



УДК 539.4

## Уточненная модель упругопластического поведения продольно-армированных искривленных балок-стенок при динамическом нагружении

*А. П. Янковский*

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

### Аннотация

Сформулирована начально-краевая задача, описывающая динамическое поведение гибких продольно-армированных балок-стенок малой кривизны. Механическое поведение материалов фаз композиции балок описывается определяющими уравнениями теории пластического течения с изотропным упрочнением. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Полученные уравнения и соотношения позволяют с разной степенью точности определять напряженно-деформированное состояние рассматриваемых балок, учитывая их ослабленное сопротивление поперечным сдвигам. В первом приближении из построенных соотношений вытекают уравнения, соответствующие второму варианту теории Тимошенко. Для численного интегрирования поставленной задачи используется метод шагов по времени с привлечением центральных разностей для аппроксимации встречающихся производных по времени. Рассматриваются продольно-армированные прямолинейные и слегка искривленные балки-стенки относительно малой высоты. Исследуется динамический отклик таких конструкций в зависимости от поверхности (вогнутой или выпуклой) приложения внешнего давления, вызванного приходом воздушной взрывной волны. Установлено, что при интервалах времени, превышающих несколько десятых долей секунды, упругопластическое поведение гибких армированных прямолинейных и искривленных балок-стенок, определяемое по второму варианту теории Тимошенко, значительно отличается от неупругого динамического отклика, рассчитанного по уточненной теории.

**Ключевые слова:** гибкие балки, армирование, геометрическая нелинейность, динамическое деформирование, теория пластического течения, изотропное упрочнение, второй вариант теории Тимошенко, численное интегрирование, схема «крест».

Получение: 10 апреля 2017 г. / Исправление: 18 августа 2017 г. /

Принятие: 18 сентября 2017 г. / Публикация онлайн: 10 ноября 2017 г.

---

### Статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Янковский А. П. Уточненная модель упругопластического поведения продольно-армированных искривленных балок-стенок при динамическом нагружении // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 3. С. 524–545. doi: [10.14498/vsgtu1539](https://doi.org/10.14498/vsgtu1539).

### Сведения об авторе

*Андрей Петрович Янковский* <http://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. физики быстропротекающих процессов; e-mail: [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru)

**Введение.** Армированные элементы конструкций находят все более широкое применение в изделиях аэрокосмического назначения, в судостроении и машиностроении [1–4 и др.]. При этом тонкостенные композитные конструкции типа пластин и оболочек зачастую подкрепляются силовым набором из прямолинейных или искривленных стержневых элементов [5–7 и др.]. Повреждаемость этих силовых элементов в значительной степени определяет возможность дальнейшего использования содержащих их конструкций, поэтому актуальной является проблема адекватного описания механического поведения композитных балок и стержней [7–10 и др.], в том числе и при динамическом их нагружении [7, 11–13 и др.].

Многие современные композитные изделия подвергаются высокоинтенсивному нагружению, при котором материалы компонентов композиции ведут себя неупруго [7, 11, 13, 14 и др.]. В силу этого особый интерес вызывают вопросы, связанные с моделированием упругопластического поведения прямолинейных и искривленных композитных балок. На сегодняшний день эта проблема, по сути, находится на стадии становления. Например, в работах [7, 8, 15 и др.] изучалось динамическое и статическое неупругое поведение композитных балок, однако исследования проводились на базе гипотез классической теории, т. е. не учитывался поперечный сдвиг при изгибе. В случае слоистых упругопластических балок ослабленное их сопротивление поперечному сдвигу учитывалось в рамках первого варианта теории Тимошенко или на основе гипотезы ломаной линии [11, 12 и др.]. В работах [13, 16] было показано, что и в случае продольно-армированных балок-стенок при их неупругом деформировании необходимо учитывать ослабленное сопротивление поперечному сдвигу как при квазистатическом, так и при динамическом их нагружении. При этом исследования проводились на базе гипотез первого и второго вариантов теории Тимошенко. Однако в [14] было продемонстрировано, что по крайней мере в рамках деформационной теории пластичности при статическом нагружении второй вариант теории Тимошенко (который с математической точки зрения является более точным, чем первый вариант [13]) не гарантирует получения адекватных результатов расчетов неупругого изгибного поведения продольно-армированных балок-стенок и требуется использование уточненных теорий изгиба. Вопрос об адекватном описании динамического деформирования таких балок в рамках второго варианта теории Тимошенко, когда механическое поведение материалов фаз композиции описывается соотношениями теории упругопластического течения, остается открытым, т. е. открытым остается вопрос: требуют ли уточнения решения, полученные в [13] на базе гипотез второго варианта теории Тимошенко?

В связи с этим настоящее исследование посвящено построению уточненной (по сравнению со вторым вариантом теории Тимошенко) модели динамического деформирования гибких изогнутых балок-стенок, армированных в продольном направлении, упругопластическое поведение материалов фаз композиции которых описывается соотношениями теории течения с изотропным упрочнением. Моделирование осуществляется на основе метода шагов по времени с привлечением численной схемы типа «крест».

**1. Постановка задачи.** Рассматриваются прямолинейные (рис. 1, а) или искривленные в своей плоскости (рис. 1, б) продольно-армированные балки-стенки длиной  $L$ , имеющие прямоугольные поперечные сечения высотой  $2h = \text{const}$  и толщиной  $B = \text{const}$ , причем  $\max(2h, B) \ll L \ll R$ , где  $R$  — радиус кривизны срединного слоя изогнутой балки-стенки (на рис. 1, б не изображен), т. е. такие балки обладают малой кривизной.

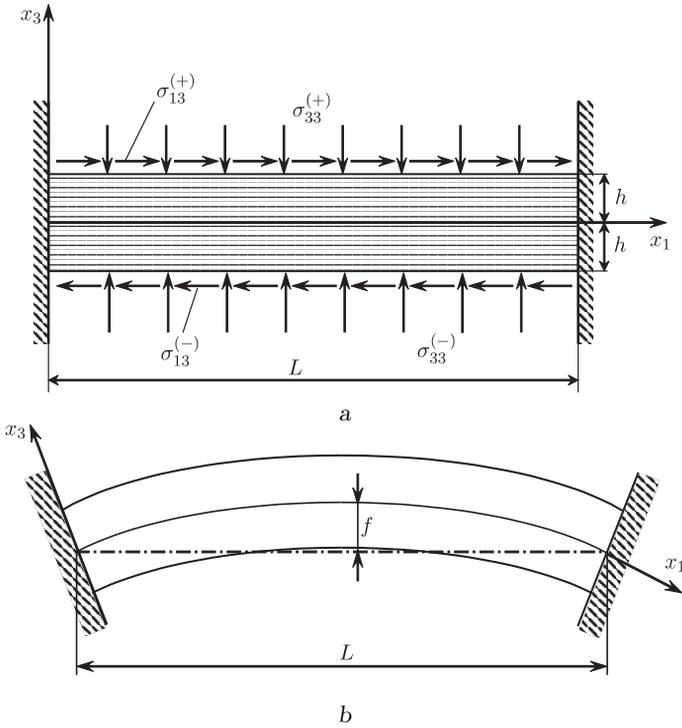


Рис. 1. Продольно-армированные прямолинейная (а) и искривленная (b) балки-стенки [Figure 1. Longitudinally reinforced rectilinear (a) and curved (b) wall-beams]

С балкой связана ортогональная система координат  $x_i$  такая, что цилиндрическая поверхность  $x_1x_2$  ( $x_3 = 0$ ) является срединной ( $|x_3| \leq h$ ), а направление  $Ox_1$  — продольное. В силу малой искривленности балки-стенки стрела подъема  $f$  (см. рис. 1, b) не должна превышать  $1/5$  ее длины  $L$  [17], при этом метрику в плоскости  $Ox_1x_3$  приближенно можно отождествить с метрикой в декартовой прямоугольной системе координат (см. рис. 1, a).

Гибридная композитная балка продольно усилена  $N$  семействами волокон с плотностями армирования  $\omega_s$ , причем структура армирования квазиоднородна ( $\omega_s = \text{const}$ ,  $1 \leq s \leq N$ ). Внешние нагрузки предполагаются заданными в плоскости  $Ox_1x_3$  (рис. 1) и не зависящими от переменной  $x_2$ , поэтому и решение исследуемой задачи предполагается не зависящим от координаты  $x_2$ , перпендикулярной плоскости рис. 1.

В силу продольного армирования рассматриваемых балок-стенок для адекватного описания их изгибного поведения необходимо учитывать ослабленное сопротивление поперечному сдвигу [5, 6, 13, 14, 16 и др.]. С этой целью среднюю сдвиговую деформацию композиции  $\varepsilon_{13}$  аппроксимируем так [14]:

$$\varepsilon_{13}(t, \mathbf{x}) = \frac{x_3 + h}{2h} \varepsilon_{13}^{(+)}(t, x_1) - \frac{x_3 - h}{2h} \varepsilon_{13}^{(-)}(t, x_1) + \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \varepsilon_{13}^{(k)}(t, x_1), \quad (1)$$

$$0 \leq x_1 \leq L, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_3\},$$

где  $\varepsilon_{13}^{(\pm)}$ ,  $\varepsilon_{13}^{(k)}$  — функции продольной координаты  $x_1$  и времени  $t$ , причем  $\varepsilon_{13}^{(\pm)}$  — деформация поперечного сдвига на верхней и нижней ( $x_3 = \pm h$ ) поверхностях

балки-стенки, при  $\varepsilon_{13}^{(\pm)} = 0$  функция  $\varepsilon_{13}^{(0)}$  определяет деформацию поперечного сдвига в срединном слое ( $x_3 = 0$ );  $K$  — целое число, которое определяет количество слагаемых, удерживаемых в частичной сумме;  $t_0$  — начальный момент времени. При задании  $K = 0$  получаются соотношения, вытекающие из второго варианта теории Тимошенко [13, 16].

Согласно традиционной для балок кинематической гипотезе, изменяемостью перемещения  $u_3(t, \mathbf{x})$  в направлении  $Ox_3$  пренебрегаем [11–16 и др.]:

$$u_3(t, \mathbf{x}) = w(t, x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (2)$$

где  $w$  — прогиб точек отсчетной поверхности  $x_3 = 0$ .

