Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 3. С. 496–506
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1555

УДК 539.3

Интегро-дифференциальные уравнения второй краевой задачи линейной теории упругости. Сообщение 1. Однородное изотропное тело

В. В. Стружанов

Институт машиноведения УрО РАН,
Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

Аннотация

Система уравнений второй краевой задачи линейной теории упругости для однородного изотропного тела сведена к двум разным интегро-дифференциальным уравнениям фредгольмовского типа, что позволило для их исследования применить теоремы Фредгольма. Определены спектральные радиусы соответствующих операторов и доказано существование и единственность решения второй краевой задачи. Также установлено, что решение второго интегро-дифференциального уравнения можно найти методом последовательных приближений и представить его сходящимся со скоростью геометрической прогрессии рядом Неймана. Применение методики проиллюстрировано на примере расчета остаточных напряжений в закаленном цилиндре.

Ключевые слова: вторая краевая задача, однородное изотропное тело, интегро-дифференциальное уравнение, спектральный радиус, последовательные приближения.

Получение: 12 июля 2017 г. / Исправление: 23 августа 2017 г. / Принятие: 18 сентября 2017 г. / Публикация онлайн: 22 сентября 2017 г.

Введение. Классическая теория упругости сохраняет свое почетное место в науке о поведении деформируемого твердого тела. Ее исходные определения являются общими для всех разделов этой науки, а методы постановки и решения задач служат для нее образцами.

Несмотря на то, что линейная теория упругости является полностью замкнутой математической теорией, положение в этой области постоянно меняется. Это связано в первую очередь с использованием все более мощного формального аппарата. В этом случае система уравнений изучается сама по себе на принятом в математике уровне строгости, т.е. исследуются чисто

Краткое сообщение

Образец для цитирования

Стружанов В. В. Интегро-дифференциальные уравнения второй краевой задачи линейной теории упругости. Сообщение 1. Однородное изотропное тело // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 3. С. 496–506. doi: 10.14498/vsgtu1555.

Сведения об авторе

Валерий Владимирович Стружанов http://orcid.org/0000-0002-3669-2032
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. микромеханики материалов; e-mail: stru@imach.uran.ru

математические свойства, что позволяет раскрыть все еще неизвестные возможности теории и получить новые эффективные методы решения краевых задач, в том числе и приближенных, имеющих большое значение для решения важных технических задач.

В данной работе показано, что систему уравнений второй краевой задачи линейной теории упругости однородного изотропного тела можно свести к одному из двух интегро-дифференциальных уравнений, которые относятся к классу уравнений Фредгольма второго рода. Это позволило применить теоремы Фредгольма, т. е. свести задачу к проблеме собственных чисел соответствующих интегро-дифференциальных операторов. Для каждого оператора определены их спектральные радиусы, использование которых позволило привести новое доказательство существования и единственности решения второй краевой задачи. При исследовании второго интегро-дифференциального уравнения было установлено, что его решение (следовательно, и решение второй краевой задачи) можно найти методом последовательных приближений и представить его сходящимся рядом Неймана. Определены условия, при выполнении которых ряд Неймана возможно свернуть. В качестве примера решена задача об определении остаточных напряжений в закаленном цилиндре.

1. Первое интегро-дифференциальное уравнение второй краевой задачи теории упругости для однородного изотропного тела. Система уравнений краевой задачи линейной теории упругости, записанная в инвариантной форме, имеет вид [1, 2]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{g} = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{def} \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} \cdot\cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*), \quad \boldsymbol{v}|_\Gamma = \boldsymbol{v}^\Gamma. \tag{1}$$

Требуется найти тензоры напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, вектор перемещений $\boldsymbol{v}$ внутри упругого тела V в состоянии равновесия, если известны перемещения $\boldsymbol{v}^\Gamma$ точек его границы (кусочно-гладкой поверхности Γ).

