nu)(b^2 - a^2)]^{-1/2}.$$

Теперь по формуле (14) с использованием выражений (6) определяем искомые напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma'_r &= m_1 q'_{1r} + m_2 q'_{2r} = -tb^2(b^2 - a^2)^{-1}(1 - a^2 r^{-2}), \\ \sigma'_\theta &= m_1 q'_{1\theta} + m_2 q'_{2\theta} = -tb^2(b^2 - a^2)^{-1}(1 + a^2 r^{-2}), \\ \sigma'_z &= \nu(\sigma'_r + \sigma'_\theta) = -2\nu tb^2(b^2 - a^2)^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$m_1 = - \int_0^{2\pi} tbk_1 b d\varphi, \quad m_2 = - \int_0^{2\pi} tb^{-1} k_2 b d\varphi$$

— коэффициенты Фурье. Отметим, что здесь $m_3 = 0$, а полученное решение является точным и, совпадающим с хорошо известным в литературе [16].

ЗАКАЛОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. Рассмотрим длинный сплошной цилиндр с радиусом основания b . Пусть в результате закалки в нем реализовано поле первоначальных (собственных) деформаций, определяемых тензором ε^* с компонентами

$$\varepsilon_r^* = \varepsilon_\theta^* = \varepsilon_z^* = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq a_1, \\ \gamma \rho (b - a_1)^{-1} (r - a_1), & a_1 \leq r \leq b \end{cases}$$

(закалка по линейному закону до радиуса a_1). Здесь ρ — объемное содержание новой фазы материала, возникшей в результате закалки, в поверхностном слое, γ — параметр свободной структурной деформации новой фазы.

Подставляя тензор ε^* в физические соотношения закона Гука, находим тензор σ^* с компонентами

$$\sigma_r^* = \sigma_\theta^* = \sigma_z^* = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq a_1, \\ \gamma \rho E (1 - 2\nu)^{-1} (b - a_1)^{-1} (r - a_1), & a_1 \leq r \leq b. \end{cases}$$

Можно предположить, что в этом случае радиальные перемещения непрерывны, но их производная терпит разрыв при $r = a_1$. Отсюда целесообразно использовать последовательность (13) и базис (10). Производя необходимые действия по формуле (15) с учетом выражения (4), находим

$$\begin{aligned} \sigma_r'' &= \sigma_\theta'' = E'(b/3 - a_1/3 + a_1^3/6b^2), & 0 \leq r \leq a_1; \\ \sigma_r'' &= E'[(b - r)/3 + a_1^3(b^{-2} - r^{-2})/6], & a_1 \leq r \leq b; \\ \sigma_\theta'' &= E'[(b - 2r)/3 + a_1^3(b^{-2} - r^{-2})/6], & a_1 \leq r \leq b. \end{aligned}$$

Если торцевые концы цилиндра свободны от нагрузки, то возникают еще напряжения

$$\sigma_z'' = \sigma_r'' = \sigma_\theta'' = \begin{cases} 2E'(b/3 - a_1/3 + a_1^3/6b^2), & 0 \leq r \leq a_1, \\ E'[(2b - 3r)/3 + a_1^3/3b^2], & a_1 \leq r \leq b. \end{cases}$$

Здесь $E' = \gamma\rho E[(1-\nu)(b-a_1)]^{-1}$. Это напряжение удовлетворяет граничным условиям на торцах (торцы свободны от напряжений) цилиндра в смысле принципа Сен-Венана:

$$\int_0^b \sigma_z'' r dr = 0.$$

Отметим, что остальные члены ряда в формуле (15) равны нулю и данное решение является точным.

Полагая, что $a_1 = 0$ (закалка на всю глубину), находим следующие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_r'' &= E\gamma\rho[3b(1-\nu)]^{-1}(b-r), \\ \sigma_\theta'' &= E\gamma\rho[3b(1-\nu)]^{-1}(b-2r), \\ \sigma_z'' &= E\gamma\rho[3b(1-\nu)]^{-1}(2b-3r).\end{aligned}$$

Заметим, что тот же результат получается, если спроектировать тензор σ^* при $a_1 = 0$ в подпространство $T_1(V_r)$, используя базис (10).