Для слегка искривленных балок-стенок основные кинематические и динамические соотношения можно получить из соответствующих уравнений для пологих оболочек, поэтому на основании дифференциальных связей между деформациями и перемещениями (см. стр. 78 в [18]) с учетом равенств (1) и (2) в приближении Кармана получим

$$\begin{aligned} u_1(t, \mathbf{x}) = & u(t, x_1) - x_3 \partial_1 w + \\ & + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{x_3^2}{k+3} \right) \varepsilon_{13}^{(k)} + \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \varepsilon_{13}^{(+)} - \\ & - \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) \varepsilon_{13}^{(-)}, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t, \mathbf{x}) = & \partial_1 u - x_3 \partial_1^2 w + \\ & + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{x_3^2}{k+3} \right) \partial_1 \varepsilon_{13}^{(k)} + \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \partial_1 \varepsilon_{13}^{(+)} - \\ & - \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) \partial_1 \varepsilon_{13}^{(-)} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (\partial_1 w)^2, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $u_1$  — перемещение точек в продольном направлении;  $u$  — то же для точек срединного слоя  $x_3 = 0$ ;  $\partial_1$  — оператор частного дифференцирования по продольной координате  $x_1$ .

Не выписанные в (1) и (4) осредненные деформации композиции  $\varepsilon_{ij}$  либо тождественно равны нулю ( $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} \equiv 0$ ), либо однозначно определяются в процессе решения задачи, как это сделано в [13] при  $K = 0$ .

Таким образом, в соотношениях (1)–(4) неизвестны функции  $u$ ,  $w$ ,  $\varepsilon_{13}^{(\pm)}$ ,  $\varepsilon_{13}^{(k)}$  ( $0 \leq k \leq K$ ), зависящие только от продольной координаты  $x_1$  и времени  $t$ .

Как и в [13], предполагается, что материалы компонентов композиции однородны и изотропны, а их механическое поведение описывается определяющими уравнениями теории пластического течения с изотропным упрочнением (см. соотношения (1.6)–(1.9) в [13]). Используем равенство  $\sigma_{22} \equiv 0$ , которое справедливо для рассматриваемых балок-стенок (см. рис. 1), и традиционную для тонкостенных элементов конструкций силовую гипотезу  $\sigma_{33} \approx 0$  [5–7, 11–16, 18 и др.], после чего, повторяя рассуждения из [13] (см. там равенства (1.10)–(1.29)), получим следующие определяющие соотношения для продольно-армированного материала исследуемой балки-стенки:

$$\dot{\sigma}_{11} = A_{11} \dot{\varepsilon}_{11} - 2A_{13} \dot{\varepsilon}_{13}, \quad \dot{\sigma}_{13} = -A_{13} \dot{\varepsilon}_{11} + A_{33} \dot{\varepsilon}_{13}, \quad (5)$$

где  $\sigma_{ij}$  — осредненные напряжения в композиции; точка означает производную по времени  $t$ ; коэффициенты  $A_{ij}$  определяются по структурным формулам (1.30) из [13]. На основании равенств (5) можно вычислить скорости всех силовых факторов, возникающих в балке-стенке (для разрабатываемой далее численной схемы это делать не обязательно).

Средние напряжения  $\sigma_{ij}$  должны удовлетворять уравнениям динамического равновесия элемента балки-стенки, которые в рассматриваемом здесь приближении (см. (2)) имеют вид (см. стр. 79 в [18]):

$$\rho \ddot{u}_1(t, \mathbf{x}) = \partial_1(\sigma_{11} - \sigma_{13} \partial_1 w) + R^{-1} \sigma_{13} + X_1(t, \mathbf{x}); \quad (6)$$

$$\rho \ddot{u}_3(t, \mathbf{x}) = \partial_1(\sigma_{13} + \sigma_{11} \partial_1 w) + \partial_3 \sigma_{33} - R^{-1} \sigma_{11} + X_3(t, \mathbf{x}), \quad (7)$$

$$0 \leq x_1 \leq L, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где  $\rho$  — объемная плотность композиции (см. первое равенство (1.39) в [13]);  $X_i$  — компоненты объемной нагрузки, действующей на армированный материал (как и  $\rho$ , вычисляются по правилу простой смеси).

Для получения уравнений движения балки, записанных через силовые факторы, проинтегрируем равенство (6) по ее высоте с весом  $Bx_3^l$ , а уравнение (7) — с весом  $B$ , тогда, учитывая приближенное равенство (2), получим<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_1^{(l)} = & \partial_1(M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1 w) - l M_{13}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_1 w + \\ & + B h^l [\sigma_{13}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{13}^{(-)}] - B h^l [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)}] \partial_1 w + \\ & + R^{-1} M_{13}^{(l)} + X_1^{(l)}, \quad 0 \leq l \leq K + 1; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} 2hB\rho \ddot{w} = & \partial_1(M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w) - R^{-1} M_{11}^{(0)} + \\ & + B(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) + X_3^{(0)}, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} X_i^{(l)}(t, x_1) &= B \int_{-h}^h X_i(t, \mathbf{x}) x_3^l dx_3, \\ \sigma_{i3}^{(\pm)}(t, x_1) &= \sigma_{i3}(t, x_1, \pm h), \\ M_{ij}^{(l)}(t, x_1) &= B \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{x}) x_3^l dx_3, \\ u_1^{(l)}(t, x_1) &= B \int_{-h}^h u_1(t, \mathbf{x}) x_3^l dx_3, \quad i = 1, 3. \end{aligned} \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На основании третьих соотношений (10) получаем следующее:  $M_{11}^{(0)} \equiv F_{11}$ ,  $M_{11}^{(1)} \equiv M_{11}$  — продольная сила и изгибающий механический момент в балке-стенке;  $M_{13}^{(0)} \equiv F_{13}$  — поперечная сила; остальные силовые факторы — математические моменты высших порядков.

<sup>1</sup>При выводе уравнений (8) использовали формулу интегрирования по частям.

Согласно второму равенству (10), напряжения  $\sigma_{i3}^{(\pm)}$  известны из силовых граничных условий, которые задаются на верхней и нижней поверхностях балки-стенки:  $x_3 = \pm h$ . (Например, на рис. 1, а изображен случай, когда  $\sigma_{13}^{(\pm)} > 0$ ,  $\sigma_{33}^{(\pm)} < 0$ ). Так как высота балки предполагается много меньше ее длины ( $2h \ll L$ ) и в силу того что исследуется ее динамическое поведение как гибкой тонкостенной механической системы (явления типа ударных волн не рассматриваются [13]), напряжение  $\sigma_{33}(t, \mathbf{x})$  в уравнении (7) с приемлемой для инженерных приложений точностью можно аппроксимировать линейно по переменной  $x_3$ :

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{x}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, x_1) - \sigma_{33}^{(-)}(t, x_1)}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, x_1) + \sigma_{33}^{(-)}(t, x_1)}{2}, \quad (11)$$

$$0 \leq x_1 \leq L, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0.$$

Используя третье соотношение (10) (при  $i = j = 3$ ) и выражение (11), вычислим в уравнениях (8) сомножитель

$$lM_{33}^{(l-1)}(t, x_1) = Bl \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{x}) x_3^{l-1} dx_3 =$$

$$= \frac{Bh^l}{2} \left[ (\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \right.$$

$$\left. + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right], \quad 0 \leq l \leq K + 1. \quad (12)$$

К уравнениям движения (8), (9) нужно присоединить два силовых граничных условия на верхней и нижней поверхностях балки-стенки (см. (1), (4), (5) и (10)):

$$A_{33}^{(\pm)}(t, x_1) \dot{\varepsilon}_{13}^{(\pm)}(t, x_1) - A_{13}^{(\pm)}(t, x_1) \dot{\varepsilon}_{11}(t, x_1, \pm h) = \dot{\sigma}_{13}^{(\pm)}(t, x_1), \quad (13)$$

$$0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq t_0,$$

где  $A_{i3}^{(\pm)}(t, x_1) \equiv A_{i3}(t, x_1, \pm h)$ ,  $i = 1, 3$ . Правые части в (13) известны в данный момент времени.

В случае  $K = 0$ ,  $R^{-1} = 0$ ,  $\sigma_{13}^{(\pm)} = 0$  и  $X_i = 0$  уравнения (8) и (9) с учетом (10), (12) при соответствующих переобозначениях (см. замечание 1) совпадают с уравнениями движения (1.36), (1.41) и (1.43) из [13].

Для однозначного интегрирования рассматриваемой начально-краевой задачи необходимо задать начальные и граничные условия.

Если к торцевой поверхности балки-стенки с координатой  $x_1 = x_1^* = \text{const}$  приложены поверхностные нагрузки  $p_1$  и  $p_3$ , то в рамках принятого здесь приближения (см. (2)) имеют место следующие силовые граничные условия:

$$n_1(x_1^*)(\sigma_{11} - \sigma_{13}\partial_1 w) = p_1(t, x_1^*, x_3), \quad (14)$$

$$n_1(x_1^*)(\sigma_{13} + \sigma_{11}\partial_1 w) = p_3(t, x_1^*, x_3); \quad (15)$$

$$x_1^* = 0 \text{ и/или } x_1^* = L, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где

$$n_1(x_1^*) = \begin{cases} -1, & x_1^* = 0, \\ +1, & x_1^* = L. \end{cases} \quad (16)$$

Если же в точках торцевой поверхности  $x_1 = x_1^*$  заданы кинематические граничные условия, то (см. (2) и (3))

$$w(t, x_1^*) = u_{*3}(t, x_1^*), \quad (17)$$

$$u_1(t, x_1^*, x_3) = u_{*1}(t, x_1^*, x_3); \quad (18)$$

$$x_1^* = 0 \text{ и/или } x_1^* = L, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где  $u_{*3}$  — заданный в сечении  $x_1 = x_1^*$  прогиб;  $u_{*1}$  — заданное на торцевой поверхности  $x_1 = x_1^*$  продольное перемещение.