В системе (1) первая группа уравнений — это уравнения равновесия ($\boldsymbol{g}$ — вектор объемных сил, ∇ — набла-оператор Гамильтона [1], точкой обозначено скалярное произведение вектора Гамильтона на симметричный тензор второго ранга), вторая группа — соотношения Коши, третья — закон Гука ($\boldsymbol{C}$ — однородный изотропный тензор четвертого ранга модулей упругости, двумя точками обозначено двойное скалярное произведение тензоров [3], $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ — тензор первоначальных деформаций свободных от связей элементов тела V, возникающих при нагреве, фазовых превращениях и т. п. [4]).

В уравнениях (1) произведем замену $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^*$, где $\boldsymbol{u}$ — неизвестная вектор-функция, на границе равная нулю, а $\boldsymbol{u}^*$ — известная вектор-функция, на границе равная $\boldsymbol{u}^*|_\Gamma = \boldsymbol{v}^\Gamma$, например, гармоническая вектор-функция

$$\boldsymbol{u}^* = -\int_\Gamma \boldsymbol{v}^\Gamma \frac{dG}{d\boldsymbol{n}} d\Gamma,$$

где G — функция Грина оператора Лапласа Δ для области V, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности Γ [5].

Подставляя теперь закон Гука в уравнения равновесия и заменяя деформации соотношениями Коши, получаем уравнения Навье—Ляме [6]:

$$-\big(\mu \Delta \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\big) = \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{u}|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

где $\lambda = \nu E\big((1+\nu)(1-2\nu)\big)^{-1}$, $\mu = E\big(2(1+\nu)\big)^{-1}$ — постоянные Ляме; E, ν — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона;

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{g} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^* + \mu\Delta\boldsymbol{u}^* + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}^*;$$

$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*$ — формальный тензор псевдонапряжений.

Уравнения (2) будем рассматривать как некоторое отображение пространства $W^2_{2,0}(V)$ в пространство $L_2(V)$ ($\boldsymbol{u}\in W^2_{2,0}(V)$, $\boldsymbol{p}\in L_2(V)$). Здесь $L_2(V)$ — вещественное полное сепарабельное гильбертово пространство вектор-функций, компоненты которых интегрируемы с квадратом, а $W^2_{2,0}(V)$ — вещественное полное сепарабельное гильбертово пространство вектор-функций, компоненты которых обращаются в нуль на Γ и принадлежат $L_2(V)$ вместе со своими обобщенными производными до второго порядка включительно [7,8]. Пусть область V и граница Γ таковы, что оператор Лапласа Δ устанавливает биекцию между пространствами $W^2_{2,0}(V)$ и $L_2(V)$ и существует функция Грина оператора Лапласа. Таким образом, оператор $(-\Delta)$ имеет обратный [7,9]:

$$(-\Delta^{-1}X) = \int_V GX\,dV, \quad X\in L_2(V),\ \Delta^{-1}X\in W^2_{2,0}(V).$$

Оператор $(-\Delta)$ — положительно определенный оператор в $W^2_{2,0}(V)$ с дискретным спектром, то есть его собственные числа вещественны, положительны и дискретны [10]. Следовательно, оператор $(-\Delta^{-1})$ является вполне непрерывным.

Применяя к обеим частям уравнения (2) оператор $(-\Delta^{-1})$, получаем интегро-дифференциальное уравнение (первое интегро-дифференциальное уравнение второй краевой задачи)

$$\boldsymbol{u} = \text{Ш}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}. \tag{3}$$

Здесь

$$\text{Ш}\boldsymbol{u} = -m\Delta^{-1}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{f} = -\frac{1}{\mu}\Delta^{-1}\boldsymbol{p}, \quad m = \frac{\lambda+\mu}{\mu} = \frac{1}{1-2\nu}.$$

Оператор Ш действует из $W^2_{2,0}(V)$ в $W^2_{2,0}(V)$, $f\in W^2_{2,0}(V)$. Дифференциальный оператор grad div — линейный непрерывный (ограниченный) оператор из пространства $W^2_{2,0}(V)$ в пространство $L_2(V)$ [11,12]. Тогда оператор Ш вполне непрерывен как произведение вполне непрерывного и ограниченного операторов [13]. Таким образом, уравнение (3) — уравнение Фредгольма второго рода [14].

