Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 4. С. 611–632
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1567

УДК 517.956.227

# Об одной спектральной задаче для системы дифференциальных уравнений смешанного типа

*Д. В. Корниенко*

Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина,
Россия, 399770, Елец, Липецкая обл., ул. Коммунаров, 28.

**Аннотация**

Изучаются спектральные характеристики дифференциального оператора, порожденного граничной задачей для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа. Простейшим примером классической системы уравнений в частных производных, попадающих в поле нашего рассмотрения, может служить система уравнений смешанного типа:

$$D_t u_1 - \operatorname{sign}(t) D_x u_2 - \varepsilon u_2 = f_1, \quad D_t u_2 + D_x u_1 + \varepsilon u_1 = f_2,$$

эллиптическая при $t > 0$ и гиперболическая при $t < 0$.

**Ключевые слова:** граничные задачи, спектр оператора, системы дифференциальных уравнений в частных производных, периодическая задача, системы уравнений смешанного типа, базис.

Получение: 17 октября 2017 г. / Исправление: 15 декабря 2017 г. / Принятие: 18 декабря 2017 г. / Публикация онлайн: 28 декабря 2017 г.

**Введение.** Настоящая статья посвящена изучению спектральных характеристик дифференциального оператора $L$, порожденного в гильбертовом пространстве $H$ периодической задачей для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа. Эта система имеет следующий вид:

$$aD_t u(t) + bBu(t) = f(t), \text{ при } a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{sign}(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $B$ является $M$-оператором [1] в сепарабельном гильбертовом пространстве $H_x$; $D_t$ — оператор дифференцирования по переменной $t$; $t \in V_t \equiv [T_1, T_2]$,

**Научная статья**

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

**Образец для цитирования**
Корниенко Д. В. Об одной спектральной задаче для системы дифференциальных уравнений смешанного типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 4. С. 611–632. doi: 10.14498/vsgtu1567.

**Сведения об авторе**
*Дмитрий Васильевич Корниенко* http://orcid.org/0000-0002-3115-194X
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: dmkornienko@mail.ru

$-\infty < T_1 < 0 < T_2 < +\infty$. К системе уравнений (1), являющейся квазиэллиптической (квазигиперболической) системой первого типа [2] при $t > 0$ ($t < 0$), присоединены граничные условия вида

$$u(T_1) = u(T_2). \tag{2}$$

Для оператора $L$, порожденного задачей (1), (2), выписаны точечный спектр и аналитическое представление его собственных вектор-функций:

$$u_{m,k,s}(t) = e^k(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(p^1_{m,s}(t)e_1 + (-1)^{m+1}p^2_{m,s}(t)e_2\big).$$

Далее последовательно в гильбертовых пространствах $H_t$, $H^2_t$, $H_{tx}$ изучаются базисные свойства систем, составленных соответственно из компонент $u^j_{k,m,s}(t)$, $u_{k,m,s}(t)$, $u^j_{k,m,s}(t)\varphi^s$, $j = 1,2$, собственных вектор-функций $\varphi^s u_{k,m,s}(t)$ оператора $L$. На основе проведенных исследований сформулирована теорема о базисных свойствах системы собственных вектор-функций периодической задачи для системы уравнений смешанного типа.

**1. Постановка задачи.** В гильбертовом пространстве $H$ рассмотрим граничную задачу

$$aD_t u(t) + bBu(t) = \lambda u(t) + f(t), \tag{3}$$

$$\mu_1 u(T_1) + \mu_2 u(T_2) = 0 \tag{4}$$

со спектральным параметром $\lambda \in \mathbb{C}$. Здесь $f(t) \in H$; $a$, $b$, $\mu_1$, $\mu_2$ — заданные матрицы $(m \times m)$; $D_t$ — оператор дифференцирования по переменной $t$.

Дифференциальный оператор $B$ действует в $H_x$ и удовлетворяет определенным требованиям, формулируемым в терминах спектральной теории операторов. Примеры интересующих нас дифференциальных операторов $B$ и, следовательно, линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных приведены ниже.

Операция $L(Dt, B) = aD_t + bB$ в этом случае определена, естественно, на достаточно гладких вектор-функциях $u : \mathbb{R} \to H^m_x$, $u = u(t)$, $u(t) = \big(u^1(t), u^2(t), \ldots, u^m(t)\big)^\top \in H^m_x$, $u^j(t) \in H_x$, $j = 1, 2, \ldots, m$, принадлежащих для каждого $t \in V_t$ области определения $\mathfrak{D}(B)$ оператора $B$.

Элемент $u(t) \in H$ будем называть решением задачи (3), (4), если найдется последовательность таких гладких и удовлетворяющих условиям (4) вектор-функций $u_n(t) \in \mathfrak{D}(B)$, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t), \quad \lim_{n\to\infty} L(D_t, B)u_n(t) = f(t).$$

Другими словами, мы имеем дело с задачей (3), (4), понятие решения которой, как легко заметить, использует стандартную процедуру замыкания (расширения) операции $L(Dt, B) = aD_t + bB$ при условиях (4). Оператор $L : H \to H$, определяемый как замыкание в $H$ операции $L(D_t, B)$, первоначально заданной на гладких вектор-функциях, удовлетворяющих условиям (4), называют сильным расширением операции $L(D_t, B)$ при условиях (4). В этом случае решение $u = u(t)$ называют *сильным решением* задачи (3), (4).

Уравнение (3) зачастую называют *операторным* или *дифференциально-операторным* уравнением первого порядка по $t$. Уравнение (3) находит широкое применение при исследовании в цилиндре граничных задач для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Принципиальная схема перехода от граничной задачи для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных к соответствующему дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве $H$ будет описана ниже. Здесь же отметим следующее. Интересующие нас вопросы спектральной теории граничных задач для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных будут изучены на основе свойств сопоставляемого задаче дифференциального оператора $L : H \to H$. Свойства оператора $L$ описываются в терминах спектральной теории линейных операторов.

**2. Пространство *H* и его представления.** Пусть $H_x$ — сепарабельное гильбертово пространство с базисом Рисса $\{\varphi^s\}$, $s \in S$. Здесь и в дальнейшем $S$ — некоторое счетное множество индексов $s$, которыми нумеруются элементы $\varphi^s$ базиса пространства $H_x$. Не ограничивая общности результатов и учитывая ограничения, накладываемые на изучаемую граничную задачу, можно считать, что $H_x = \mathcal{L}_2(V_x)$ — гильбертово пространство комплексных функций над замкнутой ограниченной областью $V_x$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля. Пусть также система $\{\psi^s\}$, $s \in S$, является базисом $H_x$, биортогональным базису $\{\varphi^s\}$, $s \in S$. В таком случае биортогональная система $\{\varphi^s, \psi^s\}$, $s \in S$, состоит из базисов Рисса пространства $H_x$.

Обозначим через $e_1$, $e_2$, …, $e_m$ канонический ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}^m$ вектор-столбцов:

$$e_1 \overset{\mathrm{def}}{=} (1, 0, \ldots, 0)^\top, \quad \ldots, \quad e_m \overset{\mathrm{def}}{=} (0, \ldots, 0, 1)^\top,$$

а через $U$ — унитарное пространство элементов $u = u^1 e_1 + \ldots + u^m e_m$, $u^k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2 \ldots, m$, со скалярным произведением

$$(u, v)_U = u^1 \overline{v^1} + u^2 \overline{v^2} + \ldots + u^m \overline{v^m}.$$

Пусть также $H_x^m$ — гильбертово пространство элементов $u = u^1 e_1 + \ldots + u^m e_m$, $u^k \in H_k$; $k = 1, 2, \ldots, m$, с нормой

$$\|u\|_{H_x^m} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \|u^k\|_{H_x}^2}.$$

Очевидно, что любой элемент $U$ является элементом $H_x = \mathcal{L}_2(V_x)$. При таком подходе $U$ является собственным подпространством $H_x$. Отметим, что $H_x^m$ можно представить в виде ортогональной суммы $m$ копий гильбертова пространства $H_x$, то есть в виде

$$H_x^m = \sum_{k=1}^{m} \oplus H_x,$$

или кратко в виде

$$H_x^m = \overset{m}{\underset{k=1}{\oplus}} H_x.$$

Пусть $t \in V_t = [T_1, T_2]$, $-\infty < T_1 \leqslant 0 \leqslant T_2 < +\infty$, $T_2 - T_1 \neq 0$. Положим $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$ — гильбертово пространство комплексных функций над $V_t$ с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля, $H_{tx} = H_t \otimes H_x$. В дальнейшем изучение свойств разрешимости граничной задачи для линейных систем уравнений в частных производных будем проводить в гильбертовом пространстве $H = H_t \otimes H_x^m$, $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$. Важную роль при исследовании свойств спектральной задачи для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных играет нижеследующая лемма 1 и вытекающая из нее лемма 2.

