



УДК 539.376

Решение краевой задачи о кручении сплошных и полых цилиндрических образцов из стали 45 и сплава АМГ-6М в условиях кратковременной установившейся ползучести

В. В. Цветков

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Предложен метод решения краевой задачи о кручении сплошных и полых цилиндрических образцов в условиях установившейся ползучести. Построение реологической модели выполнено на основе экспериментальных стационарных кривых ползучести при одноосном растяжении в соответствии с модифицированным методом наименьших квадратов. Для проверки адекватности методики решения краевой задачи выполнено сравнение расчетных характеристик деформированного состояния с соответствующими экспериментальными данными по кратковременной ползучести цилиндрических образцов из стали 45 и сплава АМГ-6М. Получены зависимости для величин интенсивности деформаций в характеристической точке и угла закручивания от времени, произведено сравнение с данными расчета по методу характеристической точки. Приведены оценки погрешностей отклонения расчетных данных от экспериментальных значений, показано, что экспериментальные и расчетные данные хорошо согласуются. Построены расчетные эпюры касательных напряжений по радиусу при кручении сплошного и полого цилиндров в различные временные сечения.

Ключевые слова: краевая задача, цилиндрический образец, растяжение, кручение, установившаяся ползучесть, численный метод.

Получение: 28 июня 2017 г. / Исправление: 29 августа 2017 г. /

Принятие: 18 сентября 2017 г. / Публикация онлайн: 10 ноября 2017 г.

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Цветков В. В. Решение краевой задачи о кручении сплошных и полых цилиндрических образцов из стали 45 и сплава АМГ-6М в условиях кратковременной установившейся ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 3. С. 507–523. doi: [10.14498/vsgtu1551](https://doi.org/10.14498/vsgtu1551).

Сведения об авторе

Виталий Владимирович Цветков  <http://orcid.org/0000-0001-9285-7607>

аспирант; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: vi.v.tsvetkoff@mail.ru

Введение. Повышение требований к прочности и надежности элементов конструкций, работающих в условиях повышенных температур, определяет необходимость исследования процесса ползучести при различных видах напряженного состояния для широкого класса материалов. Так, для цилиндрических изделий типичными испытаниями на ползучесть и длительную прочность являются испытания сплошных стержней при растяжении и кручении, а для трубчатых образцов — при комбинированном действии осевой силы, крутящего момента и внутреннего давления.

При ползучести необходимо учитывать физическое разрушение материала вследствие ползучести — длительную прочность. Прогнозирование длительной прочности требует существенных экспериментальных затрат и связано с аппроксимацией экспериментальных данных при всех видах напряженного состояния. Многие задачи прогнозирования длительной прочности конструкций при сложном напряженном состоянии решаются на основе концепции эквивалентных напряжений [1–6]. Данный подход подробно изложен в монографии [7], однако его существенным недостатком является то, что за рамками исследования находится кинетика напряженно-деформированного состояния в процессе ползучести конструкций. Второй подход связан с решением краевых задач ползучести и длительной прочности на основе феноменологических уравнений состояния материала с использованием критериев разрушения.

Проведение экспериментальных исследований на ползучесть при сложном напряженном состоянии связано со значительными техническими трудностями, и основная часть испытаний проводится, как правило, при одноосном растяжении цилиндрических образцов. Поэтому желательно иметь реологические модели, построение которых осуществляется лишь по одноосным кривым ползучести и которые бы адекватно описывали процесс ползучести при сложном напряженном состоянии. Примером такой реологической модели может служить энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности, описанный в работе [8].

Теоретических методов решения краевых задач в теории ползучести при сложном напряженном состоянии, позволяющих в квадратурах получить зависимости для компонент тензоров напряжений и деформаций, на сегодняшний день относительно немного. В частности, в работе [9] с использованием модели ползучести [8] была решена краевая задача о реологическом деформировании и разрушении толстостенной трубы в условиях внутреннего давления и осевого растяжения и выполнена проверка адекватности метода расчета экспериментальным данным по длительной прочности толстостенных образцов из сталей 20, 12ХМФ и ЭИ694. Здесь же проведено сравнение и с результатами расчетов по концепции эквивалентных напряженных состояний.

Для решения задачи о кручении цилиндрических конструкций в условиях ползучести в работе [10] предложен приближенный метод характеристической точки. В его основе лежит существование особой характеристической точки, в окрестности которой реализуется практически неизменное во времени напряженное состояние. При таком подходе все характеристики деформированного состояния определяются в характеристической точке, и необходимость решать краевую задачу отпадает. Этот подход успешно применялся

для решения разнообразных задач ползучести конструкций [11, 12].

В работе [13] разработан численный метод для расчета кинетики напряженно-деформированного состояния цилиндрических образцов при комбинированном растяжении и кручении. Однако проверка адекватности данного метода, выполненная в [13], носит частный характер, поскольку она была проведена лишь для одного материала (алюминиевого сплава Д16Т), при этом предполагалось, что материал проявляет анизотропию свойств ползучести при чистом растяжении и чистом сдвиге.

В связи с вышеизложенным целью настоящей работы является дальнейшая проверка реологической модели [8] и методики расчета [13] с использованием экспериментальных данных по кратковременной установившейся ползучести стали 45 при температурах 725 и 740 °С [11] и сплава АМГ-6М при температуре 450 °С [14] в условиях одноосного растяжения и при кручении сплошных и полых стержней из этих материалов.

1. Методика решения краевой задачи о ползучести цилиндрического образца при кручении. Изложим методику решения краевой задачи о реологическом деформировании цилиндрического образца с радиусами R_1 и R_2 в условиях ползучести при кручении, описанную в работе [13]. Отметим, что данная методика применима как для сплошных, так и для трубчатых цилиндрических образцов (при этом для сплошных образцов полагаем $R_1 = 0$).

Рассмотрим цилиндрический образец, к торцу которого приложен крутящий момент M . Уравнение равновесия элемента стержня имеет вид

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} \tau(r, t) r^2 dr = M, \quad (1)$$

где $r \in [R_1, R_2]$ — расстояние до оси стержня, τ — касательное напряжение.

Уравнение совместности деформаций в соответствии с гипотезой прямых радиусов имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma(r, t) &= r\theta(t); \\ \gamma(r, t) &= \gamma^e(r, t) + \gamma^p(r, t), \end{aligned} \quad (2)$$

где γ — полный угол сдвига, $\gamma^e(r, t) = \tau(r, t)/G$ — упругая компонента деформации сдвига ($G = E/(2(1 + \mu))$ — модуль сдвига), γ^p — сдвиговая деформация ползучести, θ — относительный угол закручивания.

Соотношения (2) дают

$$\frac{\tau(r, t)}{G} + \gamma^p(r, t) = r\theta(t),$$

откуда получаем

$$\tau(r, t) = G(r\theta(t) - \gamma^p(r, t)). \quad (3)$$

Подставляя соотношение (3) в (1) и проводя необходимые операции интегрирования, получаем формулу для нахождения угла закручивания:

$$\theta(t) = \frac{M}{GJ} + \frac{2\pi}{J} \int_{R_1}^{R_2} \gamma^p(r, t) r^2 dr, \quad (4)$$

где J — момент инерции относительно оси стержня:

$$J = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2}.$$

Вычислив по формуле (4) величину угла закручивания, можно определить распределение касательного напряжения по формуле (3).