2. Спектральный радиус оператора Ш и существование решения второй краевой задачи. Для уравнения (3) справедлива альтернатива Фредгольма [14]. Поэтому вопрос существования и единственности решения сводится к проблеме собственных чисел оператора Ш. Для определения его спектрального радиуса $\rho(\text{Ш})$ рассмотрим уравнение

$$-(\Delta\boldsymbol{u} + m\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) - k(-\Delta\boldsymbol{u}) = 0, \quad \boldsymbol{u}\in W^2_{2,0}(V), \quad k\in(-\infty,+\infty). \tag{4}$$

Выражение в первых скобках — оператор теории упругости. В случае закрепленной границы он положительно определенный с дискретным спектром [10]. Таков же и оператор $(-\Delta)$ [10]. Тогда собственные числа k уравнения (4) вещественны, положительны и лежат в пределах $\inf A(\boldsymbol{u}) = k_1 \leqslant k \leqslant k_2 = \sup A(\boldsymbol{u})$ [10], где

$$A(\boldsymbol{u}) = \frac{(-[\Delta \boldsymbol{u} + m \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{u}], \boldsymbol{u})}{(-\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})} = 1 + m\frac{(-\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}{(-\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}. \tag{5}$$

Здесь круглыми скобками обозначены скалярные произведения в $L_2(V)$. Далее, применяя формулу Остроградского—Гаусса и учитывая равенство [15]

$$\Delta \boldsymbol{u} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{u} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \tag{6}$$

находим

$$(-\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = (\operatorname{div} \boldsymbol{u}, \operatorname{div} \boldsymbol{u}) \geqslant 0, \quad (-\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = (\operatorname{grad} \boldsymbol{u}, \operatorname{grad} \boldsymbol{u}) \geqslant 0,$$

$$(-\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - (-\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = (\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \operatorname{rot} \boldsymbol{u}) \geqslant 0.$$

Отсюда

$$(-\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geqslant (-\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geqslant 0.$$

Тогда, используя выражение (5), находим, что собственные числа k уравнения (4) лежат в пределах $1 \leqslant k \leqslant 1 + m$.

Применяя к равенству (4) оператор $(-\Delta^{-1})$, получаем эквивалентное уравнение $s\boldsymbol{u} = \text{Ш}\boldsymbol{u}$ $(s = 1 - k)$. Собственные числа s оператора Ш лежат в отрезке $[-m, 0]$. Для вполне непрерывного линейного оператора спектральный радиус равен наибольшему по модулю собственному значению оператора [16]. Тогда $\rho(\text{Ш}) = m$. Если $0 \leqslant \nu \leqslant 0.5$, то $m \in (1, \infty)$ и $\rho(\text{Ш}) > 1$. Отсюда оператор Ш не является оператором сжатия [16] и решение уравнения (3) невозможно определить методом последовательных приближений.

Отметим, что $k = 0$ не является собственным числом уравнения (4). Отсюда $s = 1$ также не является собственном числом оператора Ш. Согласно теореме Фредгольма [14] решение уравнения (3) существует и единственно. Таким образом, решение второй краевой задачи теории упругости также существует и единственно при $0 < \nu < 0.5$. Если $\nu = 0.5$, то $m = \infty$ и вопрос о существовании и единственности решения требует специального исследования.