Лемма 1. *Справедливо следующее равенство*:

$$H_{tx} = H_x \otimes U.$$

В силу теории биортогональных систем для любого элемента $u \in H_x^m$ имеет место представление в виде ряда $u = \sum_{s,k} u_s^k \varphi_k^s$ по биортогональной системе $\{\varphi_k^s, \psi_k^s\}$, $\varphi_k^s = \varphi^s e_k$, $\psi_k^s = \psi^s e_k$. Так как $u_s^k = (u, \psi_k^s) H_x^m = (u^k, \psi^s) H_x$, в силу безусловной базисности базиса $\{\varphi_k^s\}$ имеем также равносильное представление для элемента $u$: $u = \sum_s \varphi^s u_s$ , где $u_s = u_s^1 e_1 + u_s^2 e_2 + \cdots + u_s^m e_m \in U$.

Теперь мы можем получить другие формы представления гильбертова пространства $H$.

Лемма 2. *Справедливы следующие равенства*:

$$H = H_t^m \otimes H_x = H_t \otimes H_x^m = \overset{m}{\underset{k=1}{\oplus}} H_{tx}.$$

Достаточно заметить, что для вектор-функции $u(t) \in H$ в силу леммы 1 справедливы два представления:

$$u(t) = \sum_{s,k} u_s^k(t) \varphi_k^s = \sum_s \varphi^s u_s(t),$$

и воспользоваться разложением вектор-функций $u_s(t)$ (функций $u_s^k(t)$) в ряд по полной ортонормированной системе в $H_t^m$ (в $H_t$).

Отметим, что норма элемента $u$ гильбертова пространства $H$ вектор-функций $u : \overline{V} \to H_x^m$, $u = u(t) = u^1(t)e_1 + u^2(t)e_2 + \cdots + u^m(t)e_m$ может быть вычислена по формуле

$$\|u\|_H = \left\| \|u(t)\|_{H_x^m} \right\|_{H_t}.$$

**3. Дифференциальный оператор $B$ и его расширение.** Пусть $B : H_x \to H_x$ — линейный замкнутый неограниченный оператор с плотной в $H_x$ областью определения $\mathfrak{D}(B)$, не зависящей от $t \in V_t$ и $B\varphi^s = B(s)\varphi^s$ для любого $s \in S$, то есть все элементы базиса Рисса $\{\varphi^s\}$, $s \in S$, пространства $H_x$ являются собственным элементами оператора $B$ (собственному значению $B(s)$ соответствует собственный элемент $\varphi^s$). Оператор, для которого существует полная система собственных элементов, образующая базис Рисса в $H_x$, принято называть $M$-оператором [1] (от слова — модельный). Следует отметить, что существует $M$-оператор $B$, точечный спектр которого не имеет конечных предельных точек. В этом случае его резольвентное множество не пусто. Кроме этого, существует $M$-оператор $B$, резольвентное множество которого пусто [1]. Приведем примеры интересующих нас $M$-операторов.

1. $B = B(x, D_x)$, где $B(, D_x)$ является обыкновенным дифференциальным оператором на отрезке $V_x = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, порождаемым сильно регулярными краевыми условиями. Предполагается, что оператор $B(x, D_x)$ не имеет присоединённых функций.
2. Пусть $V_x = V_{x1} \times V_{x2} \times \cdots \times V_{xm}$, $V_{xk} = [0, a_k]$, $0 < a_k < +\infty$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Пусть также $B(D_X) = \sum_{|a|\leqslant r} b_a D_x^a$ — дифференциальная операция с постоянными комплексными коэффициентами $b_a = b_{a1,a2,\ldots,am}$; $D_x^a = D_{x_1}^{a_1} D_{x_2}^{a_2} \ldots D_{x_m}^{a_m}$; $|a| = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$. Обозначим через $B : \mathcal{L}_2(V_x) \to \mathcal{L}_2(V_x)$ замыкание в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(V_x)$ дифференциальной операции $B(D_x)$, первоначально заданной на гладких функциях, удовлетворяющих по каждой переменной $x_k$ нелокальным краевым условиям вида
$$\mu_k D_{x_k}^{l_k} u\big|_{x_k=0} = D_{x_k}^{l_k} u\big|_{x_k=b_k}, \quad l_k = 0, 1, \ldots, r_k - 1,$$
где $\mu_k \neq 0$ и $r_k$ — порядок $B(D_x)$ по переменной $x_k$; $k = 1, 2, \ldots, m$. Известно (см. [3, 4]), что замкнутый дифференциальный оператор $B$ является $M$-оператором. Если $\mu_k = \cdots = \mu_k = 1$, то оператор $B$ принято называть П-*оператором* [1].
3. Пусть $V_x$ — замыкание ограниченной гладкой гиперповерхностью $S = \partial\widetilde{V}_x$ области $\widetilde{V}_x$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Пусть также $B(D_X) = \sum_{|a|\leqslant 2r} b_a(x) D_x^a$ — формально самосопряженная эллиптическая дифференциальная операция, причем $(-1)^r \sum_{|a|\leqslant 2r} b_a(x)\xi^a > 0$ для всех $x \in V_x$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\xi \neq 0$. Обозначим через $B : \mathcal{L}_2(V_x) \to \mathcal{L}_2(V_x)$ замыкание в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(V_x)$ дифференциальной операции $B(D_x)$, первоначально заданной на гладких функциях, удовлетворяющих условиям Дирихле
$$D_v^{k-1} u\big|_{x\in S} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, r,$$
где $v$ — единичная внешняя нормаль к поверхности $S$. Известно [5], что замкнутый дифференциальный оператор $B$ обладает свойствами $M$-оператора, причем $B$ является правильным оператором, то есть $0 \in \varrho B$. В дальнейшем этот $M$-оператор $B$ будем называть $M$-эллиптическим дифференциальным оператором.

Примечание 1. Следует отметить, что выбор $M$-оператора $B$ определит при заданных матрицах $a$ и $b$, во-первых, вид системы (3) дифференциальных уравнений в частных производных и, во-вторых, тип краевых условий по переменной $x$. Поэтому, говоря о краевой задаче для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных, записанной в форме дифференциально-операторного уравнения (3), мы будем указывать только условия по переменной $t$, так как выбор условий по $t$ определяет название задачи. Например, говоря о задаче Дирихле для системы (3), мы имеем в виду, что краевые условия (4) являются условиями Дирихле; условия по $x$ вошли в определение оператора $B$ и явно не оговариваются. Кроме этого, ради простоты обозначений переменная $x$ (а иногда и переменная $t$) как аргумент вектор-функции $u \in H$ явно не указывается.

Положим $B(S) = \{B(s) : s \in S\}$. Будем считать выполненным следующее условие на структуру спектра $M$-оператора $B$.

Условие 1. Точечный спектр оператора $B : H_x \to H_x$ представим в виде $P\sigma B = B(S)$.

Известно, что спектр $\sigma B$ оператора $B : H_x^m \to H_x^m$ состоит из замыкания на комплексной плоскости точечного спектра $P\sigma B$ оператора $B$. Множество $C\sigma B = \sigma B \backslash P\sigma B$ образует непрерывный спектр оператора $B$.