В момент времени  $t = t_0$  необходимо задать начальные условия (см. (2), (3)):

$$w(t_0, x_1) = u_{03}(x_1), \quad \dot{w}(t_0, x_1) = v_{03}(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq L; \quad (19)$$

$$u_1(t_0, \mathbf{x}) = u_{01}(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_1(t_0, \mathbf{x}) = v_{01}(\mathbf{x}), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad |x_3| \leq h, \quad (20)$$

где  $u_{01}$ ,  $u_{03}$  и  $v_{01}$ ,  $v_{03}$  — известные в начальный момент времени  $t_0$  перемещения и скорости точек балки.

Для получения силовых граничных условий в силовых факторах (см. (8)–(10)) проинтегрируем (15) по высоте балки-стенки с весом  $B$ , а равенство (14) проинтегрируем по  $x_3$  с весами  $Bx_3^l$ , тогда с учетом (16) будем иметь

$$n_1(x_1^*)(M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1 w)|_{x_1=x_1^*} = P_1^{(l)}(t, x_1^*) \quad (0 < l \leq K + 1),$$

$$n_1(x_1^*)(M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w)|_{x_1=x_1^*} = P_3^{(0)}(t, x_1^*), \quad (21)$$

$$x_1^* = 0 \text{ и/или } x_1^* = L, \quad t \geq t_0,$$

где

$$P_i^{(l)}(t, x_1^*) \equiv B \int_{-h}^h p_i(t, x_1^*, x_3) x_3^l dx_3, \quad j = 1, 3; \quad (22)$$

$P_1^{(l)}$ ,  $P_3^{(0)}$  — заданные в сечении  $x_1 = x_1^*$  силовые факторы, причем (см. замечание 1)  $P_1^{(0)}$  и  $P_3^{(0)}$  — заданные продольная и поперечная силы, а  $P_1^{(1)}$  — заданный изгибающий момент (см. (22)), остальные же величины в правых частях (21) (при  $2 \leq l \leq K + 1$ ) — заданные математические моменты высших порядков.

Так как разложения (3) являются конечными суммами по степеням переменной  $x_3$ , кинематические граничные условия (18) и начальные условия (20) в общем случае не удастся удовлетворить в каждой точке  $\mathbf{x}$  балки-стенки (см. (20)) или ее торцевой поверхности  $x_1 = x_1^*$  (см. (18)) при произвольных зависимостях функций  $u_{*1}$ ,  $u_{01}$  и  $v_{01}$  от переменной  $x_3$ . Поэтому кинематические граничные условия (18) и начальные условия (20) по аналогии с силовыми граничными условиями (см. (14), (15), (21) и (22)) будем удовлетворять лишь в интегральном смысле, т. е. равенства (18) и (20) проинтегрируем по высоте балки-стенки с весами  $Bx_3^l$ , после чего, учитывая последнее соотношение (10), получим

$$u_1^{(l)}(t, x_1^*) = u_{*1}^{(l)}(t, x_1^*), \quad 0 \leq l \leq K + 1, \quad (23)$$

$$x_1^* = 0 \text{ и/или } x_1^* = L, \quad t \geq t_0;$$

$$u_1^{(l)}(t_0, x_1) = u_{01}^{(l)}(x_1), \quad \dot{u}_1^{(l)}(t_0, x_1) = v_{01}^{(l)}(x_1), \quad (24)$$

$$0 \leq l \leq K + 1, \quad 0 \leq x_1 \leq L,$$

где

$$\begin{aligned} u_{*1}^{(l)}(t, x_1^*) &\equiv B \int_{-h}^h u_{*1}(t, x_1^*, x_3) x_3^l dx_3, & u_{01}^{(l)}(x_1) &\equiv B \int_{-h}^h u_{01}(\mathbf{x}) x_3^l dx_3, \\ v_{01}^{(l)}(x_1) &\equiv B \int_{-h}^h v_{01}(\mathbf{x}) x_3^l dx_3, & 0 \leq l \leq K+1, & \quad 0 \leq x_1 \leq L; \end{aligned} \quad (25)$$

$u_{*1}^{(l)}$  и  $u_{01}^{(l)}, v_{01}^{(l)}$  — известные функции времени  $t$  или переменной  $x_1$ .

Таким образом, для однозначного интегрирования рассматриваемой начально-краевой задачи в каждой точке  $x_1 \in [0, L]$  в момент времени  $t_0$  необходимо задать начальные условия (19), (24) с учетом обозначений (25), а в концевых сечениях ( $x_1 = x_1^* = 0, L$ ) — силовые граничные условия (21) или кинематические граничные условия (17), (23) с учетом соотношений (16), (22) и (25). Возможно использование и смешанных из (17), (21), (23) граничных условий, например при свободном (шарнирном) опирании концевого сечения балки.

Замечание 2. На рис. 1 изображен случай жесткого закрепления точек обеих торцевых поверхностей  $x_1^* = 0, L$ , т. е. имеют место кинематические граничные условия (17), (23) при учете (25) и  $u_{*1} \equiv 0, u_{*3} \equiv 0$ .

Проинтегрируем выражение (3) по высоте балки-стенки с весами  $Bx_3^l$  ( $0 \leq l \leq K+1$ ), тогда с учетом последнего равенства (10) получим матричное соотношение

$$C\varepsilon = \mathbf{U} + \mathbf{W}\partial_1 w - \mathbf{E}^{(+)}\varepsilon_{13}^{(+)} + \mathbf{E}^{(-)}\varepsilon_{13}^{(-)}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \{u_1^{(0)}, u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, \dots, u_1^{(K)}, u_1^{(K+1)}\}^\top, \\ \varepsilon &= \{u, \varepsilon_{13}^{(0)}, \varepsilon_{13}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{13}^{(K-1)}, \varepsilon_{13}^{(K)}\}^\top; \end{aligned} \quad (27)$$

$C = (c_{ij})$  —  $(K+2) \times (K+2)$ -матрица,  $\mathbf{W} = \{w_i\}$ ,  $\mathbf{E}^{(\pm)} = \{e_i^{(\pm)}\}$  —  $(K+2)$ -компонентные вектор-столбцы, элементы которых вычисляются так:

$$\begin{aligned} c_{l+1,1} &= h^{l+1} \frac{B}{l+1} (1 + (-1)^l), & w_{l+1} &= h^{l+2} \frac{B}{l+2} (1 - (-1)^l), \\ c_{l+1,k+2} &= 2Bh^{l+k+2} (1 - (-1)^{l+k}) \left[ \frac{1}{(k+1)(l+k+2)} - \frac{1}{(k+3)(l+k+4)} \right], \\ e_{l+1}^{(\pm)} &= Bh^{l+2} \left[ \frac{1 + (-1)^l}{2(l+3)} \pm \frac{1 - (-1)^l}{l+2} \right], & 0 \leq l \leq K+1, & \quad 0 \leq k \leq K; \end{aligned} \quad (28)$$

символ  $\top$  означает операцию транспонирования.

Согласно (28), элементы матрицы  $C$  и вектор-столбцов  $\mathbf{W}, \mathbf{E}^{(\pm)}$  достаточно вычислить один раз, поэтому уравнение (26) удобно преобразовать к виду

$$\varepsilon = C^{-1}\mathbf{U} + \bar{\mathbf{W}}\partial_1 w - \bar{\mathbf{E}}^{(+)}\varepsilon_{13}^{(+)} + \bar{\mathbf{E}}^{(-)}\varepsilon_{13}^{(-)}, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (29)$$

где

$$\bar{\mathbf{W}} = C^{-1}\mathbf{W}, \quad \bar{\mathbf{E}}^{(\pm)} = C^{-1}\mathbf{E}^{(\pm)}; \quad (30)$$

$C^{-1}$  — матрица, обратная  $C$ .

Если в данный момент времени  $t$  из каких-то соображений известны значения функций  $w, \varepsilon_{13}^{(\pm)}, u_1^{(l)}$  ( $0 \leq l \leq K+1$ ), то на основе матричного равенства (29) с учетом соотношений (27), (28), (30) можно определить значения функций  $u, \varepsilon_{13}^{(k)}$  ( $0 \leq k \leq K$ ), задающих продольное перемещение (3) и осредненные деформации композиции (1), (4) в балке-стенке.

Часто динамические нагрузки, в частности взрывного типа [19–21 и др.], таковы, что на тонкостенную конструкцию действуют в основном только распределенные поверхностные нормальные нагрузки типа избыточного давления (например,  $\sigma_{33}^{(\pm)}$  на рис. 1), а касательными поверхностными нагрузками при этом можно пренебречь (см. рис. 1)

$$\sigma_{13}^{(\pm)}(t, x_1) = \sigma_{13}(t, x_1, \pm h) \approx 0, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq t_0. \quad (31)$$

В работе [13] показано (см. там соотношения (1.31)–(1.35)), что при выполнении равенств (31) получаем

$$\varepsilon_{13}^{(\pm)}(t, x_1) = \varepsilon_{13}(t, x_1, \pm h) \approx 0, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq t_0. \quad (32)$$

Таким образом, при задании только нормальных внешних поверхностных нагрузок (см. (31)) осредненные деформации поперечного сдвига  $\varepsilon_{13}^{(\pm)}$  в равенствах (1), (3), (4), (26), (29) известны и тождественно равны нулю.<sup>2</sup>

**2. Метод расчета.** Численное интегрирование рассматриваемой динамической задачи изгиба упругопластической армированной балки-стенки будем строить на основе метода шагов по времени [11–13, 15, 19 и др.], т. е. решение задачи будем разыскивать в дискретные моменты времени  $t_{n+1} = t_n + \tau$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\tau = \text{const} > 0$  — шаг по времени.

Предполагаем, что при  $t = t_m$  уже известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned} \overset{m}{w}(x_1) &\equiv w(t_m, x_1), \quad \overset{m}{u}_1^{(l)}(x_1) \equiv u_1^{(l)}(t_m, x_1), \quad \overset{m}{\sigma}_{j3}^{(\pm)}(x_1) \equiv \sigma_{j3}^{(\pm)}(t_m, x_1), \\ \overset{m}{\dot{\sigma}}_{13}^{(\pm)}(x_1) &\equiv \dot{\sigma}_{13}^{(\pm)}(t_m, x_1), \quad \overset{m}{\sigma}_{1j}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{1j}(t_m, \mathbf{x}), \quad \overset{m}{\sigma}_{1j}^{(s)}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{1j}^{(s)}(t_m, \mathbf{x}), \\ \overset{m}{X}_j(\mathbf{x}) &\equiv X_j(t_m, \mathbf{x}), \quad \overset{m}{\varepsilon}_{13}^{(\pm)}(x_1) \equiv \varepsilon_{13}^{(\pm)}(t_m, x_1), \quad j = 1, 3, \quad m = n - 1, n, \\ &0 \leq l \leq K + 1, \quad 0 \leq s \leq N, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad |x_3| \leq h, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $\sigma_{11}^{(s)}, \sigma_{13}^{(s)}$  — напряжения в  $s$ -том компоненте композиции балки (индекс  $s = 0$  соответствует связующему материалу, а  $s = 1, 2, \dots, N$  — арматуре  $s$ -того семейства).