Таким образом, алгоритм решения краевой задачи о кручении следующий: сначала определяется начальное упругое напряженное состояние при $t = 0$:

$$\gamma^p(r, 0) = 0; \quad \tau(r, 0) = \frac{M}{J}r,$$

а затем определяются искомые величины в условиях ползучести (при $t > 0$) по схеме:

$$t \rightarrow \gamma^p(r, t) \xrightarrow{(4)} \theta(t) \xrightarrow{(3)} \tau(r, t), \quad (5)$$

где $\gamma^p(r, t)$ рассчитывается по выбранной теории ползучести, а цифры над стрелками означают формулы, по которым вычисляется конкретная величина.

2. Реологическая модель. В соответствии со схемой (5) для решения краевой задачи необходимо уметь рассчитывать компоненту деформации ползучести γ^p . Для этого можно использовать любую теорию ползучести, которая бы адекватно описывала экспериментальные данные.

Для рассматриваемых материалов при испытаниях на кратковременную ползучесть присутствует лишь вторая стадия ползучести. Поэтому в качестве реологической модели можно использовать теорию установившейся ползучести, которая в одноосном случае имеет вид

$$\dot{p} = c\sigma^m. \quad (6)$$

Здесь p — осевая деформация ползучести; σ — осевое напряжение, c и m — параметры материала при данной температуре.

Согласно [8], теория (6) на случай сложного напряженного состояния обобщается следующим образом:

$$\dot{p}_{ij} = \frac{3}{2}cS^{m-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ll} \right), \quad (i, j, l = 1, 2, 3), \quad (7)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, S — интенсивность напряжений, по повторяющемуся индексу l осуществляется суммирование. Тогда для частного случая — чистого кручения — реологическая модель будет иметь вид

$$\dot{\gamma}^p = (c\sqrt{3})(\tau\sqrt{3})^m.$$

Параметры c и m определяются по экспериментальным кривым ползучести в условиях одноосного растяжения при $\sigma = \text{const}$. Для каждого k -того испытания при напряжении $\sigma_k = \text{const}$ определяется скорость деформации

ползучести \dot{p}_k (например, графически). Далее осуществляется аппроксимация полученных данных (σ_k, \dot{p}_k) степенной зависимостью (6).

3. Оценивание параметров степенной зависимости на основе модифицированного метода наименьших квадратов. Изложим методику идентификации параметров c и m степенной аппроксимации

$$\hat{y}(x) = cx^m \quad (8)$$

в соответствии с «классическим» подходом, рекомендованным в [15]. Исходными данными для построения модели (8) служат табличные данные (x_k, y_k) при $k = 1, 2, \dots, N$, где N — объем экспериментальных данных. Согласно методу наименьших квадратов (МНК), оценки параметров c и m должны определяться из условия минимизации функционала — суммы квадратов отклонений теоретических значений $\hat{y}(x_k)$ от табличных значений y_k :

$$Q_{\text{ост}}(c, m) = \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}(x_k))^2 \rightarrow \min.$$

В этом случае система нормальных уравнений формируется на основе вычисления частных производных $\partial Q_{\text{ост}}/\partial c$ и $\partial Q_{\text{ост}}/\partial m$. Нелинейность функциональной зависимости (8) приводит к нелинейности системы нормальных уравнений относительно параметров c и m , что существенно усложняет процедуру их вычисления. В связи с этим в большинстве расчетных методик применяется метод линеаризации. Логарифмируя обе части соотношения (8), получим

$$\ln \hat{y}(x) = \ln c + m \ln x.$$

Обозначив $u_k = \ln y_k$, $v_k = \ln x_k$, $\hat{u} = \ln \hat{y}$, $v = \ln x$, $A = \ln c$, $B = m$, получим линейную по параметрам A и B модель, описывающую табличные данные (v_k, u_k) :

$$\hat{u}(v) = A + Bv. \quad (9)$$

Минимизируя для модели (9) «невязку» $\sum_{k=1}^N (u_k - \hat{u}(v_k))^2$, получаем линейную систему нормальных уравнений вида

$$\begin{cases} N\hat{A} + \hat{B} \sum_{k=1}^N v_k = \sum_{k=1}^N u_k, \\ \hat{A} \sum_{k=1}^N v_k + \hat{B} \sum_{k=1}^N v_k^2 = \sum_{k=1}^N v_k u_k, \end{cases}$$

из решения которой с учетом введенных обозначений $\hat{c} = \exp(\hat{A})$, $\hat{m} = \hat{B}$ находим оценки параметров исходной степенной зависимости (8):

$$\begin{aligned} \hat{c} &= \exp\left(\frac{\sum_{k=1}^N \ln y_k \cdot \sum_{k=1}^N \ln^2 x_k - \sum_{k=1}^N \ln x_k \cdot \sum_{k=1}^N \ln x_k \ln y_k}{N \sum_{k=1}^N \ln^2 x_k - (\sum_{k=1}^N \ln x_k)^2}\right); \\ \hat{m} &= \frac{N \sum_{k=1}^N \ln x_k \ln y_k - \sum_{k=1}^N \ln x_k \cdot \sum_{k=1}^N \ln y_k}{N \sum_{k=1}^N \ln^2 x_k - (\sum_{k=1}^N \ln x_k)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Однако оценки, полученные по формулам (10), оказываются достаточно грубыми, поскольку при формировании системы нормальных уравнений минимизировалась не величина

$$\sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}(x_k))^2 = \sum_{k=1}^N (y_k - cx_k^m)^2,$$

а «невязка»

$$\sum_{k=1}^N (u_k - \hat{u}(v_k))^2 = \sum_{k=1}^N (\ln y_k - \ln c - m \ln x_k)^2.$$

Несмотря на простоту этого вопроса, аппроксимацию зависимости (8) можно улучшить и тем самым существенно уменьшить величину погрешности отклонения расчетных данных от экспериментальных (и как следствие этого — повысить точность расчетной методики решения краевой задачи установившейся ползучести), воспользовавшись идеями работ [16,17]. Представим табличные экспериментальные данные в виде

$$y_k = cx_k^m + e_k, \quad (11)$$

где через e_k обозначены остатки, которые носят случайный характер. Прологарифмируем обе части выражения (11):

$$\ln y_k = \ln (cx^m + e_k) = \ln \left(cx_k^m \left(1 + \frac{e_k}{cx_k^m} \right) \right) = A + B \ln x_k - \ln \left(1 - \frac{e_k}{y_k} \right),$$

где $A = \ln c$, $B = m$.