Заметим, что уравнение (3) мы рассматриваем в гильбертовом пространстве $H$ вектор-функций $u(t) = u^1(t)e_1 + u^2(t)e_2 + \cdots + u^m(t)e_m$ а оператор $B$ определен на скалярах $u^k(t) \in H_x$ для любого $t \in V_t$ и любого $k = 1, 2, \ldots, m$. Следующие соглашения являются оправданием такой записи. Так как $H_x^m$ можно представить в виде ортогональной суммы $m$ копий гильбертова пространства $H_x$, естественно определить расширение оператора $B$ на $H$. Расширение оператора $B : H_x^m \to H_x^m$ на гильбертово пространство векторов $H_x^m$, как и принято, будем обозначать тем же символом $B$. Будем говорить, что $u = u^1e_1 + u^2e_2 + \cdots + u^me_m \in \mathfrak{D}(B)$ — области определения оператора $B : H_x^m \to H_x^m$ и $Bu = (BU^1)e_1 + (BU^2)e_3 + \cdots + (Bu^m)e_m$, если $u^k \in \mathfrak{D}(B)$ — области определения оператора $B : H_x \to H_x$ для любого $k = 1, 2, \ldots, m$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Спектр $\sigma B$ оператора $B : H_x^m \to H_x^m$ совпадает с замыканием $\underline{P\sigma B}$ его точечного спектра $P\sigma B$. Точечный спектр $P\sigma B$ оператора $B$ дается формулой $P\sigma B = B(S)$. Собственному значению $B(s)$ оператора $B$ соответствуют $m$ собственных векторов $\varphi_k^s = \varphi^s e_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Система $\{\varphi_k^s : k = 1, \ldots, ms \in S\}$ собственных векторов оператора $B$ является базисом Рисса в гильбертовом пространстве $H_x^m$.*

*Доказательство.* Если $\{\varphi^s, \psi^s : s \in S\}$ — биортогональная система в $H_x$, то система $\{\varphi_k^s, \psi_k^s : k = 1, 2, \ldots, m;\ s \in S\}$ биортогональна в $H_x^m$. Для любого $u = \sum_{k=1}^m u^k e_k \in H_x^m$ имеем $u^k = \sum_s (u^k, \psi^s)_{H_x} \varphi^s$ в $H_x$, следовательно, и $u = \sum_{k,s} (u, \psi_k^s)_{H_x^m} \varphi_k^s$, причем разложение единственно. Существуют такие константы $0 < C_1 \leqslant C_2 < +\infty$, что для любого элемента $u^k \in H_x$ имеем

$$C_1^2 \sum_s \bigl|(u^k, \psi^s)_{H_x}\bigr|^2 \leqslant \|u^k\|_{H_x}^2 \leqslant C_2^2 \sum_s \bigl|(u^k, \psi^s)_{H_x}\bigr|^2. \tag{5}$$

Складывая неравенства (5) для значений $k = 1, 2, \ldots, m$ и учитывая, что $(u^k, \psi^s)_{H_x} = (u^k, \psi^s)_{H_x^m}$, получаем неравенство

$$C_1^2 \sum_{k,s} \bigl|(u^k, \psi^s)_{H_x^m}\bigr|^2 \leqslant \|u^k\|_{H_x^m}^2 \leqslant C_2^2 \sum_{k,s} \bigl|(u^k, \psi^s)_{H_x^m}\bigr|^2,$$

из которого следует, что $B$ является $M$-оператором в $H^m_x$. $\square$

**4. Обобщенное решение.** Пусть $\mathfrak{D}_t$ — линейное многообразие гладких вектор-функций из $H^m_t$, удовлетворяющих условию (4), а точнее,

$$\nu \in \mathfrak{D}_t, \text{ если } \begin{cases} v \in C^2(V_t^{\pm}) \cap C(V_t), \\ L_2(D_t)v \in H^m_t, \\ \Gamma_t v = 0, \end{cases}$$

где $L_2(D_t) = aD_t + bB(s)$, $\Gamma_t v = \mu_1 v(T_t) + \mu_2 v(T_2)$, $V_t^{\pm} = V_t \backslash \{T_1, 0, T_2\}$.

Пусть также $\mathfrak{D}$ — линейное многообразие, состоящее из вектор-функций $u : \mathbb{R} \to H^m_x$ вида

$$u(t) = \sum_s v_s(t)\varphi^s,$$

где $v_s(t)$ из $\mathfrak{D}_t$ и суммирование проводится для конечного набора индексов $s \in S$.

Для любых $u, f \in H$ будем говорить, что $u \in \mathfrak{D}(L)$ — области определения оператора $L : H \to H$ и $Lu = f$, если найдется такая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ вектор-функций $u_n \in \mathfrak{D}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_H = \lim_{n\to\infty} \|L(D_t, B)u_n - f\|_H = 0.$$

Оператор $L : H \to H$ называют замыканием операции $L(D_t, B) = aD_t + bB(D_x)$ — левой части системы уравнений (3), на вектор-функциях из $\mathfrak{D}$.

Определение 1. Элемент $u \in \mathfrak{D}(L)$ будем называть обобщенным решением задачи (3), (4), если $Lu = \lambda u + f$ в $H$.

Таким образом, изучение свойств разрешимости задачи (3), (4) свелось к исследованию спектральных характеристик сопоставляемого ей оператора $L : H \to H$. Приведем некоторые подходы описания его спектра и свойств системы собственных вектор-функций. Пусть $L_s : H^m_x \to H^m_x$ — замыкание операции $L_s(D_t) = aD_t + bB(s)$ на функциях из $\mathfrak{D}_t$. Удобно считать, что и в этом случае $B$ является оператором:

$$Bu = B(s)u, \quad B : H^m_x \to H^m_x,$$

оператором умножения на константу $B(s)$. Отметим ниже следующие очевидные свойства.

1. Для конечных линейных комбинаций $u_n = \sum_{k=1}^n \varphi^{sk} u_{sk}(t) \in \mathfrak{D}$ и $f_n = \sum_{k=1}^n \varphi^{sk} u_{sk}(t) \in H$ вектор-функция $u_n \in H$ является решением уравнения $Lu = \lambda u + f$ тогда и только тогда, когда для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ вектор-функция $u_{sk} \in H^m_x$ является решением уравнения $L_{sk}v = \lambda u + f_{sk}$.
2. Точечный спектр $P\sigma L$ оператора $L : H \to H$ дается формулой
$$P\sigma L = \bigcup_{s\in S} P\sigma L_s;$$
если $u(t)$ — собственная вектор-функция оператора $L_s : H^m_x \to H^m_x$, соответствующая собственному значению $\lambda$, то $\varphi^s u(t)$ — собственная вектор-функция оператора $L$, соответствующая собственному значению $\lambda$.

Структура собственных вектор-функций оператора $L$ позволяет, как это проделано для скалярных функций, доказать ряд аналогичных теорем о свойствах систем собственных вектор-функций оператора $L$. Докажем интересующие нас свойства.

Теорема 2. *Если для любого $s \in S$ система (последовательность) $\{v_{k,s} : k \in K_s\}$ собственных вектор-функций оператора $L_s$, где $K_s$ — некоторое (упорядоченное) множество значений индекса $k$, полна (образует базис) в пространстве $H_x^m$, то система*

$$\{\varphi^2 v_{k,s} : k \in K_s;\ s \in S\} \tag{6}$$

*собственных вектор-функций оператора $L$ полна (образует базис) в пространстве $H$.*

*Доказательство.* Сначала докажем полноту в $H$ системы $\{u_{k,s} : k \in K_s;\ s \in S\}$ собственных вектор-функций $u_{k,s} = \varphi^s u_{k,s}$ оператора $L$. Пусть $f$ — произвольный элемент $H$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой конечный набор $\{\varphi^{s_i} : i = 1, 2, \ldots, N\}$, что

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{N} \varphi^{s_i} f_{s_i} \right\|_H < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $f_{s_i} \in H_x^m$. Пусть $C = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \|\varphi^{s_i}\|_{H_x}$. Подберем для каждого $i = 1, 2, \ldots, N$ такой конечный набор $\{v_{k_n,s_i} : n = 1, 2, \ldots, N_i\}$, чтобы

$$\left\| f_{s_i} - \sum_{i=1}^{N_i} f_{k_n,s_i}, v_{k_n,s_i} \right\|_{H_t^m} < \frac{\varepsilon}{2CN},$$

где $f_{k_n,s_i} \in \mathbb{C}$. Неравенство

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{N_i} f_{k_n,s_i} \varphi_{s_i} v_{k_n,s_i} \right\|_H \leqslant$$
$$\leqslant \left\| f - \sum_{i=1}^{N} f_{s_i} \varphi_{s_i} \right\|_H + C \sum_{i=1}^{N} \left\| f_{s_i} - \sum_{n=1}^{N_i} f_{k_n,s_i} v_{k_n,s_i} \right\|_{H_t^m} < \varepsilon$$

дает утверждаемую полноту.