Используя третье равенство в (10), согласно предположению (33), в момент времени  $t_n$  с учетом (12) можем вычислить все внутренние силовые факторы  $M_{ij}^{(l)}$ , входящие в правые части уравнений (8), (9) и в силовые граничные условия (21).

Все производные по времени  $t$  далее будем аппроксимировать центральными разностями [11–13, 22, 23 и др.]. Согласно этому, конечно-разностные аналоги уравнений движения (8) и (9) с учетом обозначений, аналогичных (33), примут следующий вид:

<sup>2</sup>В этом случае граничные условия (13) выполняются тождественно [13].

$$\begin{aligned}
 \frac{2h\rho}{\tau^2} (w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}) &= \partial_1 (M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w) - R^{-1} M_{11}^{(0)} + B (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) + X_3^{(0)}, \\
 \frac{\rho}{\tau^2} (u_1^{n+1(l)} - 2u_1^{n(l)} + u_1^{n-1(l)}) &= \partial_1 (M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1 w) - l M_{13}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_1 w + \\
 &+ R^{-1} M_{13}^{(l)} + B h^l [\sigma_{13}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{13}^{(-)}] - B h^l [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)}] \partial_1 w + X_1^{(l)}, \\
 0 \leq l \leq K+1, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \quad (34)$$

На основании соотношений (10) и (33) получаем, что правые части в уравнениях (34) в момент времени  $t_n$  известны, поэтому, добавляя к ним соответствующие граничные условия (17), (21) и (23), можем вычислить по явной схеме значения неизвестных функций  $w^{n+1}$  и  $u_1^{n+1(l)}$  ( $0 \leq l \leq K+1$ ) при  $t = t_{n+1}$ .

Аппроксимируем в (13) производные по времени от деформаций центральными разностями, тогда с учетом обозначений, аналогичных (33), получим

$$\begin{aligned}
 A_{33}^{(\pm)} \varepsilon_{13}^{n+1(\pm)} - A_{13}^{(\pm)} \varepsilon_{11}^{n+1} (x_1, \pm h) &= 2\tau \dot{\sigma}_{13}^{(\pm)} + A_{33}^{(\pm)} \varepsilon_{13}^{n-1(\pm)} - \\
 - A_{13}^{(\pm)} \varepsilon_{11}^{n-1} (x_1, \pm h) &\equiv S_{13}^{(\pm)}(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (35)
 \end{aligned}$$

где, согласно (4), (29) и (33) с учетом (27), правые части, обозначенные как  $S_{13}^{(\pm)}$ , известны в момент времени  $t_n$ . Подставим в левую часть равенства (35) выражение (4) и учтем соотношение (29), тогда после очевидных преобразований получим

$$\begin{aligned}
 A_{13}^{(\pm)} \left[ \bar{e}_1^{(+)} + \sum_{k=0}^K h_k^{(\pm)} \bar{e}_{k+2}^{(+)} \mp h \left( 1 \pm \frac{1}{2} \right) \right] \partial_1 \varepsilon_{13}^{n+1(+)} - \\
 - A_{13}^{(\pm)} \left[ \bar{e}_1^{(-)} + \sum_{k=0}^K h_k^{(\pm)} \bar{e}_{k+2}^{(-)} \pm h \left( 1 \mp \frac{1}{2} \right) \right] \partial_1 \varepsilon_{13}^{n+1(-)} + A_{33}^{(\pm)} \varepsilon_{13}^{n+1(\pm)} = \\
 = S_{13}^{(\pm)} + A_{13}^{(\pm)} \left[ \left( \bar{w}_1 \mp h + \sum_{k=0}^K h_k^{(\pm)} \bar{w}_{k+2} \right) \partial_1^2 w^{n+1} + R^{-1} w^{n+1} + \frac{1}{2} (\partial_1 w^{n+1})^2 + \right. \\
 \left. + \sum_{l=1}^{K+2} \left( \bar{c}_{1,l} + \sum_{k=0}^K h_k^{(\pm)} \bar{c}_{k+2,l} \right) \partial_1 u_1^{n+1(l-1)} \right], \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (36)
 \end{aligned}$$

где

$$h_k^{(\pm)} = 2(\pm h)^{k+1} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right), \quad 0 \leq k \leq K; \quad (37)$$

$\bar{c}_{i,j}$  и  $\bar{w}_i$ ,  $\bar{e}_i^{(\pm)}$  — компоненты матрицы  $C^{-1}$  и вектор-столбцов  $\bar{\mathbf{W}}$ ,  $\bar{\mathbf{E}}^{(\pm)}$  соответственно (см. (30)).

Так как значения функций  $w^{n+1}$ ,  $u_1^{n+1(l)}$  ( $0 \leq l \leq K+1$ ) предполагаются уже известными из уравнений (34), правые части в (36) с учетом (37) известны. При этом два равенства (36) представляют собой замкнутую относительно  $\varepsilon_{13}^{n+1(+)}$  и  $\varepsilon_{13}^{n+1(-)}$  систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, для однозначного интегрирования которой необходимо задать по одному краевому условию для каждой функции  $\varepsilon_{13}^{n+1(+)}$  и  $\varepsilon_{13}^{n+1(-)}$ . Эти краевые

значения могут быть определены из разных соображений. Например, если в некоторой точке  $x_1 \in [0, L]$  при  $x_3 = h$  или  $x_3 = -h$  выполняются равенства (31), то, как уже отмечалось, из него следует равенство (32), которое может быть использовано в качестве краевого условия для  $\varepsilon_{13}^{n+1(+)}$  или  $\varepsilon_{13}^{n+1(-)}$ . С другой стороны, если при  $t = t_{n+1}$  известно, что в некоторой точке  $x_1 \in [0, L]$  при  $x_3 = h$  или  $x_3 = -h$  все материалы фаз композиции ведут себя упруго, то, как показано в [13], при этом  $A_{13}^{n+1(\pm)}(x_1) = 0$  и  $A_{33}^{n+1(\pm)}$  — удвоенный эффективный модуль упругости второго рода рассматриваемой композиции. Но тогда имеет место соотношение  $A_{33}^{n+1(\pm)} \varepsilon_{13}^{n+1(\pm)} = \sigma_{13}^{n+1(\pm)}$ , из которого однозначно определяется требуемое краевое значение  $\varepsilon_{13}^{n+1(+)}$  или  $\varepsilon_{13}^{n+1(-)}$ , необходимое для интегрирования системы (36), и т. д.

В случае задания нагрузки взрывного типа, когда выполняются равенства (31), функции  $\varepsilon_{13}^{n+1(\pm)}$  однозначно определяются соотношениями (32).

Следует отметить, что в тех случаях, когда необходимо интегрировать краевую задачу для системы (36), не удастся построить явной численной схемы. При нагрузках же взрывного типа, когда функции  $\varepsilon_{13}^{n+1(\pm)}$  определяются из равенств (32), можно получить явную схему (как это было сделано в [13] при  $K = 0$ , т. е. в рамках второго варианта теории Тимошенко). При использовании же первого варианта теории Тимошенко или теории, основанной на гипотезе ломаной линии, всегда можно построить явную численную схему [11, 12 и др.], но при этом нельзя удовлетворить граничные условия (13) (см. [13]).

Далее предполагаем, что в момент времени  $t_{n+1}$  значения функций  $\varepsilon_{13}^{n+1(\pm)}$  уже известны из (32) или из решения краевой задачи для системы уравнений (36). Используя равенство (29) с учетом выражений (28), (30) и введенных обозначений (27), при уже известных  $w^{n+1}$ ,  $\varepsilon_{13}^{n+1(\pm)}$  и  $u_1^{n+1(l)}$  ( $0 \leq l \leq K + 1$ ) можно определить функции  $u^{n+1}$ ,  $\varepsilon_{13}^{n+1(k)}$  ( $0 \leq k \leq K$ ), после чего на основании формул (1), (4) вычисляются значения осредненных деформаций композиции  $\varepsilon_{11}^{n+1}$  и  $\varepsilon_{13}^{n+1}$  в каждой точке балки-стенки в момент времени  $t_{n+1}$ . После этого решение рассматриваемой задачи строится так же, как подробно описано в [13] (см. там соотношения (1.48)–(1.52) и пояснения к ним).

В силу самой структуры левых частей уравнений (34) для начала расчета по разрабатываемой численной схеме необходимо знание не только функций  $w^0$  и  $u_1^{0(l)}$ , известных из начальных условий (19) и (24), но и  $w^1$ ,  $u_1^{1(l)}$  (см. (34) при  $n = 1$ ). Значения этих функций можно вычислить по формуле Тейлора с учетом начальных данных (19), (24) и уравнений (8), (9) при  $t = t_0$  [23]:

$$\begin{aligned} w^1(x_1) &= w^0(x_1) + \tau \dot{w}^0(x_1) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{w}^0(x_1) + O(\tau^3) \approx 0, \\ u_1^{1(l)}(x_1) &= u_1^{0(l)}(x_1) + \tau \dot{u}_1^{0(l)}(x_1) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}_1^{0(l)}(x_1) + O(\tau^3) \approx 0, \quad 0 \leq l \leq K + 1. \end{aligned} \tag{38}$$

Приближенные равенства в этих соотношениях выполняются с точностью порядка  $\tau^3$ , причем нулевые значения получаются в случае начальных условий, соответствующих естественному состоянию балки-стенки, когда в момент времени  $t_0$  она покоится ( $u_{0i} \equiv 0$ ,  $v_{0i} \equiv 0$ ; см. начальные условия (19) и (20)), а внешние нагрузки отсутствуют ( $\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ ,  $X_i(t_0, \mathbf{x}) \equiv 0$ ,  $i = 1, 3$ ;

см. равенства (8)–(10)).