При малых значениях e_k величина $|e_k/y_k| < 1$ и имеет место разложение в ряд Маклорена

$$\ln \left(1 - \frac{e_k}{y_k} \right) = -\frac{e_k}{y_k} - \frac{1}{2} \left(\frac{e_k}{y_k} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{e_k}{y_k} \right)^3 - \dots,$$

используя которое, из предыдущего выражения получим

$$\ln y_k = A + B \ln x_k + \frac{\hat{e}_k}{y_k},$$

где

$$\hat{e}_k = e_k + \frac{e_k^2}{2y_k} + \frac{e_k^3}{3y_k^2} + \dots = e_k + O(e_k^2) \approx e_k.$$

Окончательно имеем

$$y_k \ln y_k = Ay_k + By_k \ln x_k + \hat{e}_k. \quad (12)$$

Оценки коэффициентов модели (12) находим из условия минимизации функционала

$$\sum_{k=1}^N e_k^2 \approx \sum_{k=1}^N \hat{e}_k^2 = \sum_{k=1}^N (y_k \ln y_k - Ay_k - By_k \ln x_k)^2 \rightarrow \min.$$

Отсюда можно получить линейную систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} \hat{A} \sum_{k=1}^N y_k^2 + \hat{B} \sum_{k=1}^N y_k^2 \ln x_k = \sum_{k=1}^N y_k^2 \ln y_k, \\ \hat{A} \sum_{k=1}^N y_k^2 \ln x_k + \hat{B} \sum_{k=1}^N y_k^2 \ln^2 x_k = \sum_{k=1}^N y_k^2 \ln x_k \ln y_k. \end{cases}$$

С учетом введенных обозначений получаем расчетные формулы для оценок параметров модели (8):

$$\begin{aligned} \hat{c} &= \exp\left(\frac{\sum_{k=1}^N y_k^2 \ln y_k \cdot \sum_{k=1}^N y_k^2 \ln^2 x_k - \sum_{k=1}^N y_k^2 \ln x_k \cdot \sum_{k=1}^N y_k^2 \ln x_k \ln y_k}{\sum_{k=1}^N y_k^2 \cdot \sum_{k=1}^N y_k^2 \ln^2 x_k - \left(\sum_{k=1}^N y_k^2 \ln x_k\right)^2}\right), \\ \hat{m} &= \frac{\sum_{k=1}^N y_k^2 \cdot \sum_{k=1}^N y_k^2 \ln x_k \ln y_k - \sum_{k=1}^N y_k^2 \ln x_k \cdot \sum_{k=1}^N y_k^2 \ln y_k}{\sum_{k=1}^N y_k^2 \cdot \sum_{k=1}^N y_k^2 \ln^2 x_k - \left(\sum_{k=1}^N y_k^2 \ln x_k\right)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Как будет показано ниже, по сравнению с МНК-оценками (10), полученными для линеаризованной модели, использование оценок (13) позволяет существенно уменьшить погрешность отклонения расчетных и экспериментальных данных для исходной степенной аппроксимации (8):

$$\Delta = \left[\frac{\sum_{k=1}^N (y_k^{\text{э}} - y_k^{\text{р}})^2}{\sum_{k=1}^N (y_k^{\text{э}})^2} \right]^{1/2} \cdot 100\%, \quad (14)$$

где N — количество реализаций; $y_k^{\text{э}}$ и $y_k^{\text{р}}$ — экспериментальные и расчетные данные соответственно.

4. Результаты расчетов. Методика (5) решения краевой задачи реализована численно «шагами» по времени с малым шагом дискретизации по временной и пространственной координатам. Приращения компонент тензора деформаций ползучести вычислялись методом Эйлера. При реализации предложенного метода все производные аппроксимировались соответствующими разностными соотношениями, а интегралы вычислялись по квадратурным формулам численного интегрирования.

Далее приведем полученные результаты моделирования для стали 45 и сплава АМГ-6М.

4.1. Сталь 45. В работе [11] для стали 45 приведены результаты испытаний на кратковременную ползучесть при температурах 725 и 740 °С в условиях одноосного растяжения и при кручении сплошных ($R_1 = 0$) стержней. Значения упругих констант материала при данном уровне температур следующие [11]: $E = 1.7 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0.3$.

На рис. 1 точками показаны экспериментальные значения осевой деформации ε_z при одноосном растяжении образцов из стали 45 при температуре 725 °С [11, рис. 5]. На основании этих данных для каждого напряжения были найдены экспериментальные значения скорости деформации ползучести $\dot{p}_{\text{э}}$, представленные в табл. 1. Согласно методике, изложенной в п. 3, по формулам (13) были определены значения параметров реологической модели (7): $c = 7.046 \cdot 10^{-9}$ (МПа) $^{-m}$, $m = 4.2$, в то время как оценки, полученные по формулам (10), следующие: $c = 1.263 \cdot 10^{-9}$ (МПа) $^{-m}$, $m = 4.648$. Для сравнения в табл. 1 также приведены результаты теоретических значений скорости установившейся ползучести $\dot{p}_{\text{р}}$ с параметрами c и m , полученными по формулам (10) и (13) соответственно, а также величины оценки погрешности Δ для

скоростей деформаций в соответствии с формулой (14). Анализ этой информации позволяет сделать вывод, что использование оценок (13) дает более точные оценки параметров модели установившейся ползучести.

Данные расчета деформации ползучести с использованием оценок (13) приведены на рис. 1 сплошными линиями, штриховыми линиями показаны результаты расчетов [11].

Для экспериментов на кручение в работе [11] приведены значения интенсивности напряжений \dot{S} в характеристической точке \dot{R} . Однако для прогнозирования характеристик напряженно-деформированного состояния по схеме (5) необходимо знать значения крутящего момента. Согласно [10], положение характеристической точки применительно к кручению стержней с до-

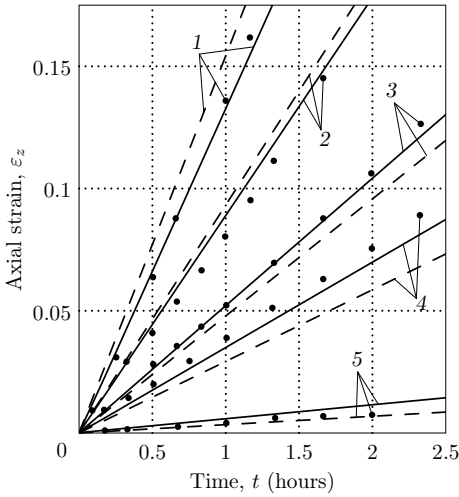


Рис. 1. Значения осевой деформации при растяжении образцов из стали 45 при температуре 725 °С: точки — экспериментальные данные ([11, рис. 5]); сплошные линии — расчетные данные по модели (6), (13); штриховые линии — расчетные данные [11]; 1 — $\sigma = 53.96$ МПа; 2 — $\sigma = 49.05$ МПа; 3 — $\sigma = 43.16$ МПа; 4 — $\sigma = 39.24$ МПа; 5 — $\sigma = 25.51$ МПа