3. Второе интегро-дифференциальное уравнение второй краевой задачи. Используя равенство (6), из уравнения (3) получаем второе интегро-дифференциальное уравнение

$$\boldsymbol{u} = Q\boldsymbol{u} + \boldsymbol{h}, \tag{7}$$

где

$$Q\boldsymbol{u} = -l\Delta^{-1}\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{h} = \frac{1}{1+m}\boldsymbol{f}, \quad l = \frac{m}{1+m} = \frac{1}{2(1-\nu)}.$$

Здесь оператор Q также действует из $W^2_{2,0}(V)$ в $W^2_{2,0}(V)$ и является вполне непрерывным, т. е. уравнение (7) — уравнение Фредгольма второго рода.

Для отыскания спектрального радиуса оператора Q применим прием, изложенный выше. Рассмотрим уравнение

$$-(\Delta \boldsymbol{u} + l \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}) - \gamma(-\Delta \boldsymbol{u}) = 0, \quad \boldsymbol{u} \in W_{2,0}^2(V), \quad \gamma \in (-\infty, +\infty). \tag{8}$$

Собственные числа γ уравнения (8) вещественны, положительны и лежат в промежутке $\inf B(\boldsymbol{u}) = \gamma_1 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_2 = \sup B(\boldsymbol{u})$, где

$$B(\boldsymbol{u}) = \frac{(-[\Delta \boldsymbol{u} + l \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}], \boldsymbol{u})}{(-\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})} = 1 + l \frac{(-\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}{(-\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}. \tag{9}$$

Далее имеем оценки

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \operatorname{rot} \boldsymbol{u}) \geqslant 0,$$

$$(-\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + (-\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = (-\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geqslant 0,$$
$$0 \geqslant (-\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geqslant -(-\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}).$$

Теперь, используя выражение (9), находим, что собственные числа γ уравнения (8) лежат в промежутке $(1 - l) \leqslant \gamma \leqslant 1$.

Применяя оператор $(-\Delta^{-1})$ к (8), получаем эквивалентное уравнение $\lambda \boldsymbol{u} = Q\boldsymbol{u}$ $(\lambda = 1 - \gamma)$. Собственные числа оператора Q лежат в отрезке $[0, l]$. Спектральный радиус $\rho(Q) = l$. При $0 \leqslant \nu < 0.5$ имеем $\rho(Q) < 1$, то есть оператор Q является оператором сжатия. Тогда решение уравнения (7) можно найти методом последовательных приближений и представить его сходящимся по норме пространства $W_{2,0}^2(V)$ рядом Неймана $u = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n h$. Причем ряд сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, сколь угодно близким к l [16].

Отметим, что $\gamma = 0$ $(\nu < 0.5)$ не является собственным числом уравнения (8) и $\lambda = 1$ не является собственным числом оператора Q. Отсюда из теоремы Фредгольма вытекает существование и единственность решения уравнения (7).

Если $\nu = 0.5$ (материал несжимаемый), то $l = 1$ и $\lambda = 1$ — собственное число оператора Q. В данном случае вопрос о существовании и единственности решения уравнения (7), а также второй краевой задачи теории упругости, требует специального исследования [14].

4. Потенциальные и соленоидальные поля. Согласно теореме Гельмгольца, всякое непрерывное векторное поле можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей [9]:

$$\boldsymbol{w} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{A}.$$

Здесь функция φ — скалярный потенциал, а вектор $\boldsymbol{A}$ — векторный потенциал. В нашем случае $\boldsymbol{w} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \in W_{2,0}^2(V)$. Рассмотрим соленоидальное поле $\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$. Тогда из равенства (6) вытекает

$$\Delta \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{10}$$

Таким образом, в соленоидальном поле $\Delta = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}$. Возьмем теперь вектор $\Delta^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$. Используя равенство (6), получаем

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} \Delta^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \Delta^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

т. е.
$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\Delta^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=0$$
и вектор $\Delta^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ принадлежит соленоидальному полю. Если $\boldsymbol{w}=\operatorname{grad}\varphi$, то $\Delta\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$. Отсюда $\Delta=\operatorname{grad}\operatorname{div}$. Возьмем вектор $\Delta^{-1}\operatorname{grad}\varphi$. Из равенства (6) следует, что
$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\Delta^{-1}\operatorname{grad}\varphi-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\Delta^{-1}\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}\varphi,$$
т. е. $\Delta^{-1}\operatorname{grad}\varphi$ — вектор потенциального поля.