Аппроксимируя в соотношениях (34), (36) и (21) производную  $\partial_1(\cdot)$  по переменной  $x_1$  ее конечно-разностным аналогом, получим соответствующую численную схему. Если внешние поверхностные нагрузки являются взрывными, т. е. имеют место равенства (31), то вместо дифференциальных уравнений (36) выполняются соотношения (32). В этом случае после указанной дискретизации рассматриваемой задачи по продольной координате  $x_1$  получим явную численную схему типа «крест» [11, 12] (в случае  $K = 0$  — второй вариант теории Тимошенко — реализация этой схемы подробно описана в [13]).

Необходимые условия устойчивости схемы типа «крест» вытекают из условия Куранта—Фридрихса—Леви [22] и для рассматриваемой армированной балки-стенки, согласно [11, 12], определяются соотношениями (1.61)–(1.63) из [13], накладывающими ограничения на шаг по времени  $\tau$  при заданном шаге  $\Delta x_1$  дискретизации задачи по продольной переменной  $x_1$  и заданной высоте балки  $2h$ .

**3. Обсуждение результатов расчетов.** В качестве конкретных примеров исследуем поведение балок-стенок, изображенных на рис. 1, имеющих длину  $L = 1$  м и высоту  $2h = 2$  см. Балки могут быть прямолинейными (см. рис. 1, а) или искривленными (см. рис. 1, б), причем их кривизна постоянна ( $R = \text{const}$ ). В последнем случае стрела подъема балки  $f$  связана с радиусом кривизны ее срединного слоя соотношением

$$R = \frac{(L/2)^2 + f^2}{2f}, \quad 0 \leq f \leq \frac{L}{5}, \quad L \ll R. \quad (39)$$

Для изогнутых балок-стенок в расчетах примем  $f = 12$  см, т. е., согласно (39), при  $L = 1$  м такие балки действительно обладают малой кривизной [17].

Объемные нагрузки не учитываем, т. е.  $X_i \equiv 0$ ,  $i = 1, 3$  (см. (10)). Касательные нагрузки на верхней и нижней поверхностях ( $x_3 = \pm h$ ) балки-стенки пренебрежимо малы (см. (31)), поэтому имеют место приближенные равенства (32). Конструкция нагружается избыточным давлением, вызванным приходом взрывной волны [19]:

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (40)$$

где

$$\alpha = -\ln(0.01) / (t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad (41)$$

которое прикладывается к верхней ( $x_3 = h$ ) или нижней ( $x_3 = -h$ ) поверхности балки-стенки (см. (8), (9), (12) и (34)), причем (см. рис. 1)

$$\sigma_{33}^{(-)}(t) = \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad \sigma_{33}^{(+)}(t) = \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0. \end{cases} \quad (42)$$

Здесь  $t_{\max}$  — момент времени, в который давление  $p(t)$  достигает по модулю максимального значения  $|p_{\max}|$ ;  $t_{\min}$  — момент времени, при котором избыточное давление  $p(t)$  по модулю становится пренебрежимо малым в сравнении с  $|p_{\max}|$  (так, формула (41) соответствует случаю  $p(t_{\min}) = 0.01p_{\max}$ ). Используя экспериментальные данные из [19, 21], в расчетах примем  $t_{\max} = 0.1$  мс

и  $t_{\min} = 2$  мс. Согласно равенствам (42), при  $p_{\max} > 0$  давление (40) прикладывается к нижней (вогнутой) поверхности (см. рис. 1), а при  $p_{\max} < 0$  — к верхней (выпуклой) поверхности балки-стенки.

Балки изготовлены из эпоксидной смолы, отвержденной ароматическим аммиаком, и продольно армированы одним ( $N = 1$ ) семейством стекловолоконной марки S-994 с плотностью армирования  $\omega_1 = 0.3$ .

Упругопластическое поведение компонентов композиции при активном нагружении аппроксимируем билинейной диаграммой [24]:

$$\sigma^{(n)} = \begin{cases} E_n \varepsilon^{(n)}, & |\varepsilon^{(n)}| \leq \varepsilon_s^{(n)} = \sigma_s^{(n)} / E_n, \\ \text{sign}(\varepsilon^{(n)}) \sigma_s^{(n)} + E_s^{(n)} (\varepsilon^{(n)} - \text{sign}(\varepsilon^{(n)}) \varepsilon_s^{(n)}), & |\varepsilon^{(n)}| > \varepsilon_s^{(n)}, 0 \leq n \leq N, \end{cases}$$

где  $\sigma^{(n)}$ ,  $\varepsilon^{(n)}$  — осевое напряжение и деформация при растяжении — сжатии материала  $n$ -ной фазы композиции;  $E_n$ ,  $E_s^{(n)}$  — модули Юнга и линейного упрочнения того же материала;  $\sigma_s^{(n)}$ ,  $\varepsilon_s^{(n)}$  — предел текучести и соответствующая ему деформация материала  $n$ -ного компонента композиции. Физико-механические характеристики материалов фаз рассматриваемой композиции балок-стенок приведены в таблице, где  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $a$  — скорость звука, рассчитанная для каждой фазы композиции по формуле, аналогичной (1.61) из [13].

Физико-механические характеристики материалов фаз композиции балок-стенок [25, 26]  
[Physical and mechanical characteristics of materials for beams-walls [25, 26]]

Materials	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$\nu$	$\sigma_s$ , МПа	$E$ , НПа	$E_s$ , НПа	$a$ , м/с
Еpoxy	1210	0.4	20	2.8	1.114	1521.2
Fiberglass S-994	2520	0.25	4500	86.8	6.230	5868.9

Концевые сечения балок-стенок жестко закреплены (см. рис. 1 и замечание 2). В начальный момент времени  $t = t_0 = 0$  балки находятся в естественном состоянии (см. начальные условия (19), (24) с учетом (25) при  $u_{0i} \equiv 0$ ,  $v_{0i} \equiv 0$ ,  $i = 1, 3$ ), внешняя же нагрузка, согласно (40), отсутствует, поэтому имеют место равенства (38).

Расчеты проводились при разбивке интервала  $x_1 \in [0, L]$  равномерной сеткой с шагом  $\Delta x_1 = L/100 = 1$  см, шаг по времени  $\tau$  принимался равным 1 мкс. Согласно такой дискретизации, для рассматриваемых балок-стенок получаем  $\Delta x_1/\tau = 10$  км/с и  $2h/\tau = 20$  км/с. Обе эти величины существенно превосходят значения скоростей звука  $a$ , приведенные в таблице для материалов компонентов композиции, поэтому данные отношения будут значительно превосходить скорости звука в продольном и поперечном направлениях композиции балки-стенки. Следовательно, необходимые условия устойчивости используемой численной схемы будут заведомо выполнены с запасом (см. (1.61)–(1.63) в [13]).

На рис. 2–4 приведены зависимости  $w_*(t) = w(t, L/2)$ , характеризующие поперечные колебания точек центрального сечения балок ( $x_1 = L/2$ ), рассчитанные по второму варианту теории Тимошенко (см. рис. 2, а, рис. 3, а, рис. 4, а) и по уточненной теории при  $K = 7$  (см. рис. 2, б, рис. 3, б, рис. 4, б). На рис. 2 изображены осцилляции центрального сечения прямолинейной балки-стенки ( $f = 0$ , см. (39)) при  $Bp_{\max} = 4$  МН/м, а на рис. 3 и 4 — изогнутой балки ( $f = 12$  см) при  $Bp_{\max} = 5$  МН/м (рис. 3) и  $Bp_{\max} = -5$  МН/м (рис. 4). Так как в расчетах принято  $t_{\min} = 2$  мс (см. (41)), при  $t > 2$  мс колебания исследуемых балок-стенок можно рассматривать как свободные.