[Figure 1. Values of axial strain under tension for specimens made of the Steel 45 at a temperature of 725 °C: dots — experimental data (from [11, Fig. 5]); solid lines — calculated data by model (6), (13); dashed lines — calculated data by [11]; 1 — $\sigma = 53.96$ МПа; 2 — $\sigma = 49.05$ МПа; 3 — $\sigma = 43.16$ МПа; 4 — $\sigma = 39.24$ МПа; 5 — $\sigma = 25.51$ МПа]

Таблица 1

Зависимость скорости установившейся ползучести \dot{p} от приложенного напряжения $\sigma = \text{const}$ при растяжении стали 45 [Dependencies for steady-state creep rate \dot{p} on applied load $\sigma = \text{const}$ under tension for the Steel 45]

no.	σ (MPa)	\dot{p}_a (hr) ⁻¹	\dot{p}_b (hr) ⁻¹ [11]	\dot{p}_b (hr) ⁻¹ (10)	\dot{p}_b (hr) ⁻¹ (13)
$T = 725^\circ\text{C}$					
1	53.96	$1.35709 \cdot 10^{-1}$	$1.54378 \cdot 10^{-1}$	$1.42002 \cdot 10^{-1}$	$1.33035 \cdot 10^{-1}$
2	49.05	$8.19814 \cdot 10^{-2}$	$9.32407 \cdot 10^{-2}$	$9.11787 \cdot 10^{-2}$	$8.91421 \cdot 10^{-2}$
3	43.16	$5.33530 \cdot 10^{-2}$	$4.78672 \cdot 10^{-2}$	$5.03315 \cdot 10^{-2}$	$5.21031 \cdot 10^{-2}$
4	39.24	$3.82695 \cdot 10^{-2}$	$2.92890 \cdot 10^{-2}$	$3.23177 \cdot 10^{-2}$	$3.49124 \cdot 10^{-2}$
5	25.51	$4.04542 \cdot 10^{-3}$	$3.42310 \cdot 10^{-3}$	$4.36347 \cdot 10^{-3}$	$5.71554 \cdot 10^{-3}$
$\Delta, \%$			14.1	7.6	5.0
$T = 740^\circ\text{C}$					
1	58.86	$5.13033 \cdot 10^{-1}$	$5.45313 \cdot 10^{-1}$	$3.51548 \cdot 10^{-1}$	$5.01939 \cdot 10^{-1}$
2	53.96	$2.24865 \cdot 10^{-1}$	$2.92874 \cdot 10^{-1}$	$2.35042 \cdot 10^{-1}$	$2.64972 \cdot 10^{-1}$
3	49.05	$1.46536 \cdot 10^{-1}$	$1.56127 \cdot 10^{-1}$	$1.51227 \cdot 10^{-1}$	$1.31610 \cdot 10^{-1}$
4	44.15	$5.41082 \cdot 10^{-2}$	$8.31005 \cdot 10^{-2}$	$9.28795 \cdot 10^{-2}$	$6.07196 \cdot 10^{-2}$
5	29.43	$1.80545 \cdot 10^{-2}$	$1.28745 \cdot 10^{-2}$	$1.42293 \cdot 10^{-2}$	$3.09341 \cdot 10^{-3}$
$\Delta, \%$			14.0	28.6	8.1

статочной точностью можно определить как координату пересечения эпюр, соответствующих упругому и установившемуся распределениям касательных напряжений:

$$\hat{R} = \frac{3R_2}{4} \frac{1 - (R_1/R_2)^4}{1 - (R_1/R_2)^3} = \frac{3}{4} \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3} \quad (15)$$

(для сплошных цилиндров $R_1 = 0$ и $\hat{R} = 3R_2/4$). Найдя положение характеристической точки, из упругого распределения касательных напряжений определяем крутящий момент:

$$M = \frac{J\hat{\tau}}{\hat{R}} = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2} \frac{\hat{\tau}}{\hat{R}} = \frac{2\pi(R_2^3 - R_1^3)}{3} \hat{\tau}, \quad (16)$$

где $\hat{\tau} = \hat{S}/\sqrt{3}$ — значение касательного напряжения в характеристической точке. Радиусы стержней и значения крутящих моментов, вычисленные по формуле (16), приведены в табл. 2.

Расчетная схема (5) позволяет определить величину относительного угла закручивания $\theta = \theta(t)$. Для сравнения результатов расчета с экспериментальными данными и данными расчета [11] при кручении для найденного θ определялась интенсивность деформаций в характеристической точке:

$$\hat{\varepsilon}_i(t) = \frac{\hat{R}}{\sqrt{3}} \theta(t) \quad (17)$$

На рис. 2 приведены значения интенсивности деформаций в характеристической точке — экспериментальные (точки), расчетные данные, полученные в работе [11] (штриховые линии) и найденные по схеме (5) с использованием модели (7) и оценками параметров (13), и по формуле (17) (обозначены сплошными линиями). Здесь и далее под «экспериментальным» значением интенсивности деформаций при кручении будем понимать расчетно-экспериментальную величину, определяемую из соотношения (17).

Также в [11] для одного эксперимента при температуре 725 °С приведена зависимость угла закручивания для образца радиуса $R_2 = 9.988$ мм при

Таблица 2

Значения параметров при экспериментальных исследованиях на кручение сплошных стержней из стали 45 [Parameter values of experimental study of torsion of the solid cylinders made of the Steel 45]

но.	R_2 (мм)	\hat{R} (мм)	\hat{S} (МПа)	$\hat{\tau}$ (МПа)	M (Н · мм)
$T = 725^\circ\text{C}$					
1	9.995	7.496	49.05	28.32	59222.3
2	10	7.5	43.16	24.92	52193.9
3	9.988	7.491	39.24	22.66	47278.4
4	9.975	7.481	25.51	14.73	30611.1
$T = 740^\circ\text{C}$					
1	9.996	7.497	49.05	28.32	59240.1
2	9.996	7.497	44.15	25.49	53316.1

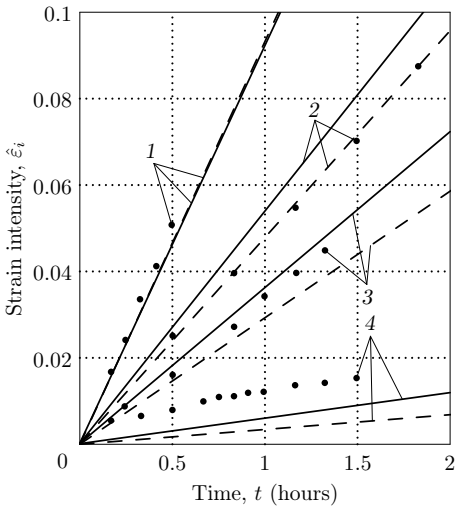


Рис. 2. Значения интенсивности деформаций в характеристической точке при кручении образцов из стали 45 при температуре 725°C: точки — экспериментальные данные ([11, рис. 5]); сплошные линии — расчетные данные по методике (5); штриховые линии — расчетные данные [11]; 1 — $\hat{\sigma} = 49.05$ МПа; 2 — $\hat{\sigma} = 43.16$ МПа; 3 — $\hat{\sigma} = 39.24$ МПа; 4 — $\hat{\sigma} = 25.51$ МПа