Представим теперь вектор $\boldsymbol{h}$ в уравнении (7) суммой $\boldsymbol{h}=\operatorname{grad}\psi+\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$. Тогда, используя равенство (10), можно свернуть ряд Неймана. В результате получаем решение
$$u=\operatorname{grad}\psi+\frac{1}{1-l}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}.$$

5. Остаточные напряжения в закаленном цилиндре. В качестве примера определим напряжения в закаленном длинном стальном круговом цилиндре. В результате закалки часть зерен аустенита в приповерхностных слоях перешла в мартенситное состояние. Пусть P — объемное содержание мартенсита:
$$P=\begin{cases}0, & 0\leqslant r\leqslant a;\\ P_0\dfrac{r-a}{b-a}, & a\leqslant r\leqslant b,\end{cases}$$
где b — радиус основания цилиндра, $(b-a)$ — глубина закалки, $P_0\leqslant 1$ — объемное содержание мартенсита в поверхностном слое. Отсюда после закалки цилиндр состоит из двух однородных изотропных компонентов, каковыми являются аустенит и мартенсит. В первом приближении полагаем их свойства одинаковыми. Так как зерна мартенсита имеют несколько больший объем [17], элементарные объемы материала в приповерхностных слоях находятся в стесненном состоянии, что вызывает появление остаточных (закалочных) напряжений.

Рассмотрим произвольный свободный от связей кубический элемент материала. После закалки в нем образуются равномерно распределенные по объему зерна мартенсита с объемным содержанием P. В результате объем элемента увеличится с сохранением кубической формы. В этом случае компоненты деформации
$$\varepsilon^*_{ij}=\alpha P\delta_{ij},\quad i,j=1,2,3.$$
Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, α — параметр свободной структурной деформации мартенсита [17].

Деформации ε^*_{ij} не удовлетворяют условиям совместности и не могут быть реализованы в сплошном теле. Для сохранения сплошности к деформациям ε^*_{ij} необходимо добавить такие деформации ε''_{ij}, чтобы суммарные деформации $\varepsilon'_{ij}=\varepsilon^*_{ij}+\varepsilon''_{ij}$ уже удовлетворяли условиям совместности. Это означает, что к каждому элементу должны быть приложены усилия, определяемые напряжениями σ''_{ij} (собственные, остаточные напряжения). Напряжения σ''_{ij} и деформации ε''_{ij} связаны законом Гука
$$\sigma''_{ij}=C_{ij\alpha\beta}\varepsilon''_{\alpha\beta}=C_{ij\alpha\beta}(\varepsilon'_{\alpha\beta}-\varepsilon^*_{\alpha\beta}),\quad i,j,\alpha,\beta=1,2,3.$$

Здесь $C_{ij\alpha\beta}$ — компоненты тензора модулей упругости (суммирование по повторяющимся индексам).

Стесненный компонент расположен симметрично относительно оси цилиндра. Поэтому точки поверхности получают постоянные по величине радиальные перемещения:

$$v_r\big|_{r=b} = v_r^0 = \text{const}.$$

Таким образом, задача по определению закалочных напряжений осесимметричная и цилиндр находится в плоском деформированном состоянии. Так как

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon'_r(r), \quad \varepsilon'_{22} = \varepsilon'_\theta(r), \quad \varepsilon'_{33} = \varepsilon'_{12} = \varepsilon'_{13} = \varepsilon'_{23} = 0,$$
$$\varepsilon^*_{11} = \varepsilon^*_{22} = \varepsilon^*_{33} = \alpha P(r), \quad \varepsilon^*_{12} = \varepsilon^*_{13} = \varepsilon^*_{23} = 0,$$