Исследуем теперь вопрос о базисности системы (6) в $H$. Из равенства $H = H_t^m \otimes H_x$ следует, что для любого элемента $f \in H$ справедливо в $H$ представление $f = \sum_{s \in S} \varphi^s f_s$ в котором коэффициенты $f_s \in H_x^m$ определены однозначно. Так как последовательность $\{v_{k,s} : k \in K_s\}$ образует базис в пространстве $H_t^m$, для каждого элемента $f_s \in H_x^m$ справедливо в $H_t^m$ представление

$$f_s = \sum_{k \in K_s} f_{k,s} v_{k,s},$$

где коэффициенты $f_{k,s} \in \mathbb{C}$ также определены однозначно. Следовательно, получаем единственное представление

$$f_s = \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_s} f_{k,s} \varphi^s u_{k,s}$$

произвольного элемента $f \in H$ в виде ряда по системе собственных вектор-функций оператора $L$. $\square$

Аналогично можно исследовать и другие свойства. А именно, является ли система собственных вектор-функций минимальной, бесселевой, гильбертовой, базисом Рисса и так далее. Соответствующие исследования проводились многими авторами. Например, при исследовании граничных задач для уравнений смешанного типа Е. И. Моисеев [6–8] широко использовал базисность систем синусов и косинусов для построения решения в виде биортогональных рядов по этим системам. В дальнейшем мы будем изучать граничные задачи в пространстве $H = H_t^m \otimes H_x$ при $m = 2$. Поэтому естественно возникает вопрос о базисности аналогичных систем в пространствах вектор-функций. Приведем пример ортонормированного базиса $\{e_k : k \in K\}$ в $H_t^2$ составленного из синусов и косинусов, тем самым построим базис Рисса $\{e_k\varphi^s : k \in K, s \in S\}$ в пространстве $H$.

Положим

$$e_k^1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_2 - T_1}} \sin\bigl(A(k)(t - T_1)\bigr), \quad e_k^2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_2 - T_1}} \cos\bigl(A(k)(t - T_1)\bigr);$$
$$e_k(t) = e_k^1(t)e_1 + e_k^2(t)e_2,$$

где $A(k) = k\pi/(T_2 - T_1)$.

Лемма 3. *Система $\bigl\{e_k(t)\varphi^s : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}; s \in S\bigr\}$ заведомо не является полной в гильбертовом пространстве $H = H_t^m \otimes H_x$. Система $\{e_k(t)\varphi^s : k \in \mathbb{Z}; s \in S\}$ является базисом Рисса в $H$.*

*Доказательство.* Докажем первое утверждение леммы 3. В силу рассмотренной теоремы 2 достаточно доказать, что система вектор-функций

$$\bigl\{e_k(t) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\bigr\} \tag{7}$$

не является полной в $H_t^2$. Найдем представление вектор-функции $f \in H_t^2$, $f(t) = f^1(t)e_1 + f^2(t)e_2$, ортогональной всем вектор-функциям системы (7). Из условия ортогональности для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$ в $H_t$ имеем равенство

$$f(t) - A(k)F^1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^k e_m^2(t),$$

где

$$F^1(t) = \int_{T_1}^{t} f^1(\tau)d\tau, \quad c_k^k = 0.$$

Откуда получаем представление для функции $F^1(t)$:

$$A(1)F^1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (c_m^k - c_m^{k+1})e_m^2(t).$$

Так как $c_m^k - c_m^{k+1} = c_m^{k+1} - c_m^{k+2}$ при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$, имеем $c_m^{m-1} = -c_m^{m+1}$ для любого $m = 1, 2, 3, \ldots$. Из равенства $c_m^k = (f^2 - A(1)F^1, e_m^2)_{H_t}$

последовательно получаем:

$$\begin{aligned} &c_m^{m-1} = c_m^0 - A(m-1)(F^1,\, e_m^2)_{H_t};\\ &c_m^{m+1} = c_m^0 - A(m+1)(F^1,\, e_m^2)_{H_t};\\ &c_m^0 = A(m)(F^1,\, e_m^2)_{H_t}. \end{aligned}$$

Отсюда находим $(f^1,\, e_m^1)_{H_t} = -c_m^0$. Следовательно, имеем разложения

$$f^1(t) = -\sum_{m=1}^{\infty} c_m^0 e_m^1(t), \quad f^2(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^0 e_m^2(t).$$

Положив в этих разложениях, например, $c_m^0 = 2^{-m}$, получаем искомую вектор-функцию $f \in H_t^2$, то есть вектор-функцию, ортогональную всем вектор-функциям системы (7).

Докажем теперь вторую часть леммы, рассуждая, как и прежде, от противного. Пусть вектор-функция $f(t) \in H_t^2$ отлична от нуля и ортогональна в $H_t^2$ всем вектор-функциям системы $\{e_k(t) : k \in \mathbb{Z}\}$. В силу доказанного ранее при $k = -1, -2, -3, \ldots$ имеем

$$0 = (f, e_k)_{H_t^2} = 2c_{|k|}^0,$$

то есть $f = 0$. Замечая, что система

$$\{e_k(t)/\sqrt{2} : k \in \mathbb{Z}\} \tag{8}$$

является ортонормированной системой в $H_t^2$ и учитывая ее полноту в $H_t^2$, получаем, что система (8) — ортонормированный базис в $H_t^2$, а система $\{e_k(t)\varphi^2 : k \in \mathbb{Z}; s \in S\}$ — базис Рисса в $H = H_t^m \otimes H_x$. $\Box$

Выделенные свойства оператора $L$ приводят к необходимости исследования свойств операторов $L_s$. Займемся этим. Рассмотрим в $H_t^m$ цепочку следующих спектральных задач:

$$L_s u(t) = \lambda u(t) + f(t), \quad s \in S. \tag{9}$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $\lambda \notin P\sigma L_s s$, то структура резольвенты $R_\lambda = R_\lambda(L_s)$ оператора $L_s$ легко просматривается из представления $u(t) = R_\lambda f(t)$:

$$R_\lambda f(t) = \int_{T_1}^{T_2} G_s(t,\tau,\lambda) f(\tau) d\tau$$

— решения операторного уравнения (9). Матрицу Грина $G_s(t,\tau,\lambda)$ в данном случае удобно выписать в виде

$$G_s(t,\tau,\lambda) = \begin{cases} \Phi_s(t,\lambda) M_s^{-1}(\lambda)\mu_1 \Phi_s(T_1,\lambda)\times \\ \qquad \times\Phi_s^{-1}(\tau,\lambda) a^{-1}(\tau), \quad T_1 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T_2; \\ \Phi_s(t,\lambda) M_s^{-1}(\lambda)\mu_2 \Phi_s(T_2,\lambda)\times \\ \qquad \times\Phi_s^{-1}(\tau,\lambda) a^{-1}(\tau), \quad T_1 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T_2, \end{cases} \tag{10}$$

где $M_s(\lambda) = \mu_1 \Phi_s(T_1,\lambda) + \mu_2 \Phi_s(T_2,\lambda)$; $\Phi_s(t,\lambda)$ — фундаментальная матрица оператора $(L_s - \lambda E)$, $E$ — тождественный оператор в $H_t^m$.

Представление (10) позволяет выписать функцию, нули которой являются собственными значениями оператора $L_s$ и, следовательно, оператора $L$. Такой функцией, очевидно, является определитель $\Delta_2(\lambda)$ матрицы $\mu_1\Phi_s(T_1,\lambda) + \mu_2\Phi_s(T_2,\lambda)$. Положим $W_t = V_t \times V_t$.

Теорема 3. *Пусть $\lambda \notin P\sigma L$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\lambda \in \varrho L$, *если существуют такие*
   - а) *число $C > 0$ и*
   - б) *скалярные функции $g_s - g_s(t,\tau,\lambda)$, что для всех $s \in S$ и всех $(t,\tau) \in W_t$ матрица Грина $G_s(t,\tau,\lambda)$ оператора $(L_s - \lambda E)$ удовлетворяет неравенству*

$$\big\|G_s(t,\tau,\lambda)u(\tau)\big\|_U \leqslant \big\|g_s(t,\tau,\lambda)u(\tau)\big\|_U$$

   *и нормы $\|g_s\|_{\mathcal{L}_2}(\overline{W}_t)$ равномерно по $s$ ограничены, то есть для любого $s \in S$ имеет место неравенство $\sqrt{m\|g_s\|_{\mathcal{L}_2}(\overline{W}_t)} < C$.*

2) $\lambda \in C\varrho L$, *если существуют такие вектор-функции $f(t) \in H_t^m$, $s \in S' \subseteq S$, что $f_s \neq 0$ и*

$$\sup_{s\in S'} = \frac{\|R_{\lambda,s}f_s\|_{H_t^m}}{\|f_s\|_{H_t^m}} = +\infty. \tag{11}$$

*Доказательство.* 1. Для любой вектор-функции $f(t) \in H$ в силу теоремы 2 имеем представление

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi^{s_k} f_{s_k}(t), \quad f_s(t) \in H_t^m.$$

Аппроксимируем $f(t) \in H$ частичной суммой $f_n(t) \in H$ ее разложения в ряд по биортогональной системе $\{\varphi_m^s, \psi_m^s\}$:

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi^{s_k} f_{s_k}(t), \quad f_{s_k}(t) \in H_t^m$$

и определим входящую в определение обобщенного решения изучаемой задачи последовательность $\{u_n(t)\}$ в виде