[Figure 2. Values of strain intensity at the characteristic point under torsion for specimens made of the Steel 45 at a temperature of 725°C: dots — experimental data (from [11, Fig. 5]); solid lines — calculated data by method (5); dashed lines — calculated data by [11]; 1 — $\hat{\sigma} = 49.05$ МПа; 2 — $\hat{\sigma} = 43.16$ МПа; 3 — $\hat{\sigma} = 39.24$ МПа; 4 — $\hat{\sigma} = 25.51$ МПа]

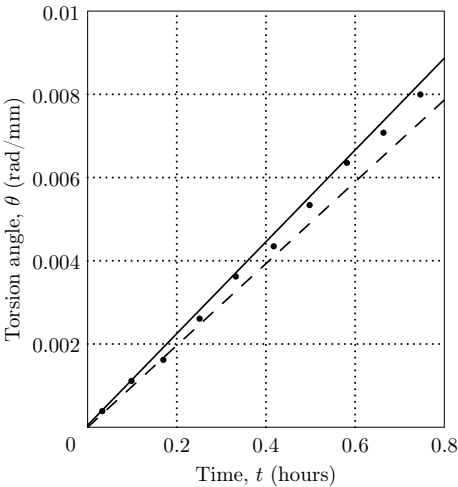


Рис. 3. Изменение угла закручивания для стержня из стали 45 при температуре 725°C ($M = 50521.5$ Н·мм): точки — экспериментальные данные ([11, рис. 4]); сплошная линия — расчетные данные по методике (5); штриховая линия — расчетные данные [11]

[Figure 3. Torsion angle for the specimen made of the Steel 45 at a temperature of 725°C with $M = 50521.5$ Н·мм: dots — experimental data (from [11, Fig. 4]); solid line — calculated data by method (5); dashed line — calculated data by [11]]

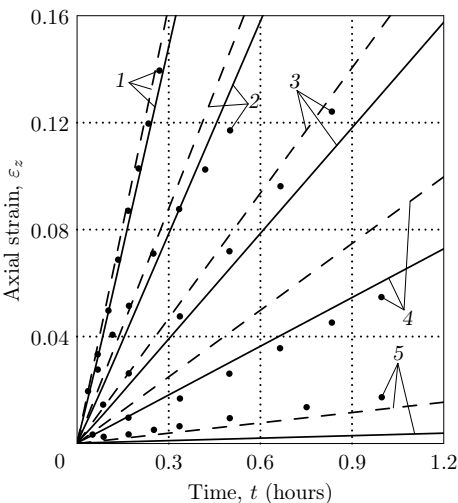


Рис. 4. Значения осевой деформации при растяжении образцов из стали 45 при температуре 740°C: точки — экспериментальные данные ([11, рис. 6]); сплошные линии — расчетные данные по модели (6), (13); штриховые линии — расчетные данные [11]; 1 — $\sigma = 58.86$ МПа; 2 — $\sigma = 53.96$ МПа; 3 — $\sigma = 49.05$ МПа; 4 — $\sigma = 44.15$ МПа; 5 — $\sigma = 29.43$ МПа

[Figure 4. Values of axial strain under tension for specimens made of the Steel 45 at a temperature of 740°C: dots — experimental data (from [11, Fig. 6]); solid lines — calculated data by model (6), (13); dashed lines — calculated data by [11]; 1 — $\sigma = 58.86$ МПа; 2 — $\sigma = 53.96$ МПа; 3 — $\sigma = 49.05$ МПа; 4 — $\sigma = 44.15$ МПа; 5 — $\sigma = 29.43$ МПа]

Рис. 5. Значения интенсивности деформаций в характеристической точке при кручении образцов из стали 45 при температуре 740°C: точки — экспериментальные данные ([11, рис. 6]); сплошные линии — расчетные данные по методике (5); штриховые линии — расчетные данные [11]; $1 - \hat{S} = 49.05$ МПа; $2 - \hat{S} = 44.15$ МПа

[Figure 5. Values of strain intensity at the characteristic point under torsion for specimens made of the Steel 45 at a temperature of 740°C: dots — experimental data (from [11, Fig. 6]); solid lines — calculated data by method (5); dashed lines — calculated data by [11]; $1 - \hat{S} = 49.05$ МПа; $2 - \hat{S} = 44.15$ МПа]

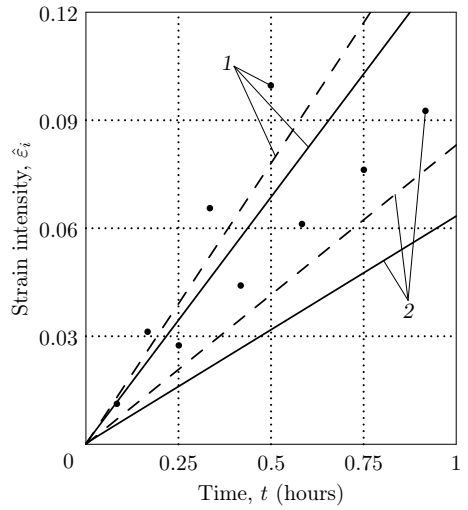


Рис. 6. Значения осевой деформации при растяжении образцов из сплава АМГ-6М при температуре 450°C: точки — экспериментальные данные ([14, рис. 3]); сплошные линии — расчетные данные по модели (6), (13); штриховые линии — расчетные данные [14]; $1 - \sigma = 19.6$ МПа; $2 - \sigma = 14.7$ МПа; $3 - \sigma = 12.25$ МПа; $4 - \sigma = 9.82$ МПа; $5 - \sigma = 7.5$ МПа

[Figure 6. Values of axial strain under tension for specimens made of the AMG-6M alloy at a temperature of 450°C: dots — experimental data (from [14, Fig. 3]); solid lines — calculated data by model (6), (13); dashed lines — calculated data by [14]; $1 - \sigma = 19.6$ МПа; $2 - \sigma = 14.7$ МПа; $3 - \sigma = 12.25$ МПа; $4 - \sigma = 9.82$ МПа; $5 - \sigma = 7.5$ МПа]

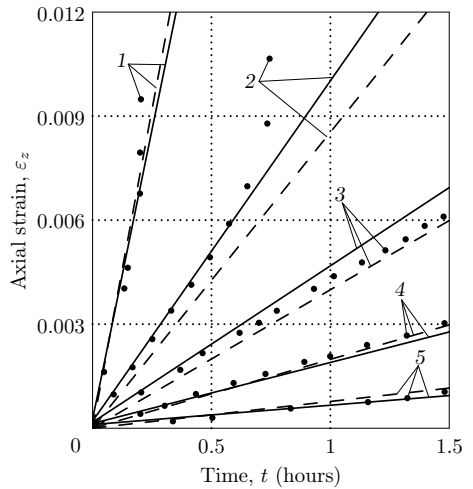
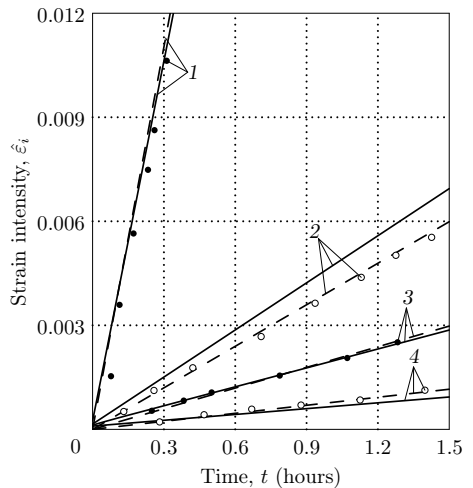