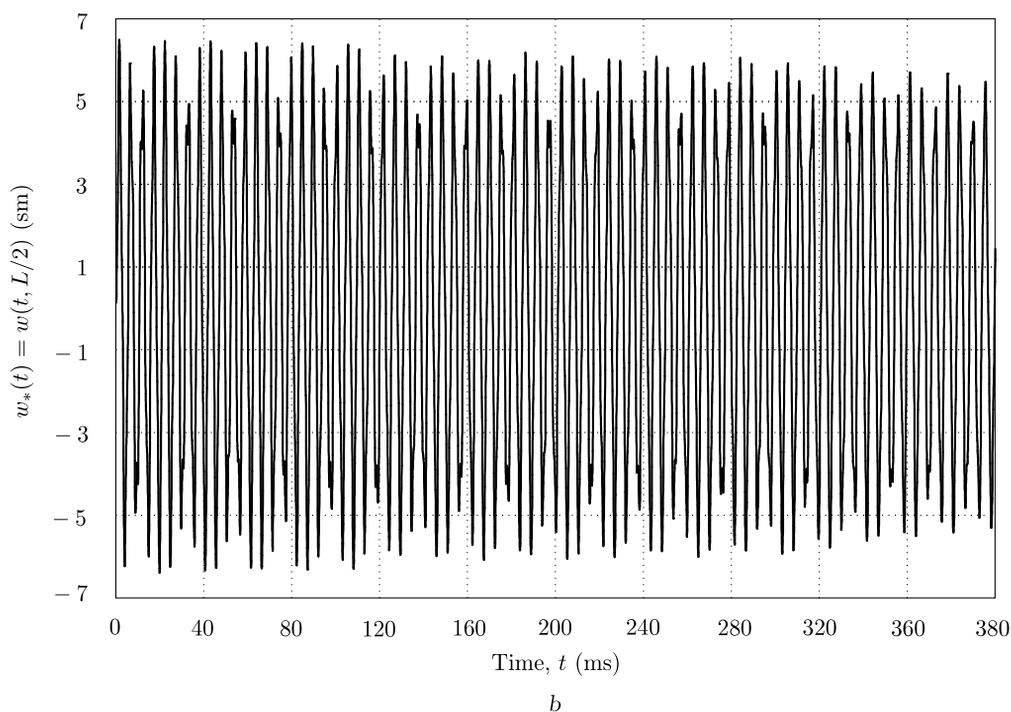
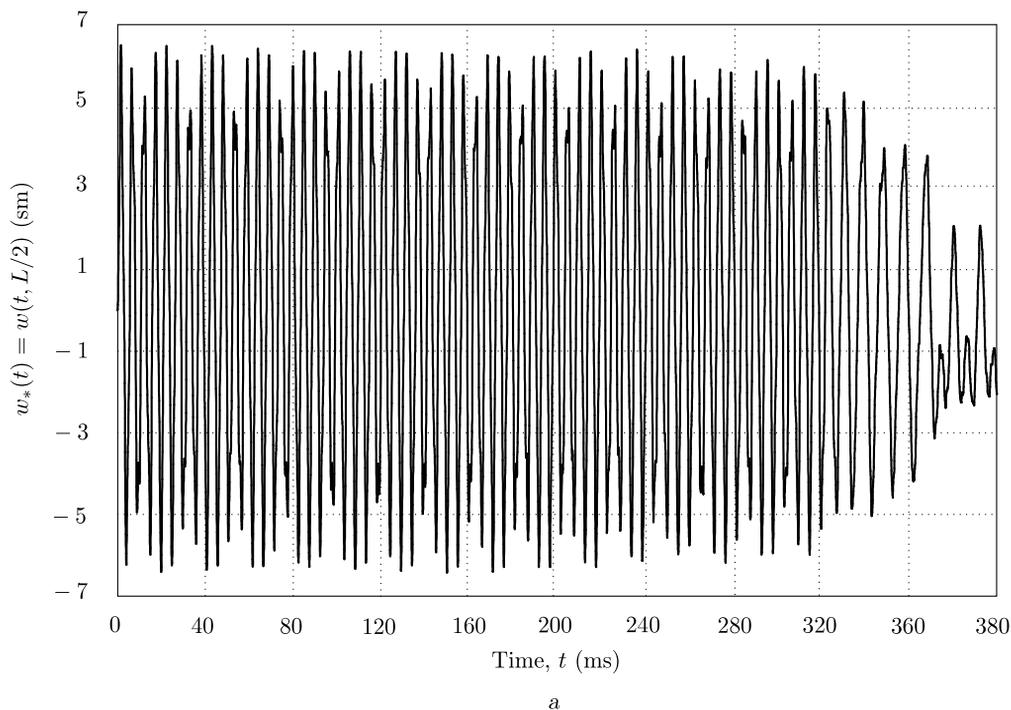
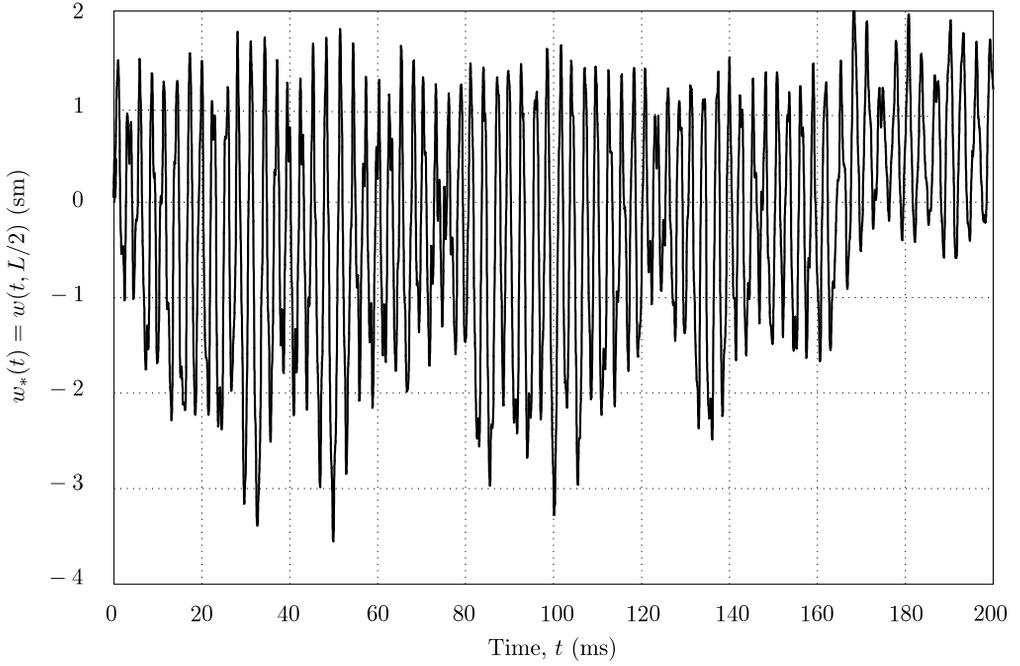
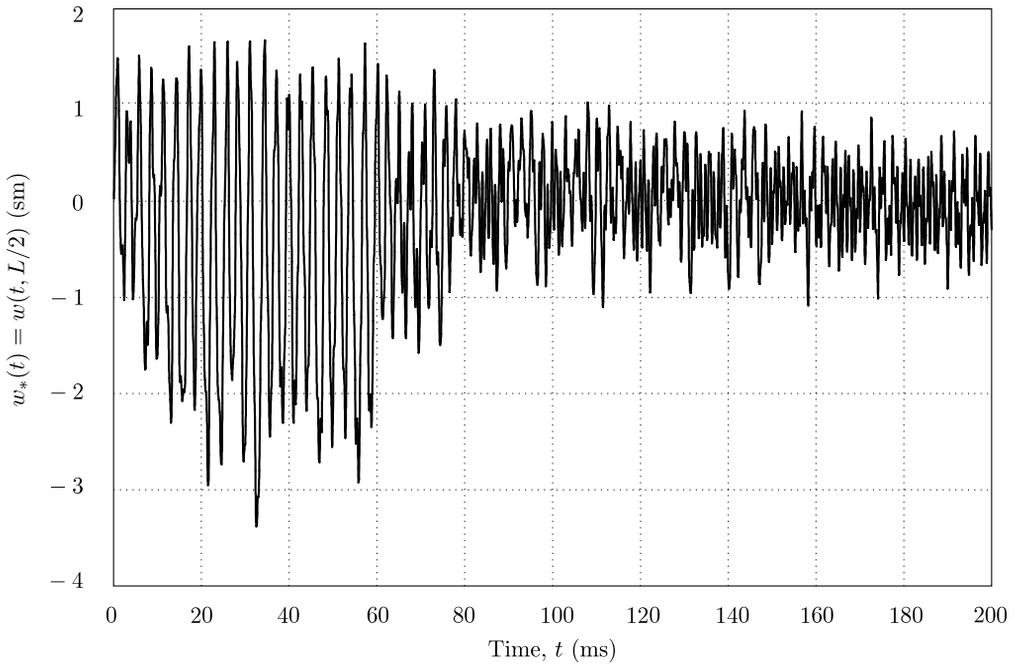


Рис. 2. Осцилляции центрального поперечного сечения прямолинейной балки-стенки, нагруженной давлением снизу: а — расчет по второму варианту теории Тимошенко; б — расчет по уточненной теории

[Figure 2. Oscillations of the central cross-section of a rectilinear beam-wall ( $f = 0$ , see Eq. (39)) loaded with pressure from below ( $Bp_{\max} = 4 \text{ MN/m}$ ): а — calculation by the second version of the Timoshenko's theory; б — calculation by the refined theory]