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi^{s_k} u_{s_k}(t), \quad u_{s_k}(t) = R_{\lambda,s_k}(t).$$

Из свойств а) нормы, б) матрицы Грина, в) неравенства Коши—Буняковского и условий теоремы получаем необходимую нам оценку:

$$\|u_{s_k}\|_{H_t^m} \leqslant C\|f_{s_k}\|_{H_t^m}.$$

Действительно,

$$\|u_{s_k}(t)\|_U^2 = \sum_{n=1}^m \left| \int_{V_t} \sum_{i=1}^m G_{s_k}^{n,i}(t,\tau,\lambda) f_{s_k}^i(\tau) d\tau \right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left( \int_{V_t} \sum_{n=1}^m \left| \sum_{i=1}^m G_{s_k}^{n,i}(t,\tau,\lambda) f_{s_k}^i(\tau) \right| d\tau \right)^2 \leqslant m \int_{V_t} \|G_{s_k}(t,\tau,\lambda) f_{s_k}(\tau)\|_U d\tau \leqslant$$
$$\leqslant m \int_{V_t} |g(t,\tau,\lambda)|^2 d\tau \int_{V_t} \|f_{s_k}(\tau)\|_U^2 d\tau =$$
$$= m \int_{V_t} |g(t,\tau,\lambda)|^2 d\tau \big\| \|f_{s_k}(t)\|_U \big\|_{H_t}^2.$$

Осталось воспользоваться равенством $\|u_{s_k}\|_{H_t^m} = \|\|u_{s_k}(t)\|_U\|_{H_t}$.

Далее, в силу теоремы 1 имеем двойное неравенство

$$C_1^2 \sum_{k=1}^n \|u_{s_k}\|_{H_t^m}^2 \leqslant \|u_n\|_H^2 \leqslant C_2^2 \sum_{k=1}^n \|u_{s_k}\|_{H_t^m}^2.$$

Учитывая доказанное, получаем неравенство

$$\|u_n\|_H \leqslant c\|f_n\|_H, \quad c = C\frac{C_2}{C_1}, \tag{12}$$

из которого следует единственность решения уравнения $Lu_n = \lambda u_n + f_n$, фундаментальность последовательности $\{u_n\}$ в $H$ и существование решения уравнения $Lu_n = \lambda u_n + f$. Если положить $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (12), получаем

$$\|u_n\|_H = \|(L-\lambda)^{-1} f\|_H \leqslant c\|f\|_H,$$

то есть $\lambda \in \varrho L$.

2. Воспользуемся обозначениями и результатами первой части теоремы 3. В частности, было доказано, что оператор $(L-\lambda)^{-1}$ существует и задан на множестве, всюду плотном в $H$. Имеем

$$\frac{\|(L-\lambda)^{-1}\varphi^s f_s\|_H}{\|\varphi^s f_s\|_H} \geqslant \frac{C_1}{C_2} \frac{\|(L_s-\lambda)^{-1} f_s\|_{H_t^m}}{\|f_s\|_{H_t^m}},$$

откуда в силу условия (11) теоремы 3 получаем $\|(L-\lambda)^{-1}\| = +\infty$, то есть $\lambda \in C\varrho L$. $\square$

Обозначим через $\widehat{L}_s$ сужение оператора $L$ на подпространство $H_t^m \otimes \varphi_s$ пространства $H$. Тогда $\widehat{L}_s = L_s \otimes 1$. Учитывая важность оператора $L_s$, в дальнейшем будем называть его проекцией оператора $L$ на пространство $H_t^m$ относительно $\varphi^s$, или просто $s$-проекцией оператора $L$.

**5. Спектральные характеристики дифференциального оператора одной линейной системы дифференциальных уравнений смешанного типа.** Пусть $t \in V_t \equiv [T_1, T_2]$, $-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$; $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$; $H_x = \mathcal{L}_2(V_x)$; $H = H_t \otimes H_x^2$.

Для $f(t) \in H$ рассмотрим уравнение

$$L(D_t, B)u \equiv aD_t u(t) + aBu(t) = f(t) \tag{13}$$

(под уравнением мы понимаем систему) и граничные условия вида

$$u(T_1) = u(T_2). \tag{14}$$

Здесь $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{sign}(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Как и ранее, $\mathfrak{D}$ — линейное многообразие, состоящее из гладких вектор-функций $u(t) \in C(V_t, H_x) \cap C^1(V_t^{\pm}, H_x)$, удовлетворяющих условиям (14) и принадлежащих для любого $t \in V_t^{\pm}$ области определения $\mathfrak{D}(B)$ оператора $B$. Здесь $C(V_t, H_x) = C(V_t) \otimes H_x$, $C(V_t) = C(V_t) \otimes U$; $C^1(V_t^{\pm}, H_x) = C^1(V_t^{\pm}) \otimes H_x$, $C^1(V_t^{\pm}) = C^1(V_t^{\pm}) \otimes U$; $V_t^{\pm} = V_t^{-} \cup V_t^{+}$, $V_t^{-} = (T_1, 0)$, $V_t^{+} = (0, T_2)$.

Вопросами изучения спектральной теории граничных задач для уравнений смешанного типа посвящены работы [9–11]; в меньшей степени изучены соответствующие вопросы для систем уравнений смешанного типа. Отметим работу [12], в которой изучаются задача Римана—Гильберта для однородной системы уравнений Лаврентьева—Бицадзе в смешанной области с характеристическим участком границы.

Определение 2. Пусть $f(t) \in H$. Элемент $u(t) \in H$ называем обобщенным решением граничной задачи (13), (14), если найдется последовательность таких гладких вектор-функций $u_n(t) \in \mathfrak{D}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(t) - u(t)\|_H = \lim_{n\to\infty} \|L(D_t, B)u_n(t) - f(t)\|_H = 0.$$

Приведем вначале некоторые общие подходы к изучению спектра и свойств системы собственных вектор-функций граничной задачи (13), (14), то есть ее спектральные свойства. Под спектральными свойствами граничной задачи мы понимаем спектральные свойства оператора $L : H \to H$, сопоставляемого этой задаче в силу определения 2.

Пусть $L_s : H_t^2 \to H_t^2$ — замыкание операции $L_s(D_t) = aD_t + bB(s)$ на функциях из $\mathfrak{D}_t$ или $s$-проекция оператора $L$.

Выделенные свойства оператора $L$ приводят к необходимости исследования свойств операторов $L_s$. Займемся этими исследованиями.

Лемма 4. *Если $0 \in P\sigma B$, то есть $B(s) = 0$, то спектр $\sigma L_s$ оператора $L_s : H_t^2 \to H_t^2$ совпадает с его точечным спектром $P\sigma L_s$. Точечный спектр оператора $L_s$ дается формулой*

$$\lambda_k = \frac{2\pi k i}{T_2 - T_1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Собственному значению $\lambda_k$ соответствуют две собственные вектор-функции*

$$u_{k,m,s}(t) \equiv u_{k,m}(t) = e_m^k(t) = e^k(t)\frac{e_1 + (-1)^{m+1}e_2}{\sqrt{2}}, \tag{15}$$

$$e^k(t) = \frac{\exp\big(\lambda_k(t-T_1)\big)}{\sqrt{T_2-T_1}}, \quad m = 1,2$$

*оператора $L_s$. Система собственных вектор-функций оператора $L_s$ образует ортонормированный базис в пространстве $H_t^2$.*

*Доказательство.* Из равенства

$$(u_{k,m}, u_{k',m'})_{H_t^2} = \delta_k^{k'} \delta_m^{m'},$$

где $\delta_k^{k'}$ — функция Кронекера, следует ортонормированность в $H_t^2$ системы

$$\{u_{k,m}(t) : k \in \mathbb{Z}; m = 1,2\} \tag{16}$$

собственных вектор-функций оператора $L_s$. Предположим, что множество (16) неполно в $H_t^2$. Тогда существует вектор-функция $f \in H_t^2$, $f = f^1(t)e_1 + f^2(t)e_2$, $f \neq 0$ в $H_t^2$, ортогональная всем вектор-функциям (16). Так как $\{e^k(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ — полная ортонормированная в $H_t$ система, из равенства

$$(f, e_m^k)_{H_t^2} = (f^1 + (-1)^{m+1} f^2, e^k)_{H_t}/\sqrt{2},$$

где $m = 1,2; k \in \mathbb{Z}$, следует противоречие: $f = 0$ в $H_t^2$ и, следовательно, полнота в $H_t^2$ системы (16). $\square$