Последовательность перемещений (9) и базис (10) также можно применить для решения задачи с первоначальными деформациями

$$\varepsilon_r^* = \alpha r, \quad \varepsilon_\theta^* = \beta r, \quad \varepsilon_z^* = \psi r,$$

где $0 \leq r \leq b$; α, β, ψ — константы. Производя необходимые действия, получаем

$$\sigma_r'' = n(R-r), \quad \sigma_\theta'' = n(R-2r),$$

где

$$n = -E[3(1-\nu^2)]^{-1}(\alpha - 2\beta - \psi\nu).$$

Пусть теперь закалке подвергается труба с внутренним радиусом a , причем закалка осуществляется изнутри на всю толщину. Имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^* &= \varepsilon_\theta^* = \varepsilon_z^* = \gamma\rho(b-r)(b-a)^{-1}, \\ \sigma_r^* &= \sigma_\theta^* = \sigma_z^* = \gamma\rho(b-r)(b-a)^{-1}(1-2\nu)^{-1}E.\end{aligned}$$

В этом случае целесообразно использовать последовательность перемещений (5) и базис (6). Используя формулу (15), находим

$$\sigma_r'' = l_1 r - l_2 r^{-2} - l_3, \quad \sigma_\theta'' = 2l_1 r - l_2 r^{-2} - l_3,$$

где

$$\begin{aligned}l_1 &= \gamma\rho E l_4, \quad l_2 = \gamma\rho E b^2 a^2 l_4, \\ l_3 &= \gamma\rho E (b^2 + ba + a^2), \quad l_4 = [3(1-\nu)(b-a)]^{-1}.\end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, цилиндр, состоящий из расположенных симметрично относительно оси слоев различных материалов (арматуры и связующего), механические свойства которых с достаточной степенью точности можно считать равными. Отличие заключается лишь в том, что после изготовления способом намотки такого цилиндра связующее, расположенное между слоями арматуры, усаживается. Пусть слой арматуры и связующего расположены

произвольным образом и их положение определяет индикаторная функция $\lambda(r)$, которая равна единице, если точки, отстоящие от оси цилиндра на расстоянии r , принадлежат арматуре, и нулю, если связующему. Тогда

$$\varepsilon_r^* = \varepsilon_\theta^* = \varepsilon_z^* = \lambda(r)\gamma, \quad \sigma_r^* = \sigma_\theta^* = \sigma_z^* = \gamma\lambda E(1 - 2\nu)^{-1}.$$

Здесь γ — коэффициент усадки. Для нахождения решения используем последовательность (11) и ортонормированную систему (12). После проведения необходимых вычислений получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r'' &= \frac{\gamma E}{(1 - \nu)b^2} \int_0^b z\lambda(z)dz - \frac{\gamma E}{(1 - \nu)r^2} \int_0^r z\lambda(z)dz, \\ \sigma_\theta'' &= \frac{\gamma E}{(1 - \nu)b^2} \int_0^b z\lambda(z)dz + \frac{\gamma E}{(1 - \nu)r^2} \int_0^r z\lambda(z)dz - \frac{\gamma E\lambda}{1 - \nu}. \end{aligned}$$

Если в последовательности (8) учитывать компоненты $q'_{kz} = \nu(q'_{kr} + q'_{k\theta})$, то кроме напряжений σ_r'' и σ_θ'' в процессе решения определится и напряжение

$$\sigma_z = \frac{2\gamma E\nu}{(1 - \nu)b^2} \int_0^b z\lambda(z)dz - \frac{\gamma E\lambda}{1 - \nu},$$

которое возникает в цилиндре, если его торцевые поверхности закреплены от осевого перемещения. Когда они свободны, то следует наложить равномерное растяжение, равное $E\varepsilon_z$. При этом деформация ε_z подбирается таким образом, чтобы равнодействующая напряжений, действующих на поверхности цилиндра, обращалась в нуль:

$$\varepsilon_z = \frac{2\gamma}{b^2} \int_0^b z\lambda(z)dz.$$

Тогда получаем решение, у которого граничные условия для σ_z'' на торцевых поверхностях удовлетворяются в смысле принципа Сен—Венана:

$$\sigma_z'' = \sigma_z + E\varepsilon_z = \frac{2\gamma E}{(1 - \nu)b^2} \int_0^b z\lambda(z)dz - \frac{\gamma E\lambda}{(1 - \nu)} = \sigma_r'' + \sigma_\theta''.$$