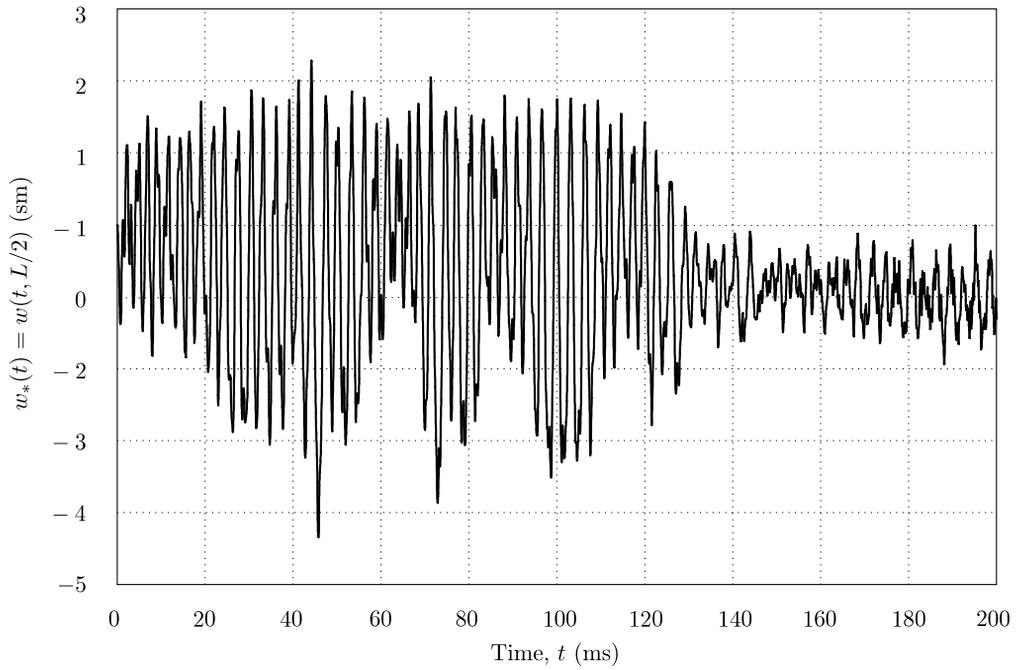
a



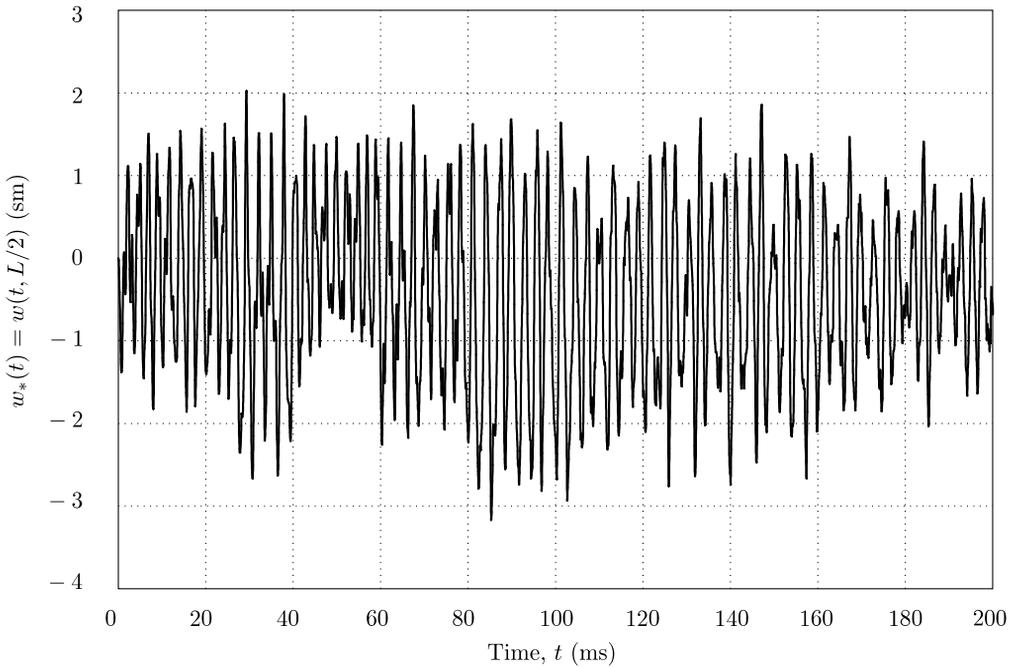
b

Рис. 3. Осцилляции центрального поперечного сечения искривленной балки-стенки, нагруженной давлением снизу: а — расчет по второму варианту теории Тимошенко; б — расчет по уточненной теории

[Figure 3. Oscillations of the central cross-section of a curved beam-wall ( $f = 12$  sm, see Eq. (39)) loaded with pressure from below ( $Bp_{\max} = 5$  MN/m): а — calculation by the second version of the Timoshenko's theory; б — calculation by the refined theory]



a



b

Рис. 4. Осцилляции центрального поперечного сечения искривленной балки-стенки, нагруженной давлением сверху: а — расчет по второму варианту теории Тимошенко; б — расчет по уточненной теории

[Figure 4. Oscillations of the central cross-section of a curved beam-wall ( $f = 12$  sm, see Eq. (39)) loaded with pressure from below ( $Bp_{\max} = -5$  MN/m): a—calculation by the second version of the Timoshenko's theory; b—calculation by the refined theory]

Сравнение кривых, приведенных на рис. 2–4, показывает, что второй вариант теории Тимошенко ( $K = 0$ ; см. (1), (3), (4)) обеспечивает приемлемую точность расчетов лишь в малой окрестности начального момента времени: до значений времени  $t$  порядка нескольких десятков микросекунд для изогнутых балок (см. рис. 3, 4) и до нескольких сотен микросекунд в случае прямолинейной балки (см. рис. 2). При больших временах (порядка десятых долей секунды) точность второго варианта теории Тимошенко становится неприемлемой даже для относительно невысоких композитных балок-стенок ( $2h/L = 1/50$ ).

Расчеты, проведенные при  $K \geq 8$ , показали, что в рассматриваемых случаях используемая численная схема (см. раздел 2) неустойчива. По-видимому, это объясняется тем, что для относительно невысоких балок-стенок матрица  $C$  в соотношении (26) (см. (28)) при  $K \geq 8$  становится плохо обусловленной (даже при использовании двойной точности), поэтому обращение матрицы  $C$  (см. равенства (29), (30)) порождает значительные ошибки, последнее же обстоятельство негативно сказывается на устойчивости построенной численной схемы.

Согласно (42), на рис. 2 изображены зависимости  $w_*(t)$  для прямолинейной балки-стенки, когда избыточное давление (40) прикладывается снизу ( $x_3 = -h$ ). В этом случае изменение знака нагрузки, т. е. приложение давления  $p(t)$  к верхней поверхности балки-стенки ( $x_3 = h$ ), приведет к тому, что кривые на рис. 2 зеркально отразятся относительно оси абсцисс  $w_* = 0$ . Поэтому соответствующие кривые  $w_*(t)$  при  $Bp_{\max} = -4$  МН/м не изображены.

Сравнение же кривых на рис. 3, а, рис. 4, а и рис. 3, б, рис. 4, б показывает, что в отличие от прямолинейных балок динамический отклик искривленных гибких балок-стенок существенно зависит от того, к какой поверхности (выпуклой или вогнутой) прикладывается избыточное давление.

Поведение кривой на рис. 3, б свидетельствует о том, что при  $t > 60$  мс происходит резкое уменьшение амплитуды колебаний изогнутой балки-стенки. Это объясняется механической диссипацией энергии, вызванной вторичной знакопеременной пластичностью, активно развивающейся с течением времени в материале связующей матрицы (подобный, хотя и не столь яркий, результат ранее был получен и в [15]). Аналогичное поведение характерно и для кривой, изображенной на рис. 4, а. Однако эта зависимость была рассчитана по второму варианту теории Тимошенко ( $K = 0$ ) и при  $t > 20$  мс сильно отличается от кривой, приведенной на рис. 4, б, построенной по уточненной теории ( $K = 7$ ). Поэтому зависимость  $w_*(t)$  на рис. 4, а нельзя признать качественно верной при  $t > 20$  мс.

В работе [13] было показано, что для построенной там (и используемой в настоящем исследовании) структурной модели в данный дискретный момент времени  $t_n$  в каждой точке балки-стенки (независимо от соседних точек) необходимо организовать итерационный процесс, аналогичный итерационной процедуре посадки напряженного состояния на поверхность текучести [11, 12 и др.]. Проведенные расчеты продемонстрировали, что на каждом шаге по времени достаточно сделать две итерации. Вторая итерация позволяет уточнить деформации в материалах фаз композиции примерно на 10%. Последующие итерации практически не приводят к дальнейшему уточнению решения.

**Заключение.** Ранее в работе [13] было продемонстрировано, что первый вариант теории Тимошенко, основанный на гипотезе независимой ротации плоского поперечного сечения, непригоден для адекватного расчета упру-

гопластического поведения относительно высоких продольно-армированных гибких балок-стенок, и там было рекомендовано использовать второй вариант теории Тимошенко, учитывающий деформацию поперечных сечений балок, а значит, являющийся более точным с точки зрения математического моделирования. Расчеты же, проведенные в настоящем исследовании, показали, что при изучении динамического поведения продольно-армированных прямолинейных и искривленных балок-стенок, деформируемых упругопластически, использование второго варианта теории Тимошенко на интервалах времени, превышающих несколько десятых долей секунды, может приводить к существенному отличию от решения, полученному на базе уточненной теории, даже для относительно невысоких балок. Наиболее ярко различие решений сказывается при расчете деформированного состояния в фазах композиции таких конструкций.

Нелинейность рассматриваемых задач приводит к тому, что динамический отклик гибких искривленных композитных балок-стенок зависит от того, к какой внешней поверхности (вогнутой или выпуклой) прикладывается распределенная нагрузка взрывного типа. При этом изменяется не только амплитуда, но и частота свободных колебаний балки при снятии внешней нагрузки.

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имею.

**Авторская ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Исследование не имело финансирования.

## Библиографический список

1. Bannister M. Challenges for composites into the next millennium — a reinforcement perspective // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2001. vol. 32, no. 7. pp. 901–910. doi: [10.1016/S1359-835X\(01\)00008-2](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2).
2. Rajapakse Y. D. S., Hui D. Marine Composites: Foreword // *Composites Part B: Engineering*, 2004. vol. 35, no. 6–8. pp. 447–450. doi: [10.1016/j.compositesb.2004.05.001](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2004.05.001).
3. Mouritz A. P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // *Composite Structures*, 2001. vol. 53, no. 1. pp. 21–42. doi: [10.1016/s0263-8223\(00\)00175-6](https://doi.org/10.1016/s0263-8223(00)00175-6).
4. *Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология* / ред. А. А. Берлин. СПб.: Профессия, 2009. 560 с.
5. Карпов В. В. *Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. Часть 1* / Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2-х ч. М.: Физматлит, 2010. 288 с.
6. Баженов В. А., Кривенко О. П., Соловей Н. А. *Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи*. М.: Книжный дом «Либроком», 2012. 336 с.
7. Немирковский Ю. В., Мищенко А. В., Вохмянин И. Т. *Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем*. Новосибирск: ИГАСУ, 2004. 488 с.
8. Roohollah Mousavi S., Reza Esfahani M. Effective moment of inertia prediction of FRP-reinforced concrete beams based on experimental results // *Journal of Composites for Construction*, 2012. vol. 16, no. 5. pp. 490–498. doi: [10.1061/\(asce\)cc.1943-5614.0000284](https://doi.org/10.1061/(asce)cc.1943-5614.0000284).
9. Pavlovski D., Szumigaia M. Theoretical and Numerical Study of the Flexural Behaviour of BFRP RC Beams // *Engineering Transactions*, 2016. vol. 64, no. 2. pp. 213–223.
10. Hong S. Effects of the Amount and Shape of Carbon Fiber-Reinforced Polymer Strengthening Elements on the Ductile Behavior of Reinforced Concrete Beams // *Mechanics of Composite Materials*, 2014. vol. 50, no. 4. pp. 427–436. doi: [10.1007/s11029-014-9429-8](https://doi.org/10.1007/s11029-014-9429-8).