Следует отметить, что доказательство структуры спектра оператора $L_s$ в лемме 4 вытекает из представления резольвенты $R_\lambda(L_s) = (L_s - \lambda E)^{-1}$ оператора $L_s$ в виде ряда Фурье по системе собственных вектор-функций оператора. Оператор $L_s$, вообще говоря, базиса Рисса в $H_t^2$ не образует, поэтому структуру его спектра будем исследовать, опираясь на аналитическое представление матрицы Грина резольвенты $R_\lambda(L_s)$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 5. *Если $0 \notin P\sigma B$, то спектр $\sigma L_s$ оператора $L_s : H_t^2 \to H_t^2$ совпадает с его точечным спектром $P\sigma L_s$. Точечный спектр оператора $L_s$ дается формулой*

$$\lambda_{k,m,s} \equiv \lambda_k + \lambda_{m,s} = \frac{2\pi k i + \ln \omega_{m,s}}{T_2 - T_1}, \tag{17}$$

$$\lambda_{m,s} = \frac{\ln \omega_{m,s}}{T_2 - T_1}, \quad m = 1,2, \ k \in \mathbb{Z},$$

$$\omega_{m,s} = \operatorname{ch}\big(B(s)T_1\big)\cos\big(B(s)T_2\big) + (-1)^{m+1}\sqrt{\operatorname{ch}^2\big(B(s)T_1\big)\cos^2\big(B(s)T_2\big) - 1}.$$

*Собственному значению $\lambda_{k,m,s}$ соответствует собственная вектор-функция*

$$u_{k,m,s}(t) = e^k(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(p_{m,s}^1(t)e_1 + (-1)^{m+1}p_{m,s}^2(t)e_2\big), \tag{18}$$

*где*

$$p_{m,s}^1(t) = \exp\big(\lambda_{m,s}(t-T_1)\big)\begin{cases} a_{m,s}\sin\big(B(s)t\big) + b_{m,s}\cos\big(B(s)t\big), & \text{если } t > 0, \\ -a_{m,s}\operatorname{sh}\big(B(s)t\big) + b_{m,s}\operatorname{ch}\big(B(s)t\big), & \text{если } t < 0; \end{cases}$$

$$\frac{p^2_{m,s}(t)}{(-1)^{m+1}} = \exp\bigl(\lambda_{m,s}(t-T_1)\bigr)\begin{cases} a_{m,s}\cos\bigl(B(s)t\bigr) - b_{m,s}\sin\bigl(B(s)t\bigr), & \text{если } t>0,\\ a_{m,s}\operatorname{ch}\bigl(B(s)t\bigr) - b_{m,s}\operatorname{sh}\bigl(B(s)t\bigr), & \text{если } t<0; \end{cases}$$

$$a_{m,s} = \operatorname{ch}\bigl(B(s)T_1\bigr) - \omega_{m,s}\cos\bigl(B(s)T_2\bigr),\ \ b_{m,s} = \operatorname{sh}\bigl(B(s)T_1\bigr) - \omega_{m,s}\sin\bigl(B(s)T_2\bigr),$$

*оператора* $L_s$.

*Доказательство.* Справедливость формулы (17), описывающей распределение собственных значений оператора $L_s$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и представлений (18) соответствующих им собственных вектор-функций достаточно просто проверяется.

Если $\lambda \notin P\sigma L_s$, то решение $u_s = u_s(t)$ уравнения $L_s u = \lambda u + f$ для $f = f(t) \in C(V_t)$ дается формулой

$$u_s = R_{\lambda,s}f(t) = \int_{V_t} G_s(t,\tau,\lambda)f(\tau)d\tau, \tag{19}$$

где матрица Грина $G_s(t,\tau,\lambda)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_2(W_t)$, $W_t = V_t \times V_t$. Используя для (19) неравенство Коши—Буняковского, получаем оценку

$$\|u_s\|_{H^2_t} \leqslant C_s\|f_s\|_{H^2_t},$$

из которой в силу плотности $C(V_t)$ в $H_t$ следует включение $\lambda \in P\sigma L_s$. □

Следующие утверждения позволяют выяснить свойства систем элементов, составленных из собственных вектор-функций оператора $L_s$ в случае $\lambda \notin P\sigma B$. Изучение начнем со свойств в пространстве $H_t$ систем, составленных из их координат.

Лемма 6. *При любых фиксированных* $l = 1,2$; $m = 1,2$; $s \in S$, *система*

$$\{u^l_{k,m,s}(t) : k \in \mathbb{Z}\} \tag{20}$$

*элементов* $u^l_{k,m,s}(t) = e^k p^l_{m,s}(t)$ *полна в* $H_t$.

*Доказательство.* Доказательство проводим от противного: предполагаем существование элемента $f \in H_t$, $f \neq 0$ в $H_t$, ортогонального всем элементам системы (20), то есть такого элемента, что для любого $m = 1,2$ и для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$(f, u^l_{k,m,s})_{H_t} = 0. \tag{21}$$

Пусть $h \in H_t$, $h \neq 0$ и $h = \lim_{n\to\infty} h_n$, где $h_n = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^k$, $e^k = e^k(t)$. Очевидно, что произведение $h_n f$ принадлежит пространству $H_t$, то есть $h_n f \in H_t$, и удовлетворяет условию нетривиальной ортогональности (21). Так как $\bar f u^l_{k,m,s} \in H_t$, в силу непрерывности скалярного произведения и ранее отмеченного условия ортогональности получаем цепочку равенств

$$(h, \bar f u^l_{k,m,s})_{H_t} = h = \lim_{n\to\infty}(h_n, \bar f u^l_{k,m,s})_{H_t} = \lim_{n\to\infty}(h_n f, u^l_{k,m,s})_{H_t} = 0. \tag{22}$$

Из (22) в силу произвольности $h$ следует равенство $\|(h_n f, u^l_{k,m,s})\|_{H_t} = 0$, эквивалентное равенству $f = 0$. Получено противоречие. □

Теперь, опираясь на лемму 6, докажем критерий полноты системы собственных вектор-функций оператора $L_s$ в $H_t^2$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 7. *Система*

$$\{u_{k,m,s}(t) : k \in \mathbb{Z}; m = 1, 2\} \tag{23}$$

*собственных вектор-функций оператора $L_s$ полна в $H_t^2$ тогда и только тогда, когда*

$$a_{1,s}b_{2,s} - a_{2,s}b_{1,s} \neq 0. \tag{24}$$

*Доказательство.* Пусть вектор-функция $f \in H_t^2$, $f \neq 0$, $f = f^1 e_1 + f^2 e_2$, ортогональна всем вектор-функциям системы (23). Если $f^1 = 0$ или $f^2 = 0$ в $H_t$, то в силу леммы 6 получаем противоречие: $f = 0$. Если $f^1 \neq 0$ и $f^2 \neq 0$ в $H_t$, то для $h_n = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^k$, $e^k = e^k(t)$, имеем $(h_n f, u_{k,m,s})_{H_t^2} = 0$, откуда, в силу непрерывности скалярного произведения, рассматривая цепочку (22), получаем равенство

$$(\overline{f^1} u^1_{k,m,s} + \overline{f^2} u^2_{k,m,s})_{H_t} = 0,$$

где $h = \lim_{n\to\infty} h_n$. Следовательно, имеем (в силу произвольности $h$) равенство

$$\|\overline{f^1} u^1_{k,m,s} + \overline{f^2} u^2_{k,m,s}\|_{H_t} = 0$$

или, что то же самое, равенство

$$p^2_{1,s}(t)p^1_{2,s}(t) + p^2_{2,s}(t)p^1_{1,s}(t) = 0,$$

справедливое для почти всех $t \in V_t$. Вспоминая представление $p^l_{m,s}(t)$, получаем в случае выполнения условия (24) противоречие $f = 0$.