Рис. 7. Значения интенсивности деформаций в характеристической точке при кручении образцов из сплава АМГ-6М при температуре 450°C: темные точки — экспериментальные данные для сплошных образцов ([14, рис. 3]); светлые точки — экспериментальные данные для трубчатых образцов ([14, рис. 3]); сплошные линии — расчетные данные по методике (5); штриховые линии — расчетные данные [14]; $1 - \hat{S} = 19.6$ МПа; $2 - \hat{S} = 12.25$ МПа; $3 - \hat{S} = 9.82$ МПа; $4 - \hat{S} = 7.5$ МПа

[Figure 7. Values of strain intensity at characteristic point under torsion for specimens made of the AMG-6M alloy at a temperature of 450°C: dark dots — experimental data for solid specimens (from [14, Fig. 3]); white dots — experimental data hollow specimens (from [14, Fig. 3]); solid lines — calculated data by method (5); dashed lines — calculated data by [14]; $1 - \hat{S} = 19.6$ МПа; $2 - \hat{S} = 12.25$ МПа; $3 - \hat{S} = 9.82$ МПа; $4 - \hat{S} = 7.5$ МПа]



кручении моментом $M = 50521.5 \text{ Н} \cdot \text{мм}$. Результаты показаны на рис. 3. Здесь погрешность отклонения расчетных данных для угла закручивания θ от экспериментальных данных вычислялась по формуле

$$\Delta\theta = \left[\frac{\sum_{k=1}^N (\theta_k^{\text{э}} - \theta_k^{\text{р}})^2}{\sum_{k=1}^N (\theta_k^{\text{э}})^2} \right]^{1/2} \cdot 100\%, \quad (18)$$

где N — количество экспериментальных значений; $\theta_k^{\text{э}}$ и $\theta_k^{\text{р}}$ — экспериментальные и расчетные значения угла закручивания соответственно. Величина погрешности (18) для расчетных данных по методу настоящей работы составила 3.6%, а для расчетных данных [11] — 8.4%.

Аналогичные исследования для стали 45 проводились при температуре 740°C. По одноосным экспериментальным кривым ползучести (см. рис. 4) с использованием методики, изложенной в п. 3, были найдены оценки параметров реологической модели (7) по формуле (13): $c = 5.085 \cdot 10^{-14} \text{ (МПа)}^{-m}$, $m = 7.342$. Экспериментальные данные и результаты расчетов на растяжение и кручение сплошных образцов приведены на рис. 4 и 5 соответственно (обозначения те же). Значения параметров при экспериментальных исследованиях приведены в табл. 2.

4.2. Сплав АМГ-6М. В работе [14] приведены результаты испытаний на кратковременную ползучесть сплава АМГ-6М при температуре 450°C в условиях одноосного растяжения и при кручении сплошных и толстостенных цилиндрических образцов. Упругие константы для данного материала следующие: $E = 0.7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\mu = 0.33$. С использованием экспериментальных одноосных кривых ползучести [14, рис. 3] для каждого уровня напряжений определялась скорость деформации ползучести; эти данные приведены в табл. 3. Далее согласно методике, изложенной в п. 3, были найдены значения параметров реологической модели (7) с использованием оценок (13): $c = 1.039 \cdot 10^{-7} \text{ (МПа)}^{-m}$, $m = 4.262$. Результаты расчетов при растяжении представлены на рис. 6. Здесь же приведены экспериментальные и расчетные данные из [14]. Величины погрешностей расчетных данных для скоростей деформаций ползучести по данным работы [14] и по оценкам (10) и (13) для метода наименьших квадратов по отношению к экспериментальным данным приведены в последней строке табл. 3.

Таблица 3

Зависимость скорости установившейся ползучести \dot{p} от приложенного напряжения $\sigma = \text{const}$ при растяжении сплава АМГ-6М при температуре 450°C [Dependencies for steady-state creep rate \dot{p} on applied load $\sigma = \text{const}$ under tension for the AMG-6M alloy at a temperature of 450°C]

no.	σ (МПа)	$\dot{p}_{\text{э}}$ (hr ⁻¹)	$\dot{p}_{\text{р}}$ (hr ⁻¹) [14]	$\dot{p}_{\text{р}}$ (hr ⁻¹) (10)	$\dot{p}_{\text{р}}$ (hr ⁻¹) (13)
1	19.6	$3.34605 \cdot 10^{-2}$	$3.67606 \cdot 10^{-2}$	$3.10171 \cdot 10^{-2}$	$3.34675 \cdot 10^{-2}$
2	14.7	$9.97811 \cdot 10^{-3}$	$8.53492 \cdot 10^{-3}$	$9.83745 \cdot 10^{-3}$	$9.81964 \cdot 10^{-3}$
3	12.25	$3.97138 \cdot 10^{-3}$	$3.99199 \cdot 10^{-3}$	$4.75132 \cdot 10^{-3}$	$4.51440 \cdot 10^{-3}$
4	9.82	$2.00677 \cdot 10^{-3}$	$1.98536 \cdot 10^{-3}$	$1.96568 \cdot 10^{-3}$	$1.75919 \cdot 10^{-3}$
5	7.5	$7.17912 \cdot 10^{-4}$	$7.71509 \cdot 10^{-4}$	$6.70320 \cdot 10^{-4}$	$5.57711 \cdot 10^{-4}$
$\Delta, \%$			10.2	7.3	1.8

Таблица 4

Значения параметров при экспериментальных исследованиях на кручение сплошных и трубчатых цилиндрических образцов из сплава АМГ-6М при температуре 450°C [Parameter values of experimental study of torsion of solid and hollow cylinder specimens made of the AMG-6M alloy at a temperature of 450°C]

no.	R_1 (mm)	R_2 (mm)	\hat{R} (mm)	\hat{S} (MPa)	$\hat{\tau}$ (MPa)	M (N · mm)
1	0	10	7.5	19.6	11.32	23700.3
2	8	11	9.657	12.25	7.07	12131.6
3	0	10	7.5	9.82	5.67	11874.3
4	8	11	9.657	7.5	4.33	7427.5

Значения параметров при испытаниях на кручение сплошных и толсто-стенных цилиндрических образцов приведены в табл. 4. Результаты расчетов интенсивности деформаций в характеристической точке показаны на рис. 7: темными точками отмечены испытания на кручение сплошных образцов, светлыми точками — испытания трубчатых образцов.