уравнения закона Гука имеют вид

$$\sigma''_r = 2\mu\varepsilon'_r + \lambda(\varepsilon'_r + \varepsilon'_\theta) - \alpha(3\lambda + 2\mu)P,$$

$$\sigma''_\theta = 2\mu\varepsilon'_\theta + \lambda(\varepsilon'_r + \varepsilon'_\theta) - \alpha(3\lambda + 2\mu)P,$$
$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon'_r + \varepsilon'_\theta) - \alpha(3\lambda + 2\mu)P.$$

Подставляя сюда соотношения Коши

$$\varepsilon'_r = \frac{dv_r}{dr}, \quad \varepsilon'_\theta = \frac{v_r}{r}$$

и затем полученное выражение в уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma''_r}{dr} + \frac{\sigma''_r - \sigma''_\theta}{r} = 0,$$

после известных преобразований получаем уравнение

$$\Delta v + l \operatorname{rot}\operatorname{rot} v = \alpha\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\operatorname{grad} P, \quad v = v_r(r).$$

Затем, делая замену

$$v = u + u^*, \quad u^* = \frac{v_r^0 r}{b}, \quad u = u_r(r),$$

имеем

$$\Delta u + l \operatorname{rot}\operatorname{rot} u = \alpha\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\operatorname{grad} P, \quad u_r\big|_{r=b} = 0.$$

Данное уравнение эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению

$$u = -l\Delta^{-1}\operatorname{rot}\operatorname{rot} u + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\alpha\Delta^{-1}\operatorname{grad} P.$$

Здесь оператор $(-\Delta^{-1})$ определен с использованием функции Грина для круга [18].

Как следует из рассуждений, приведенных выше, решение интегро-дифференциального уравнения определяет ряд Неймана. Так как вектор

$\Delta^{-1}\operatorname{grad} P$ принадлежит потенциальному полю, ряд Неймана имеет только один первый член:

$$u_r = \alpha\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\Delta^{-1}\operatorname{grad} P.$$

Тогда

$$v_r = u_r^* + u_r = v_r^0\frac{r}{b} + \alpha\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\Delta^{-1}\operatorname{grad} P.$$

Здесь

$$\Delta^{-1}\operatorname{grad} P = \begin{cases} -\dfrac{P_0}{b-a}\Big(\dfrac{br}{3} - \dfrac{ar}{3} + \dfrac{a^3 r}{6b^2}\Big), & 0 \leqslant r \leqslant a,\\ -\dfrac{P_0}{b-a}\Big(\dfrac{r}{3}(b-r) - \dfrac{a^3}{6b^2 r}(b^2-r^2)\Big), & a \leqslant r \leqslant b. \end{cases}$$

Подставляя v_r в соотношения Коши и полученные деформации в закон Гука, вспоминая, что цилиндр не нагружен, то есть $\sigma_r''|_{r=b} = 0$, вычисляем значение перемещения точек границы v_r^0. Переходя снова к напряжениям, получаем выражения для закалочных напряжений:

$$\sigma_r'' = \begin{cases} \dfrac{\alpha P_0 E}{(1-\nu)(b-a)b^2}\Big(\dfrac{b^3}{3} - \dfrac{b^2 a}{2} + \dfrac{a^3}{6}\Big), & 0 \leqslant r \leqslant a,\\ \dfrac{\alpha P_0 E}{(1-\nu)(b-a)}\Big(\dfrac{1}{3}(b-r) + \dfrac{a^3}{6}\Big(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{r^2}\Big)\Big), & a \leqslant r \leqslant b; \end{cases}$$

$$\sigma_\theta'' = \begin{cases} \dfrac{\alpha P_0 E}{(1-\nu)(b-a)b^2}\Big(\dfrac{b^3}{3} - \dfrac{b^2 a}{2} + \dfrac{a^3}{6}\Big), & 0 \leqslant r \leqslant a,\\ \dfrac{\alpha P_0 E}{(1-\nu)(b-a)}\Big(\dfrac{1}{3}(b-2r) + \dfrac{a^3}{6}\Big(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{r^2}\Big)\Big), & a \leqslant r \leqslant b. \end{cases}$$