Если условие (24) не выполнено, то вектор-функция

$$f(t) = p^2_{1,s}(t)e_1 - p^1_{1,s}(t)e_2$$

ортогональна всем вектор-функциям системы (23). $\square$

Лемма 8. *Система (23) собственных вектор-функций оператора $L_s$ обладает следующими свойствами:*

*а) минимальна в $H_t^2$;*

*б) является гильбертовой системой в $H_t^2$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (24).*

*Доказательство.* Пусть $L_s^\tau$ — замыкание в $H_t^2$ операции $L_s^\tau(D_t) = -a^\tau D_t + b^\tau \overline{B}(s)$, первоначально заданной на линейном многообразии $\mathfrak{D}_t$. Оператор $L_s^\tau : H_t^2 \to H_t^2$ обычно называют формально сопряженным оператору $L_s$. Точечный спектр оператора $L_s^\tau$ дается формулой $\bar\mu_{k,m,s} = -\bar\lambda_k - \bar\lambda_{m,s}$, $m = 1, 2$, $k \in \mathbb{Z}$. Собственному значению $\bar\mu_{k,m,s}$ соответствует собственная вектор-функция $\bar\nu_{k,m,s}(t)$ оператора $L_s$, причем

$$\bar\nu_{k,m,s}(t) = e^k(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(q^1_{m,s}(t)e_1 + (-1)^{m+1}q^2_{m,s}(t)e_2\big),$$

где

$$e^k(t) = \exp\bigl(\lambda_k(t-T_1)\bigr)/\sqrt{T_2-T_1},$$

$$q^1_{m,s}(t) = \exp\bigl(\lambda_{m,s}(t-T_1)\bigr)\begin{cases} b_{m,s}\sin\bigl(B(s)t\bigr) - a_{m,s}\cos\bigl(B(s)t\bigr), & \text{если } t>0,\\ b_{m,s}\operatorname{sh}\bigl(B(s)t\bigr) - a_{m,s}\operatorname{ch}\bigl(B(s)t\bigr), & \text{если } t<0;\end{cases}$$

$$\frac{q^2_{m,s}(t)}{(-1)^{m+1}} = \exp\bigl(\lambda_{m,s}(t-T_1)\bigr)\begin{cases} b_{m,s}\cos\bigl(B(s)t\bigr) + a_{m,s}\sin\bigl(B(s)t\bigr), & \text{если } t>0,\\ b_{m,s}\operatorname{ch}\bigl(B(s)t\bigr) - a_{m,s}\operatorname{sh}\bigl(B(s)t\bigr), & \text{если } t<0.\end{cases}$$

Система

$$\{\nu_{k,m,s}(t) : k\in\mathbb{Z}; m=1,2\} \tag{25}$$

собственных вектор-функций оператора $L^\tau_s$ полна в $H^2_t$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (24).

Заметим теперь, что точечный спектр $P\sigma L_s$ оператора $L_s$ дается формулой

$$\lambda_{k,m,s} \equiv \lambda_k + (-1)^{m+1}\lambda_s, \quad \lambda_s = \frac{\ln\omega_s}{T_2-T_1}, \quad m=1,2,\ k\in\mathbb{Z},$$

а точечный спектр $P\sigma L^\tau_s$ оператора $L^\tau_s$ дается также формулой

$$\mu_{k,m,s} \equiv \bar\lambda_k + (-1)^{m+1}\bar\lambda_s, \quad \lambda_s = \frac{\ln\omega_s}{T_2-T_1}, \quad m=1,2,\ k\in\mathbb{Z},$$

где

$$\omega_s = \operatorname{ch}\bigl(B(s)T_1\bigr)\cos\bigl(B(s)T_2\bigr) + \sqrt{\operatorname{ch}^2\bigl(B(s)T_1\bigr)\cos^2\bigl(B(s)T_2\bigr) - 1}.$$

Так как $L^\tau_s \subseteq L^*_s$, где $L^*_s$ — оператор, сопряженный оператору $L_s$ в смысле теории операторов, собственные вектор-функции операторов $L_s$ и $L^\tau_s$, соответствующие собственным значениям $\lambda_{k,m,s}$ и $\mu_{k',m',s}$, ортогональны, если $\lambda_{k,m,s} - \bar\mu_{k',m',s} \neq 0$. В силу критерия минимальности [13] получаем минимальность в $H^2_t$ системы собственных вектор-функций оператора $L_s$.

Следовательно, системы (23) и (25) являются $B$-системами тогда и только тогда, когда выполнено условие (24). Осталось заметить, что вектор-функции системы (23) отличаются от вектор-функции системы (15) умножением на непрерывные функции. □

Обозначим через $\Gamma^l_{m,s}$ кривую, задаваемую в комплексной плоскости параметрическим представлением $p^l_{m,s}(t)$, $t\in V_t$, то есть

$$\Gamma^l_{m,s} = \{p^l_{m,s}(t) : t\in V_t\}.$$

Лемма 9. *Система (18) собственных вектор-функций оператора $L_s$ образует в пространстве $H^2_t$ базис Рисса тогда и только тогда, когда*

$$0 \notin \cup^2_{m,l=1}\Gamma^l_{m,s}.$$

*Доказательство.* Определим в $H_t^2$ линейный оператор $\mathcal{B}_s$ следующим образом. Пусть $c_{k,m}$ — коэффициенты Фурье разложения вектор-функции $f$ в ряд по системе (15). Положим

$$f(t) = \sum_{m=1}^{2} f_m(t),$$

где $f_m(t) = c_{k,m} e_m^k(t)$. По построению

$$f(t) = \bigoplus_{m=1}^{2} f_m(t),$$

то есть построено ортогональное разложение $H_t^2 = H_{t,1}^2 \oplus H_{t,2}^2$ пространства $H_t^2$. Обозначим через $\mathcal{B}_{s,m}$, $m = 1, 2$, сужение оператора $\mathcal{B}_s$ на пространство $H_{t,m}^2$, $m = 1, 2$. Положим

$$\mathcal{B}_s f(t) = \sum_{m=1}^{2} \mathcal{B}_{s,m} f_m(t),$$

где $\mathcal{B}_{s,m} f_m(t) = \sum_k c_{k,m} e_m^k(t)$. Так как функции $p_{m,s}^l(t)$ непрерывна на $V_t$, то оператор $\mathcal{B}_s : H_t^2 \to H_t^2$ ограничен. Если $0 \notin \cup_{m,l=1}^2 \Gamma_{m,s}^l$, то $0 < c_s <$ $< \inf_{m,l,t} |p_{m,s}^l(t)|$, то есть операторы $\mathcal{B}_{s,m} : H_t^2 \to H_t^2$ непрерывно обратимы и преобразуют систему (15) в систему (18). Докажем, что оператор $\mathcal{B}_{s,m} : H_t^2 \to H_t^2$ также непрерывно обратим. Система $\{u_{k,m,s}(t)\}$ — минимальна в $H_t^2$. Следовательно, $\Re(\mathcal{B}_{s,1}) \cup \Re(\mathcal{B}_{s,2}) = \oslash$. Но в таком случае оператор $\mathcal{B}_s$ имеет обратный, который ограничен в силу ограниченности операторов $\mathcal{B}_{s,1}^{-1}$, $m = 1, 2$. Это означает, что система (18) является одновременно гильбертовой и бесселевой, то есть базисом Рисса в $H_t^2$.

Если $0 \in \cup_{m,l=1}^2 \Gamma_{m,s}^l$, то достаточно воспользоваться результатами работ [2, 14]. $\square$

Рассмотрим теперь спектральные свойства оператора $L$. Для удобства обозначим $H^m = H_t^m \otimes H_x$.

Лемма 10. *При любых фиксированных значениях $l = 1, 2$; $m = 1, 2$, система*

$$\{u_{k,m,s}^l(t)\varphi^s : k \in \mathbb{Z}; s \in S\}$$

*элементов $u_{k,m,s}^l(t)\varphi^s = e^k(t) p_{m,s}^l(t)\varphi^s$ полна в $H_{tx}$.*

*Доказательство.* Достаточно заметить, что $H_{tx} = H^m$ при $m = 1$, и воспользоваться результатами леммы 6. $\square$

Теперь докажем критерий полноты системы собственных вектор-функций оператора $L$ в $H$.

Лемма 11. *Система*

$$\{\varphi^s u_{k,m,s}(t) : k \in \mathbb{Z}; m = 1, 2; s \in S\} \tag{26}$$

*собственных вектор-функций оператора $L$ полна в $H$ тогда и только тогда, когда для любого индекса $s \in S$ имеет место неравенство*

$$a_{1,s}b_{2,s} - a_{2,s}b_{1,s} \neq 0. \tag{27}$$

*Доказательство.* Если для любого индекса $s \in S$ имеет место неравенство (27), то достаточно заметить, что $H = H^m$ при $m = 2$, и воспользоваться результатом леммы 7.

Если условие (27) не выполнено при некотором $s \in S$, то вектор-функция $\bar{f}(t) = \psi^s(p_{1,s}^2(t)e_1 - p_{1,s}^1(t)e_2)$ ортогональна всем вектор-функциям системы (26). □

Теперь мы можем обсудить вопрос о базисе в пространстве $H$ из системы собственных вектор-функций задачи (13), (14).