В заключение рассмотрим задачу об определении остаточных напряжений в толстостенной трубе, состоящей из слоев арматуры и связующего. Для решения следует использовать последовательность (7) и соответствующую ей ортонормированную систему (8). Опять имеем

$$\sigma_r^* = \sigma_\theta^* = \sigma_z^* = \gamma E\lambda(1 - 2\nu)^{-1}$$

и, используя формулу (15), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r'' &= -\frac{\gamma E}{(1 - \nu)r^2} \int_a^r z\lambda(z)dz - \frac{\gamma E}{(1 - \nu)(b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \int_a^b z\lambda(z)dz, \\ \sigma_\theta'' &= \frac{\gamma E}{(1 - \nu)r^2} \int_a^r z\lambda(z)dz + \frac{\gamma E}{(1 - \nu)(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \int_a^b z\lambda(z)dz - \frac{\gamma E\lambda}{1 - \nu}. \end{aligned}$$

Для закрепленных торцевых поверхностей имеем

$$\sigma_z = \frac{2\gamma E\nu}{(1-\nu)(b^2-a^2)} \int_a^b z\lambda(z)dz - \frac{\gamma E\lambda}{1-\nu},$$

для свободных —

$$\sigma_z'' = \frac{2\gamma E\nu}{(1-\nu)(b^2-a^2)} \int_a^b z\lambda(z)dz - \frac{\gamma E\lambda}{1-\nu} = \sigma_r'' + \sigma_\theta''.$$

Таким образом, на приведенных примерах показана эффективность метода ортогональных проекций для получения, по крайней мере, обобщенных решений краевых задач теории упругости по определению напряженного состояния деформируемых тел.

Конкурирующие интересы. У меня нет конкурирующих интересов.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование не имело финансирования.

Библиографический список

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1977. 741 с.
2. Люстерник Л. А., Соболев В. И. *Элементы функционального анализа*. М.: Наука, 1965. 520 с.
3. Balakrishnan A. V. *Applied functional analysis / Applications of Mathematics*. vol. 3. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1976. x+309 pp.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1989. 624 с.
5. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рунтцкий Я. Б., Стеценко В. Я. *Приближенное решение операторных уравнений*. М.: Наука, 1969. 455 с.
6. Михлин С. Г. *Вариационные методы в математической физике*. М.: Наука, 1970. 512 с.
7. Rektorys K. *Variational methods in mathematics, science and engineering*. Dordrecht, Boston, London: D. Reidel Publ., 1980. 571 pp.
8. Партон В. З., Перлин П. И. *Методы математической теории упругости*. М.: Наука, 1981. 688 с.
9. Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П. *Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек*. М.: Наука, 1978. 288 с.
10. Биргер И. А. *Остаточные напряжения*. М.: Машгиз, 1963. 262 с.
11. Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Иванов В. Б. *Остаточные напряжения и сопротивление усталости упрочненных деталей с концентраторами напряжений*. Самара: Самар. науч. центр РАН, 2008. 64 с.
12. Berstein G., Fuchsbauer B. Festwalzen und Schwingfestigkeit // *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 1982. vol. 13, no. 3. pp. 103–109. doi: 10.1002/mawe.19820130309.
13. Саушкин М. Н., Радченко В. П., Павлов В. Ф. Метод расчета полей остаточных напряжений и пластических деформаций в цилиндрических образцах с учетом анизотропии процесса поверхностного упрочнения // *ПМТФ*, 2011. Т. 52, № 2. С. 173–182.
14. Поздеев А. А., Няшин Ю. И., Трусов П. В. *Остаточные напряжения: теория и приложения*. М.: Наука, 1982. 111 с.
15. Стружанов В. В. Определение усадочных напряжений в компонентах стохастически армированных композитов // *Прикладная механика*, 1982. Т. 18, № 5. С. 62–66.
16. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of elasticity / Engineering Societies Monographs*. International Student Edition. New York: McGraw-Hill Book Comp., 1970. xxiv+567 pp.
17. Лурье А. И. *Теория упругости*. М.: Наука, 1970. 940 с.