Напряжение вдоль оси цилиндра определим по формуле, которая является следствием равенства нулю деформации ε_z':

$$\sigma_z = \begin{cases} \nu(\sigma_r'' + \sigma_\theta''), & 0 \leqslant r \leqslant a,\\ \nu(\sigma_r'' + \sigma_\theta'') - E\varepsilon_z^*, & a \leqslant r \leqslant b. \end{cases} \tag{11}$$

Напряжение (11) возникает в том случае, когда торцевые поверхности закреплены от осевого перемещения. Если они свободны, то на напряжение (11) следует наложить равномерное напряжение $E\varepsilon_z'$ ($\varepsilon_z' = \text{const}$). При этом деформация ε_z' подбирается так, чтобы равнодействующая напряжений, распределенных по торцевой поверхности, обращалась в нуль:

$$\varepsilon_z' = \frac{2\alpha P_0}{b-a}\Big(\frac{b}{3} - \frac{a}{2} + \frac{a^3}{6b^2}\Big).$$

В результате получаем выражение для σ_z'', при котором граничные условия на торцах удовлетворяются в смысле принципа Сен—Венана:

$$\sigma_z'' = -E\varepsilon_z' + \sigma_z = \begin{cases} \dfrac{2\alpha P_0 E}{(b-a)(1-\nu)}\Big(\dfrac{b}{3} - \dfrac{a}{2} + \dfrac{a^3}{6b^2}\Big), & 0 \leqslant r \leqslant a,\\ \dfrac{2\alpha P_0 E}{(b-a)(1-\nu)}\Big(\dfrac{b}{3} - \dfrac{r}{2} + \dfrac{a^3}{6b^2}\Big), & a \leqslant r \leqslant b. \end{cases}$$

Заключение. Приведенные результаты показывают, что применение нетрадиционного для теории упругости формального аппарата функционального анализа позволяет не только исследовать чисто математические свойства второй краевой задачи, но и разработать оригинальный метод последовательных приближений для нахождения ее решения.

Конкурирующие интересы. У меня нет конкурирующих интересов.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование не имело финансирования.

Библиографический список

1. Лурье А. И. *Теория упругости.* М.: Наука, 1970. 939 с.
2. Елисеев В. В. *Механика упругих тел.* СПб.: СПбГПУ, 2002. 341 с.
3. Димитриенко Ю. И. *Тензорное исчисление.* М.: Высш. шк., 2001. 575 с.
4. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of elasticity* / Engineering Societies Monographs. International Student Edition. New York: McGraw-Hill Book Comp., 1970. xxiv+567 pp.
5. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1971. 512 с.
6. Hahn H. G. *Elastizitätstheorie. Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme* / Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik. vol. 62. Stuttgart: B. G. Teubner, 1985. 332 pp.
7. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973. 576 с.
8. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука, 1988. 334 с.
9. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики.* М.: Высш. шк., 1970. 712 с.
10. Михлин С. Г. *Вариационные методы в математической физике.* М.: Наука, 1970. 512 с.
11. Треногин В. А. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1980. 496 с.
12. *Функциональный анализ* / Справочная математическая библиотека / ред. С. Г. Крейн. М.: Наука, 1972. 544 с.
13. Люстерник Л. А., Соболев В. И. *Элементы функционального анализа.* М.: Наука, 1965. 520 с.
14. Кантарович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977. 741 с.
15. Коренев Г. В. *Тензорное исчисление.* М.: МФТИ, 2000. 240 с.
16. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. *Приближенное решение операторных уравнений.* М.: Высш. шк., 1969. 455 с.
17. Юрьев С. Ф. *Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита.* М.: Металлургиздат, 1950. 48 с.
18. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1966. 724 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 3, pp. 496–506
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1555