Лемма 12. *Система*

$$\{\varphi_s u_{k,m,s}(t) : k \in \mathbb{Z}; m = 1, 2; s \in S\} \tag{28}$$

*собственных вектор-функций оператора $L$, где вектор-функция $u_{k,m,s}$ имеет вид*

$$u_{k,m,s}(t) = \begin{cases} (15), & \text{если } B(s) = 0; \\ (18), & \text{если } B(s) \neq 0, \end{cases} \tag{29}$$

*образуют в пространстве $H$ базис тогда и только тогда, когда для любого индекса $s \in S$ имеем $0 \notin \cup_{m,l=1}^2 \Gamma_{m,s}^l$.*

*Доказательство.* Если для любого индекса $s \in S$ не выполнено включение: $0 \in \cup_{m,l=1}^2 \Gamma_{m,s}^l$, то в силу леммы 4 и леммы 9 система (29) собственных вектор-функций оператора $L_s$ образует базис в пространстве $H_t^2$ для любого индекса $s \in S$. В этом случае система (28) образует базис в пространстве $H^2 \equiv H$.

Если $0 \in \cup_{m,l=1}^2 \Gamma_{m,s}^l$ при некотором $s \in S$, то вектор-функция $\tilde{f}(t) = \psi^s(p_{1,s}^2(t)e_1 - p_{1,s}^1(t)e_2)$ ортогональна всем вектор-функциям системы (28). □

Теперь мы можем сформулировать основной результат о базисных свойствах системы собственных вектор-функций периодической задачи для системы уравнений смешанного типа. Обозначим через $\mathfrak{G}$ множество индексов $s \in S$, для которых выполнено равенство $a_{1,s}b_{2,s} - a_{2,s}b_{1,s} = 0$:

$$\mathfrak{G} = \bigcup_{s \in S} \big\{s : a_{1,s}b_{2,s} - a_{2,s}b_{1,s} = 0; s \in S\big\}.$$

Теорема 4. *Зависимость свойств системы собственных вектор-функций оператора $L : H \to H$ от параметров задачи (13), (14) следующая:*

1) *система собственных вектор-функций оператора $L$ минимальна в гильбертовом пространстве $H$;*
2) *система собственных вектор-функций оператора $L$ полна в гильбертовом пространстве $H$ тогда и только тогда, когда множество $G$ пусто;*

3) *система собственных вектор-функций оператора $L$ образует базис в гильбертовом пространстве $H$ тогда и только тогда, когда*
$$0 \notin \bigcup_{s} \bigcup_{m,l=1}^{2} \Gamma_{m,s}^{l}.$$

Пример. Положив в (13) $B = D_x$ при условиях периодичности по $x$, получим оператор $L : H \to H$, порожденный системой уравнений смешанного типа в замкнутой области $V = V_t \times V_x$, $V_t = [-\pi, \pi]$, $V_x = [0, 2\pi]$, при условиях периодичности по $t$ и по $x$, система собственных вектор-функций которого образует базис в $H = L_2(V)$.

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имею.

**Авторская ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

## Библиографический список

1. Дезин А. А. *Общие вопросы теории граничных задач.* М.: Наука, 1980. 208 с.
2. Корниенко Д. В. О спектре задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений // *Дифференц. уравнения*, 2006. Т. 42, № 8. С. 1063–1071.
3. Дезин А. А. *Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач* / Тр. МИАН. Т. 229 / ред. В. С. Владимиров, Е. Ф. Мищенко. М.: Наука, 2000. 176 с.
4. Романко В. К. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // *Докл. АН СССР*, 1986. Т. 286, № 1. С. 47–50.
5. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Part II. Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert space.* Reprint of the 1963 original / Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988. i–x, 859–1923 pp.
6. Моисеев Е. И. О базисности системы синусов и косинусов // *Докл. АН СССР*, 1984. Т. 275, № 4. С. 794–798.
7. Моисеев Е. И. О базисности одной системы синусов // *Дифференц. уравнения*, 1987. Т. 23, № 1. С. 177–179.
8. Моисеев Е. И. *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром.* М.: МГУ, 1988. 150 с.
9. Моисеев Е. И. *Некоторые вопросы спектральной теории уравнений смешанного типа*: Дисс. ... доктора физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1979.
10. Романко В. К. О собственных значениях краевых задач для некоторых уравнений, меняющих тип // *Дифференц. уравнения*, 1983. Т. 19, № 10. С. 1759–1764.
11. Кальменов Т. Ш. *О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов*: Дисс. ... доктора физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1982.
12. Солдатов А. П. Задачи Римана–Гильберта для системы Лаврентьева–Бицадзе в смешанной области с характеристическим участком границы // *Дифференц. уравнения*, 2002. Т. 38, № 12. С. 1653–1663.
13. Kaczmarz S., Steinhaus H. *Theorie der Orthogonalreihen* / Monografie Matematyczne. vol. 6. New York: Chelsea Publ., 1951. viii+296 pp.
14. Д. В. Корниенко Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // *Дифференц. уравнения*, 2006. Т. 42, № 1. С. 91–100.

**Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki**
**[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 611–632**

**MSC: 35P05**

# On a spectral problem for a system of differential equations of mixed type

***D. V. Kornienko***

I. A. Bunin Elets State University,
28, Kommunarov st., Elets, Lipetskaya obl., 399770, Russian Federation.

## Abstract

This article explores the spectral characteristics of the differential operator generated by the boundary problem for linear systems of differential equations of mixed type. The simplest example of a classical system of equations that falls within the field of our consideration, can serve as the system of equations of mixed type:

$$D_t u_1 - \operatorname{sign} D_x u_2 - \varepsilon u_2 = f_1, \quad D_t u_2 + D_x u_1 + \varepsilon u_1 = f_2$$

Elliptic for $t > 0$ and hyperbolic for $t < 0$.

**Keywords:** boundary-value problems, the spectrum of the operator of the system of differential equations, periodic problems, the system of equations of mixed type, basis.

Received: 17th October, 2017 / Revised: 15th December, 2017 / Accepted: 18th December, 2017 / First online: 28th December, 2017

**Competing interests.** I have no competing interests.

**Author's Responsibilities.** I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

**Funding.** The research has not had any funding.

## References

1. Dezin A. A. *Obshchie voprosy teorii granichnykh zadach* [General questions of the theory of boundary value problems]. Moscow, Nauka, 1980, 208 pp. (In Russian)
2. Kornienko D. V. On the spectrum of the Dirichlet problem for systems of operator-differential equations, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 8, pp. 1124–1133. doi: 10.1134/S0012266106080076.

## Research Article

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

**Please cite this article in press as:**
Kornienko D. V. On a spectral problem for a system of differential equations of mixed type, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 611–632. doi: 10.14498/vsgtu1567 (In Russian).

**Author's Details:**
*Dmitriy V. Kornienko* http://orcid.org/0000-0002-3115-194X
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: dmkornienko@mail.ru

3. Dezin A. A. *Differential operator equations. A method of model operators in the theory of boundary value problems*, Tr. Mat. Inst. Steklova, vol. 229, ed. V. S. Vladimirov, E. F. Mishchenko. Moscow, Nauka, 2000, 176 pp. (In Russian)
4. Romanko V. K. Mixed boundary value problems for a system of equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 286, no. 1, pp. 47–50 (In Russian).
5. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Part II. Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert space.* Reprint of the 1963 original, Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1988, i–x, 859–1923 pp.
6. Moiseev E. I. The basis property for systems of sines and cosines, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1984, vol. 275, no. 4, pp. 794–798 (In Russian).
7. Moiseev E. I. On the basis property of a system of sines, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 1, pp. 177–179 (In Russian).
8. Moiseev E. I. *Uravneniia smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom* [Mixed type equations with spectral parameter]. Moscow, Moscow State Univ., 1988, 150 pp. (In Russian)
9. Moiseev E. I. *Some questions in spectral theory of the mixed type equations*, Dr. Phys. & Math. Sci. Thesis. Moscow, Moscow State Univ., 1979 (In Russian).
10. Romanko V. K. Eigenvalues of boundary value problems for certain equations which change type, *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 10, pp. 1759–1764 (In Russian).
11. Kalmenov T. Sh. *Regular boundary-value problems and range for equations of hyperbolic and mixed types*, Dr. Phys. & Math. Sci. Thesis. Moscow, Moscow State Univ., 1982 (In Russian).
12. Soldatov A. P. Riemann–Hilbert problems for the Lavrent'ev–Bitsadze system in a mixed domain with a characteristic part of the boundary, *Differ. Equ.*, 2002, vol. 38, no. 12, pp. 1753–1763. doi: 10.1023/A:1023864230740.
13. Kaczmarz S., Steinhaus H. *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne, vol. 6. New York, Chelsea Publ., 1951, viii+296 pp.
14. Kornienko D. V. On a spectral problem for two hyperbolic systems of equations, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 101–111. doi: 10.1134/S0012266106010083.