MSC: 74B10

On the method of orthogonal projections in the theory of elasticity

V. V. Struzhanov

Institute of Engineering Science, Ural Branch of RAS,
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

Abstract

The method of orthogonal projections applied to the task of determining the stresses in the elastic deformable bodies, which allowed us to relax the requirements to the smoothness of the functions defining external forces and to the components of the tensor of the initial strains, which cause the appearance of balanced self-stresses. Examples of the calculation of quench stresses in a circular cylinder and residual stresses after shrinkage of the binder in composite cylinders made by winding are given.

Keywords: energy Hilbert subspaces, orthogonal spaces, orthonormal system, orthoprojector, residual stresses.

Received: 12th April, 2017 / Revised: 9th June, 2017 /

Accepted: 12th June, 2017 / First online: 10th July, 2017

Competing interests. I have no competing interests.


Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any sponsorship.

References

1. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1977, 741 pp. (In Russian)
2. Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1965, 520 pp. (In Russian)
3. Balakrishnan A. V. *Applied functional analysis*, Applications of Mathematics, vol. 3. New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1976, x+309 pp.
4. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1989, 624 pp. (In Russian)

Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Struzhanov V. V. On the method of orthogonal projections in the theory of elasticity, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 308–325. doi: [10.14498/vsgtu1542](https://doi.org/10.14498/vsgtu1542) (In Russian).

Author's Details:

[Valery V. Struzhanov](mailto:Valery.V.Struzhanov@imach.uran.ru)  <http://orcid.org/0000-0002-3669-2032>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Material Micromechanics;
e-mail: stru@imach.uran.ru

5. Krasnosel'sky M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitsky Ya. B., Stetsenko V. Ya. *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii* [Approximate Solution of Operator Equations]. Moscow, Nauka, 1969, 455 pp. (In Russian)
6. Mikhlin S. G. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1970, 512 pp. (In Russian)
7. Rektorys K. *Variational methods in mathematics, science and engineering*. Dordrecht, Boston, London, D. Reidel Publ., 1980, 571 pp.
8. Parton V. Z., Perlin P. I. *Metody matematicheskoi teorii uprugosti* [Methods of the Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1981, 688 pp. (In Russian)
9. Abovsky N. P., Andreev N. P., Deruga A. P. *Variatsionnye printsipy teorii uprugosti i teorii obolochek* [Variational Principles of Elasticity and Shell Theory]. Moscow, Nauka, 1978, 288 pp. (In Russian)
10. Birger I. A. *Ostatochnye napriazheniia* [Residual Stresses]. Moscow, Mashgiz, 1963, 262 pp. (In Russian)
11. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Ivanov V. B. *Ostatochnye napriazheniia i soprotivlenie ustalosti uprochnennykh detalei s kontsentratorami napriazhenii* [Residual Stresses and Fatigue Resistance of Hardened Parts with Stress Concentrators]. Samara, Samara Research Center, 2008, 64 pp. (In Russian)
12. Berstein G., Fuchsbauer B. Festwalzen und Schwingfestigkeit, *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 1982, vol. 13, no. 3, pp. 103–109. doi: [10.1002/mawe.19820130309](https://doi.org/10.1002/mawe.19820130309).
13. Saushkin M. N., Radchenko V. P., Pavlov V. F. Method of calculating the fields of residual stresses and plastic strains in cylindrical specimens with allowance for surface hardening anisotropy, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2011, vol. 52, no. 2, pp. 303–310. doi: [10.1134/S0021894411020180](https://doi.org/10.1134/S0021894411020180).
14. Pozdeev A. A., Niashin Yu. I., Trusov P. V. *Ostatochnye napriazheniia: teoriia i prilozheniia* [Residual Stresses. Theory and Applications]. Moscow, Nauka, 1982, 111 pp. (In Russian)
15. Struzhanov V. V. Determination of shrinkage stresses in components of stochastically reinforced composites, *Soviet Applied Mechanics*, 1982, vol. 18, no. 5, pp. 445–449. doi: [10.1007/bf00883786](https://doi.org/10.1007/bf00883786).
16. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of elasticity*, Engineering Societies Monographs. International Student Edition. New York, McGraw-Hill Book Comp., 1970, xxiv+567 pp.
17. Lurie A. I. *Theory of Elasticity*, Foundations of Engineering Mechanics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005, 1050 pp. doi: [10.1007/978-3-540-26455-2](https://doi.org/10.1007/978-3-540-26455-2).