MSC: 74C10

Integro-differential equations the second boundary value problem of linear elasticity theory. Message 1. Homogeneous isotropic body

V. V. Struzhanov

Institute of Engineering Science, Ural Branch of RAS,
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

Abstract

The system of equations of the second boundary value problem of the linear theory of elasticity for homogeneous isotropic bodies is reduced to two separate integro-differential equations of Fredholm type, which allowed to apply for their research the theorem of Fredholm. The spectral radii of the corresponding operators are determined and the existence and uniqueness of the solution of the second boundary value problem are proved. It is also established that the decision of the second integro-differential equation can be found by successive approximations and presented convergent with a geometric rate close to Neumann. The method application is illustrated on the example of calculation of residual stresses in a quenched cylinder.

Keywords: second boundary-value problem, homogeneous isotropic body, integro-differential equation, spectral radius, successive approximation.

Received: 12th July, 2017 / Revised: 23rd August, 2017 /
Accepted: 18th September, 2017 / First online: 22nd September, 2017

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any sponsorship.

Short Communication

Please cite this article in press as:
Struzhanov V. V. Integro-differential equations the second boundary value problem of linear elasticity theory. Message 1. Homogeneous isotropic body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 3, pp. 496–506. doi: 10.14498/vsgtu1555 (In Russian).

Author's Details:
Valery V. Struzhanov http://orcid.org/0000-0002-3669-2032
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Material Micromechanics;
e-mail: stru@imach.uran.ru

References

1. Lurie A. I. *Theory of Elasticity*, Foundations of Engineering Mechanics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005, 1050 pp. doi: 10.1007/978-3-540-26455-2.
2. Eliseev V. V. *Mekhanika uprugikh tel* [Mechanics of Elastic Bodies]. Saint-Petersburg, SPbGPU, 2002, 341 pp. (In Russian)
3. Dimitrienko Yu. I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor Calculus]. Moscow, Vyssh. shk., 2001, 575 pp. (In Russian)
4. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of elasticity*, Engineering Societies Monographs. International Student Edition. New York, McGraw-Hill Book Comp., 1970, xxiv+567 pp.
5. Vladimirov V. S. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1971, 512 pp. (In Russian)
6. Hahn H. G. *Elastizitätstheorie. Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme*, Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik, vol. 62. Stuttgart, B. G. Teubner, 1985, 332 pp.
7. Ladyzhenskaia O. A., Ural'tseva N. N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellipticheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. Moscow, Nauka, 1973, 576 pp. (In Russian)
8. Sobolev S. L. *Nekotorye primeneniia funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1988, 334 pp. (In Russian)
9. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Equations in partial derivatives of mathematical physics]. Moscow, Vyssh. shk., 1970, 712 pp. (In Russian)
10. Mikhlin S. G. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1970, 512 pp. (In Russian)
11. Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka, 1980, 496 pp. (In Russian)
12. *Functional analysis*, Wolters-Noordhoff Series of Monographs and Textbooks on Pure and Applied Mathematics, ed. S. G. Krejn. Groningen, Netherlands, Wolters-Noordhoff Publ., 1972, xv+379 pp.
13. Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1965, 520 pp. (In Russian)
14. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1977, 741 pp. (In Russian)
15. Korenev G. V. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor Calculus]. Moscow, Mosk. Fiz.-Tekhn. Inst., 2000, 240 pp. (In Russian)
16. Krasnosel'sky M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitsky Ya. B., Stetsenko V. Ya. *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii* [Approximate Solution of Operator Equations]. Moscow, Nauka, 1969, 455 pp. (In Russian)
17. Yuriev S. F. *Udel'nye ob"emy faz v martensitnom prevrashchenii austenita* [Specific Volumes of Phases in Martensite Transformation of Austenite]. Moscow, Metallurgizdat, 1950, 48 pp. (In Russian)
18. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of mathematical physics*. New York, A Pergamon Press Book The Macmillan Co., 1963, xvi+765 pp.