11. Абросимов Н. А., Елесин А. В. Обоснование применимости макронеоднородных моделей в задачах динамики многослойных композитных балок // *Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. Горький: Горьк. ун-т, 1987. С. 69–74.*
12. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 400 с.
13. Янковский А. П. Моделирование упругопластической динамики продольно-армированных балок-стенок на основе явного по времени метода центральных разностей // *Прикладная математика и механика*, 2017. Т. 81, № 1. С. 54–77.
14. Романова Т. П., Янковский А. П. Сравнительный анализ моделей изгибаемого деформирования армированных балок-стенок из нелинейно-упругих материалов // *Проблемы прочности и пластичности*, 2014. Т. 76, № 4. С. 297–309.
15. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Интегрирование задачи динамического упругопластического изгиба армированных стержней переменного поперечного сечения обобщенными методами Рунге–Кутты // *Вычислительные технологии*, 2004. Т. 9, № 4. С. 77–95.
16. Янковский А. П. Исследование упругопластического деформирования армированных балок-стенок с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу // *Проблемы прочности и пластичности*, 2012. Т. 74. С. 92–103.
17. Зубчанинов В. Г. *Основы теории упругости и пластичности*. М.: Высш. школа, 1990. 368 с.
18. Амбарцумян С. А. *Общая теория анизотропных оболочек*. М.: Наука, 1974. 446 с.
19. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Computers & Structures*, 1987. vol. 26, no. 1–2. pp. 1–15. doi: [10.1016/0045-7949\(87\)90232-x](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-x).
20. *Динамический расчет сооружений на специальные воздействия: Справочник проектировщика* / ред. Б. Г. Корнев, И. М. Рабинович. М.: Стройиздат, 1981. 215 с.
21. Librescu L., Oh S.-Y., Hohe J. Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading // *Composites Part B: Engineering*, 2004. vol. 35, no. 6–8. pp. 673–683. doi: [10.1016/j.compositesb.2003.07.003](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2003.07.003).
22. Richtmyer R. D., Morton K. W. *Difference methods for initial-value problems*. New York: Interscience Publ., 1967. xiv+405 pp.
23. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1989. 616 с.
24. Малинин Н. Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
25. *Композиционные материалы: Справочник* / ред. Д. М. Карпинос. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
26. Lubin G. *Handbook of composites*. New York: Springer US, 1982. xi+786 pp. doi: [10.1007/978-1-4615-7139-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7139-1)

MSC: 74K10

## Refined model of elastic-plastic behavior of longitudinally reinforced curved wall-beam under dynamic loading

*A. P. Yankovskii*

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

### Abstract

An initial-boundary value problem is formulated to describe the dynamic behavior of flexible longitudinally reinforced wall-beams of the lesser curvature. Mechanical behavior of materials of composition of the beams is described by the equations of the theory of plasticity with isotropic hardening. The geometric nonlinearity of the problem is considered in the Karman approximation. The obtained equations and correlations allow with different degree of accuracy to determine the stress-strain state of the considered beams taking into account of their weakened resistance to the transverse shears. From the received relationships in the first approximation the equations, corresponding to the second variant of Timoshenko theory, are obtained. For the numerical integration of the problems the method of steps in time with the involvement of the central differences to approximate derivatives with respect to time, is used. The longitudinally reinforced straight and slightly curved beams-walls of relatively low height are considered. The dynamic response is investigated for the considered constructions depending on the action surface (concave or convex) of external pressure caused by the arrival of the air blast wave. It is found that at the time intervals exceeding a few tenths of fractions of a second, elastic-plastic behavior of flexible reinforced straight and curved wall-beams, determined according to the second variant of the Timoshenko theory, is significantly different from the inelastic dynamic response calculated according to the refined theory.

**Keywords:** flexible beams, reinforcement, geometric nonlinearity, dynamic deformation, theory of plastic flow, isotropic hardening, second variant of Timoshenko theory, numerical integration, “cross” scheme.

Received: 10<sup>th</sup> April, 2017 / Revised: 18<sup>th</sup> August, 2017 /

Accepted: 18<sup>th</sup> September, 2017 / First online: 10<sup>th</sup> November, 2017

---

### Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Yankovskii A. P. Refined model of elastic-plastic behavior of longitudinally reinforced curved wall-beam under dynamic loading, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 3, pp. 524–545. doi: [10.14498/vsgtu1539](http://doi.org/10.14498/vsgtu1539) (In Russian).

#### Author's Details:

*Andrei P. Yankovskii*  <http://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Leading Research Scientist; Lab. of Fast Processes Physics;  
e-mail: [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru)

**Competing interests.** I have no competing interests.

**Author's Responsibilities.** I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

**Funding.** The research has not had any sponsorship.

## References

1. Bannister M. Challenges for composites into the next millennium — a reinforcement perspective, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2001, vol. 32, no. 7, pp. 901–910. doi: [10.1016/S1359-835X\(01\)00008-2](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2).
2. Pajapakse Y. D. S., Hui D. Marine Composites: Foreword, *Composites Part B: Engineering*, 2004, vol. 35, no. 6-8, pp. 447–450. doi: [10.1016/j.compositesb.2004.05.001](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2004.05.001).
3. Mouritz A. P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines, *Composite Structures*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21–42. doi: [10.1016/s0263-8223\(00\)00175-6](https://doi.org/10.1016/s0263-8223(00)00175-6).
4. *Polimernye kompozitsionnye materialy: struktura, svoistva, tekhnologiya* [Polymer Composite Materials: Structure, Properties, Technology], ed. A. A. Berlin. St. Petersburg, Professiia, 2009, 560 pp. (In Russian)
5. Karpov V. V. *Modeli i algoritmy issledovaniia prochnosti i ustoichivosti podkreplennykh obolochek vrashcheniia* [Research Models and Algorithms of Stability and Reliability of Reinforced Shells] Part 1, Prochnost' i ustoichivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniia [Stability and Reliability of Reinforced Rotational Shells]: in 2 Parts. Moscow, Fizmatlit, 2010, 288 pp. (In Russian)
6. Bazhenov V. A., Krivenko O. P., Solovei N. A. *Nelineinoe deformirovanie i ustoichivost' uprugikh obolochek neodnorodnoi struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi* [Deformation and Buckling of Elastic Shells with Inhomogeneous Structure: Models, Methods, Algorithms, Poorly Studied and New Problems]. Moscow, Librokom Book House, 2012, 336 pp. (In Russian)
7. Nemirovskii Yu. V., Mishchenko A. V., Vokhmianin I. T. *Ratsional'noe i optimal'noe proektirovanie sloistykh sterzhnevnykh sistem* [Rational and Optimal Design of Layered Rod Structures]. Novosibirsk, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering Publ., 2004, 488 pp. (In Russian)
8. Roohollah Mousavi S., Reza Esfahani M. Effective moment of inertia prediction of FRP-reinforced concrete beams based on experimental results, *Journal of Composites for Construction*, 2012, vol. 16, no. 5, pp. 490–498. doi: [10.1061/\(asce\)cc.1943-5614.0000284](https://doi.org/10.1061/(asce)cc.1943-5614.0000284).
9. Pavlovski D., Szumigaia M. Theoretical and Numerical Study of the Flexural Behaviour of BFRP RC Beams, *Engineering Transactions*, 2016, vol. 64, no. 2, pp. 213–223.
10. Hong S. Effects of the Amount and Shape of Carbon Fiber-Reinforced Polymer Strengthening Elements on the Ductile Behavior of Reinforced Concrete Beams, *Mechanics of Composite Materials*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 427–436. doi: [10.1007/s11029-014-9429-8](https://doi.org/10.1007/s11029-014-9429-8).
11. Abrosimov N. A., Elesin A. V. Obosnovanie primenimosti makroneodnorodnykh modelei v zadachakh dinamiki mnogosloinykh kompozitnykh balok [Substantiation of applicability of macronon-uniform models in problems of dynamics multilayered composites beams], In: *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti* [Applied problems of strength and plasticity]. Gorky, Gorky Univ. Publ., 1987, pp. 69–74 (In Russian).
12. Abrosimov N. A., Bazhenov V. G. *Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruktsii* [Nonlinear Problems of Dynamics of Composite Structures]. N. Novgorod, Nizhegorod. Univ. Publ., 2002, 400 pp. (In Russian)
13. Yankovskii A. P. Modelling of the elastoplastic dynamics of longitudinally reinforced wall beams based on a time-explicit central difference method, *J. Appl. Math. Mech.*, 2017, vol. 81, no. 1, pp. 36–51. doi: [10.1016/j.jappmathmech.2017.07.005](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.07.005).
14. Romanova T. P., Yankovskii A. P. Comparative analysis of models of bending deformation of reinforced walls-beams of nonlinear elastic materials, *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2014, vol. 76, no. 4, pp. 297–309 (In Russian).

15. Nemirovskii Yu. V., Yankovskii A. P. Integration of problem on elasto-plastic dynamic bending of reinforced cores of sections with a variable cross-section using generalized Runge-Kutta methods, *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2004, vol. 9, no. 4, pp. 77–95 (In Russian).
16. Yankovskii A. P. Analyzing the elastic-plastic deformation of reinforced wall-beams, accounting for the weakened resistance to in-plane shear, *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2012, vol. 74, pp. 92–103 (In Russian).
17. Zubchaninov V. G. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Bases of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Vyssh. shkola, 1990, 368 pp. (In Russian)
18. Ambartsumian S. A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [The general theory of anisotropic shells]. Moscow, Nauka, 1974, 446 pp. (In Russian)
19. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Computers & Structures*, 1987, vol. 26, no. 1–2, pp. 1–15. doi: [10.1016/0045-7949\(87\)90232-x](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-x).
20. *Dinamicheskii raschet sooruzhenii na spetsial'nye vozdeistviia* [Dynamic calculation of structures for special effects], ed. B. G. Korenev, I. M. Rabinovich. Moscow, Stroiizdat, 1981, 215 pp. (In Russian)
21. Librescu L., Oh S.-Y., Hohe J. Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading, *Composites Part B: Engineering*, 2004, vol. 35, no. 6–8, pp. 673–683. doi: [10.1016/j.compositesb.2003.07.003](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2003.07.003).
22. Richtmyer R. D., Morton K. W. *Difference methods for initial-value problems*. New York, Interscience Publ., 1967, xiv+405 pp.
23. Samarskii A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of finite difference schemes]. Moscow, Nauka, 1989, 616 pp. (In Russian)
24. Malinin N. N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [The applied theory of plasticity and creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1968, 400 pp. (In Russian)
25. *Kompozitsionnye materialy* [Composite Materials], ed. D. M. Karpinos. Kiev, Nauk. dumka, 1985, 592 pp. (In Russian)
26. Lubin G. *Handbook of composites*. New York, Springer US, 1982, xi+786 pp. doi: [10.1007/978-1-4615-7139-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7139-1)