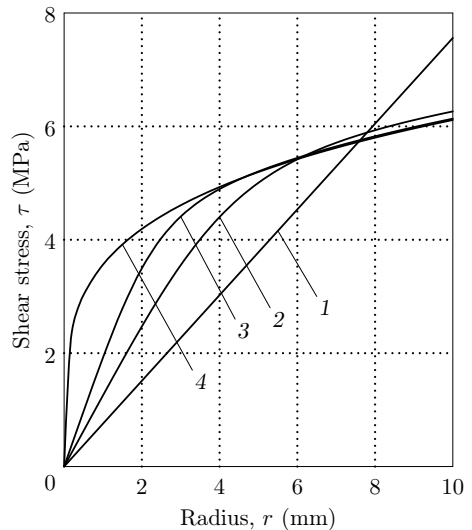
Выводы. Как следует из информации, представленной на рис. 2, 3, 5, 7, наблюдается соответствие данных расчета на кручение цилиндрических образцов по реологической модели при сложном напряженном состоянии (7) и методике решения краевой задачи (5) с экспериментальными данными, а также с результатами расчетов по методу характеристической точки [11, 14].

В отличие от отмеченных работ [11, 14], в которых осуществлялась аппроксимация всех экспериментальных значений интенсивности деформаций лишь в одной характеристической точке, предложенная методика позволяет по известным одноосным кривым ползучести осуществлять расчет напряженно-деформированного состояния для любых пространственно-временных сечений цилиндрического образца. В качестве примера на рис. 8 и 9 приведены расчетные распределения касательных напряжений в различные временные сечения для сплошного и полого цилиндров соответственно.

Из информации, представленной на рис. 8 и 9, следует, что с течением времени происходит перераспределение касательных напряжений по радиусу

Рис. 8. Расчетные эпюры касательных напряжений $\tau = \tau(r, t)$ при кручении сплошного цилиндра из сплава АМГ-6М при температуре 450°C при $\hat{S} = 9.82$ МПа в различные моменты времени: 1 — $t = 0$; 2 — $t = 0.04$ ч; 3 — $t = 0.1$ ч; 4 — $t = 1.5$ ч

[Figure 8. Calculated diagram for shear stress $\tau = \tau(r, t)$ under torsion of a solid specimen made of the AMG-6M alloy at a temperature of 450°C with $\hat{S} = 9.82$ MPa at different time points: 1 — $t = 0$; 2 — $t = 0.04$ hr; 3 — $t = 0.1$ hr; 4 — $t = 1.5$ hr]



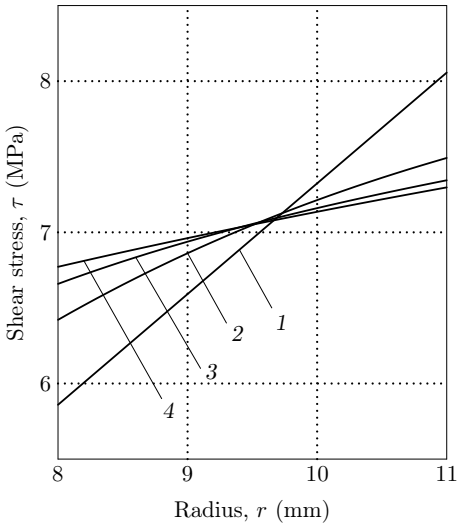


Рис. 9. Расчетные эпюры касательных напряжений $\tau = \tau(r, t)$ при кручении полого цилиндра из сплава АМГ-6М при температуре 450°C при $\dot{S} = 12.25$ МПа в различные моменты времени: 1 – $t = 0$; 2 – $t = 0.01$ ч; 3 – $t = 0.02$ ч; 4 – $t = 1.5$ ч

[Figure 9. Calculated diagram for shear stress $\tau = \tau(r, t)$ under torsion of an hollow specimen made of the AMG-6M alloy at a temperature of 450°C with $\dot{S} = 12.25$ МПа at different time points: 1 – $t = 0$; 2 – $t = 0.01$ hr; 3 – $t = 0.02$ hr; 4 – $t = 1.5$ hr]

вследствие деформации ползучести. Следует также отметить, что расчетные эпюры касательных напряжений действительно пересекаются в окрестности характеристической точки, теоретическое положение которой было получено расчетным путем по формуле (15).

Таким образом, новая методика идентификации параметров даже для простейшей модели установившейся ползучести позволяет существенно снизить погрешность аппроксимации первичных кривых стационарной ползучести (см. рис. 1, 4, 6 и табл. 1, 3). Это, в свою очередь, позволило снизить погрешность решения краевой задачи для угла закручивания стержня (см. рис. 3). Однако в целом расчет напряженно-деформированного состояния посредством решения краевой задачи и методом характеристической точки дают близкие результаты и хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Конкурирующие интересы. Заявляю, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00249_a).

Библиографический список

1. Локощенко А. М., Платонов Д. О. Длительная прочность никелевого сплава ЭИ437БУ-ВД при сложном напряженном состоянии // *Машиностроение и инженерное образование*, 2010. № 2. С. 15–24.
2. Радченко В. П., Башкинова Е. В., Кубышкина С. Н. Об одном подходе к оценке длительной прочности толстостенных труб на основе интегрально-средних напряженных состояний // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002. № 16. С. 96–104. doi: [10.14498/vsgtu105](https://doi.org/10.14498/vsgtu105).
3. Johnson A. E. Complex-stress creep of metals // *Metallurgical Reviews*, 1960. vol. 5, no. 20. pp. 447–506. doi: [10.1179/mtlr.1960.5.1.447](https://doi.org/10.1179/mtlr.1960.5.1.447).

4. Huddleston R. L. An improved multiaxial creep-rupture strength criterion // *J. Pressure Vessel Technol.*, 1985. vol. 107, no. 4. pp. 421–429. doi: [10.1115/1.3264476](https://doi.org/10.1115/1.3264476).
5. Hayhurst D. R. Creep rupture under multi-axial states of stress // *J. Mech. Phys. Solids*, 1972. vol. 20, no. 6. pp. 381–390. doi: [10.1016/0022-5096\(72\)90015-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(72)90015-4).
6. Greenwood G. W. Grain shape effects on interface-controlled diffusional creep under multiaxial stresses // *Acta Met. Et. Mater.*, 1995. vol. 43, no. 5. pp. 1811–1816. doi: [10.1016/0956-7151\(94\)00389-Y](https://doi.org/10.1016/0956-7151(94)00389-Y).
7. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
8. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций*. М.: Машиностроение-1, 2004. 264 с.
9. Радченко В. П., Кубышкина С. Н. Математическая модель реологического деформирования и разрушения толстостенной трубы // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998. № 6. С. 23–34. doi: [10.14498/vsgtu4](https://doi.org/10.14498/vsgtu4).
10. Горев Б. В. К оценке ползучести и длительной прочности элементов конструкций по методу характеристических параметров. Сообщение 1 // *Пробл. прочности*, 1979. № 4. С. 30–36.
11. Банщикова И. А., Горев Б. В., Сухоруков И. В. Двумерные задачи формообразования стержней в условиях ползучести // *ПМТФ*, 2002. Т. 43, № 3. С. 129–139.
12. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. *Энергетический вариант теории ползучести*. Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1986. 96 с.
13. Радченко В. П., Цветков В. В. Напряженно-деформированное состояние цилиндрического образца из сплава Д16Т в условиях осевого растяжения и кручения при ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 3(32). С. 77–86. doi: [10.14498/vsgtu1277](https://doi.org/10.14498/vsgtu1277).
14. Ларичкин А. Ю., Горев Б. В. Построение сдвиговых деформаций ползучести из чистого кручения сплошных круглых валов // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*, 2013. № 3 (177). С. 212–219.
15. Львовский Е. Н. *Статистические методы построения эмпирических формул*. М.: Высш. шк., 1988. 239 с.
16. Зотеев В. Е. *Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений*. М.: Машиностроение, 2009. 344 с.
17. Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю. Численный метод оценки параметров деформации ползучести при степенной зависимости параметра разупрочнения // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*, 2016. № 3 (51). С. 18–25.

MSC: 74D10; 74C20, 74K10

Solution of the boundary-value problem of torsion for solid and hollow cylindrical specimens made of the Steel 45 and AMG-6M alloy under short-term steady-state creep conditions

V. V. Tsvetkov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

We have developed a method for solving the boundary-value problem of torsion for solid and hollow cylindrical specimens under steady-state creep conditions. The definition of rheological model is carried out with experimental stationary creep curves under uniaxial tension in accordance with the modified method of least squares. Comparison of calculated characteristics of the stress-state with corresponding test data was made for short-time creep of cylindrical specimens made of the Steel 45 or AMG-6M alloy. The dependencies for strain intensity at the characteristic point and torsion angle on time are obtained and compared with the data calculated by the method of characteristic point. The estimates of errors of deviation of calculated data from experimental values are given and there is good-enough correspondence between the experimental and calculated data. The calculated diagrams for shear stress along the radius at different time points are obtained during torsion for both solid and hollow cylinders.

Keywords: boundary-value problem, cylindrical specimen, tension, torsion, steady-state creep, numerical method.

Received: 28th June, 2017 / Revised: 29th August, 2017 /


Accepted: 18th September, 2017 / First online: 10th November, 2017

Competing interests. I declare that I have no conflicts of interests with the authorship and publication of this article.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00249_a).

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Tsvetkov V. V. Solution of the boundary-value problem of torsion for solid and hollow cylindrical specimens made of the Steel 45 and AMG-6M alloy under short-term steady-state creep conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 3, pp. 507–523. doi: [10.14498/vsgtu1551](https://doi.org/10.14498/vsgtu1551) (In Russian).

Author's Details:

Vitaly V. Tsvetkov  <http://orcid.org/0000-0001-9285-7607>

Postgraduate Student; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science;

e-mail: vi.v.tsvetkoff@mail.ru

References

1. Lokoshchenko A. M., Platonov D. O. Long-term strength of nickel alloy EI437BU-WD at the complex stress state, *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2010, no. 2, pp. 15–24 (In Russian).
2. Radchenko V. P., Bashkinova E. V., Kubyskhina S. N. On one approach to estimate of long-term strength for thick-walled pipe based on integral-average stress states, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2002, no. 16, pp. 96–104 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu105](https://doi.org/10.14498/vsgtu105).
3. Johnson A. E. Complex-stress creep of metals, *Metallurgical Reviews*, 1960, vol. 5, no. 20, pp. 447–506. doi: [10.1179/mtlr.1960.5.1.447](https://doi.org/10.1179/mtlr.1960.5.1.447).
4. Huddleston R. L. An improved multiaxial creep-rupture strength criterion, *J. Pressure Vessel Technol.*, 1985, vol. 107, no. 4, pp. 421–429. doi: [10.1115/1.3264476](https://doi.org/10.1115/1.3264476).
5. Hayhurst D. R. Creep rupture under multi-axial states of stress, *J. Mech. Phys. Solids*, 1972, vol. 20, no. 6, pp. 381–390. doi: [10.1016/0022-5096\(72\)90015-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(72)90015-4).
6. Greenwood G. W. Grain shape effects on interface-controlled diffusional creep under multiaxial stresses, *Acta Met. Et. Mater.*, 1995, vol. 43, no. 5, pp. 1811–1816. doi: [10.1016/0956-7151\(94\)00389-Y](https://doi.org/10.1016/0956-7151(94)00389-Y).
7. Lokoshchenko A. M. *Polzuchest' i dlitel'naiá prochnost' metallov* [Creep and long-term strength of metals]. Moscow, Fizmatlit, 2016, 504 pp. (In Russian)
8. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruktsiy* [Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 264 pp. (In Russian)
9. Radchenko V. P., Kubyskhina S. N. A mathematical model of rheological deformation and fracture for thick-walled pipe, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 1998, no. 6, pp. 23–34 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu4](https://doi.org/10.14498/vsgtu4).
10. Gorev B. V. On the estimation of creep and long-term strength of structural elements using the method of characteristic parameters. Message 1, *Probl. prochnosti* [Strength of Materials], 1979, no. 4, pp. 30–36 (In Russian).
11. Bانشchikova I. A., Gorev B. V., Sukhorukov I. V. Two-dimensional problems of beam forming under conditions of creep, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2002, vol. 43, no. 3, pp. 448–456. doi: [10.1023/a:1015382723827](https://doi.org/10.1023/a:1015382723827).
12. Gorev B. V., Nikitenko A. F. *Energeticheskii variant teorii polzuchesti* [Energy variant of the theory of creep]. Novosibirsk, Inst. of Hydrodynamics, USSR Acad. of Sci., 1986, 96 pp. (In Russian)
13. Radchenko V. P., Tsvetkov V. V. The stress-strain state of cylindrical sample from alloy D16T under axial tension and torsion creep, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 3(32), pp. 77–86 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1277](https://doi.org/10.14498/vsgtu1277).
14. Larichkin A. Yu., Gorev B. V. The constructing shear strains from the pure torsion of round solid samples, *St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*, 2013, no. 3 (177), pp. 212–219 (In Russian).
15. Lvovsky E. N. *Statisticheskie metody postroeniia empiricheskikh formul* [Statistical methods for constructing empirical formulas]. Moscow, Vyssh. shk., 1988, 239 pp. (In Russian)
16. Zoteev V. E. *Parametricheskaiá identifikatsiia dissipativnykh mekhanicheskikh sistem na osnove raznostnykh uravnenii* [Parametric Identification of Dissipative Mechanical Systems Based on Difference Equations]. Moscow, Mashinostroenie, 2009, 344 pp. (In Russian)
17. Zoteev V. E., Makarov R. Yu. Numerical method of estimation of parameters of deformation of creep in the exponential dependency of parameter of weakening from the strain, *Sovremennye tekhnologii. Sistemy analiz. Modelirovanie*, 2016, no. 3 (51), pp. 18–25 (In Russian).