



УДК 539.4:620.171.5

Цифровая обработка результатов оптоэлектронных измерений. Метод фотоупругости и его применение для определения коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений

Л. В. Степанова, В. С. Долгих

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Приведены результаты числовой обработки результатов оптоэлектронных измерений, проведенных с помощью метода фотоупругости. Целью экспериментов являлось исследование смешанного деформирования пластины с двумя горизонтальными и наклонными трещинами, проведенных с помощью метода фотоупругости, и построение многопараметрических асимптотических разложений М. Уильямса поля напряжений в окрестности каждой из вершин трещин. Приведен эффективный алгоритм вычисления коэффициентов высших приближений в асимптотических разложениях компонент тензора напряжений. Проведено сравнение коэффициентов с имеющимся точным решением задачи о смешанном нагружении бесконечной изотропной линейно-упругой пластины с двумя коллинеарными трещинами. Показано, что имеющееся точное решение для бесконечной плоскости с разрезами может служить начальным приближением для разработанного алгоритма. В работе приводятся вычисленные значения коэффициентов высших приближений как для пластины с двумя трещинами одинаковой длины, так и для пластины с разрезами различной длины.

Ключевые слова: полное асимптотическое разложение М. Уильямса, механика хрупкого разрушения, метод фотоупругости, поляриционно-оптические методы механики, две коллинеарные трещины.

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Степанова Л. В., Долгих В. С. Цифровая обработка результатов оптоэлектронных измерений. Метод фотоупругости и его применение для определения коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 4. С. 717–735. doi: [10.14498/vsgtu1544](http://doi.org/10.14498/vsgtu1544).

Сведения об авторах

Лариса Валентиновна Степанова <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

доктор физико-математических наук, доцент; профессор; каф. математического моделирования в механике; e-mail: StepanovaLV2015@yandex.ru

Вадим Сергеевич Долгих

аспирант; каф. математического моделирования в механике; e-mail: Vadek13@rambler.ru

Получение: 4 мая 2017 г. / Исправление: 15 ноября 2017 г. /
Принятие: 18 декабря 2017 г. / Публикация онлайн: 24 декабря 2017 г.

Введение. О методе цифровой фотоупругости. В современной фундаментальной механике деформируемого твердого тела, в механике разрушения в частности, и ее промышленных приложениях первоочередной задачей, возникающей в теоретическом анализе, при расчете и конструировании инженерных сооружений, является необходимость учета нелинейностей различного вида и сингулярных особенностей, вызванных частичным разрушением у концентраторов напряжений в виде трещин, острых углов, вырезов и включений. Эти задачи не решаются инженерными методами с помощью обычных нормативных методик и требуют разработки более сложных подходов к их решению с использованием математического аппарата механики разрушения, сложных программных комплексов. Высокоточные экспериментальные методики часто оказываются единственным средством верификации различных теорий механики деформируемого твердого тела и механики разрушения как одной из ее составных частей. Весьма эффективными следует признать экспериментальные поляризационно-оптические методы определения напряжений. Поэтому поляризационно-оптические методы исследования полей напряжений и перемещений в механике деформируемого твердого тела используются как в исследованиях отечественных ученых, так и за рубежом [1–3]. Экспериментальной оценке полей напряжений вблизи острых вырезов и трещин в нашей стране и за рубежом посвящается значительное количество публикаций, среди которых можно отметить исследования [4–8].

В целом можно выделить три основных направления развития интерференционно-оптических методов в современной механике деформируемого твердого тела.

1. Автоматизация обработки данных фотоупругих измерений и компьютерные программы и коды, автоматизирующие получение и обработку экспериментальной информации, полученной с помощью интерференционно-оптических методов (метода фотоупругих измерений) [9–11].
2. Развитие методов обработки цифровых изображений, получаемых из интерференционно-оптических методов (метода фотоупругости) [12–17].
3. Приложения метода фотоупругости к механике разрушения и многопараметрическому описанию полей у вершины трещины; решению контактных задач, приложениям фотоупругости в смежных областях (задачи механики разрушения в биомеханике, медицине) [18–30].

В настоящей работе метод фотоупругости используется для вычисления коэффициентов многопараметрического асимптотического поля напряжений у вершины трещины. В последние годы в механике хрупкого разрушения сложилось четкое и ясное понимание необходимости удержания высших приближений в полном асимптотическом разложении поля напряжений М. Уильямса у вершины трещины [31–35]. В этих работах показано, что чем больше расстояние от кончика трещины, тем больше слагаемых необходимо удерживать в асимптотическом представлении М. Уильямса поля напряжений.

Целью работы [33] являлось описание полей напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины и на ее удалении в ряде эксперименталь-

ных образцов для определения параметров механики разрушения. В статье предложены образцы с новой геометрией, позволяющей рассмотреть широкий диапазон видов нагружения и оценить размеры областей нелинейного деформирования, возникающих у вершины трещины. Предложены надрезанные образцы призматической формы для испытаний на четырехточечный изгиб. Наряду с проведенными экспериментальными исследованиями выполнено численное моделирование этих же образцов. В асимптотических разложениях поля напряжений удерживались сингулярное слагаемое, T -напряжение и высшие приближения (несингулярные слагаемые). В статье выполнено сравнение экспериментальных результатов, численного анализа и предложенных асимптотических разложений в зависимости от расстояния до кончика трещины и от количества удерживаемых слагаемых в асимптотических разложениях.

В [34] представлен анализ полей напряжений и перемещений у вершины трещины в образцах с краевой трещиной, предназначенных для испытаний на расклинивание. В англоязычной литературе такие образцы носят название WST-образцов. Выполнен многопараметрический анализ поля напряжений, для чего в полном асимптотическом разложении М. Уильямса удерживались несингулярные слагаемые. Изучено влияние краевых условий (условий закрепления образца) на коэффициент интенсивности напряжений и на T -напряжения. В целом проведенный анализ позволяет учесть до 12 слагаемых в асимптотическом разложении. Коэффициенты высших приближений асимптотических разложений определялись из экспериментальных данных. С помощью определенных коэффициентов асимптотических разложений было реконструировано поле напряжений и далее выполнялось сравнение с вычислениями, базирующимися на методе конечного элемента. Проведенное сравнение ясно показывает, что для длинных трещин и для больших расстояний от вершины трещины аккуратное описание поля напряжений требует удержания нескольких слагаемых в полном асимптотическом разложении поля напряжений у вершины трещины.

В [35] получены аналитические выражения для амплитудных коэффициентов полного асимптотического разложения поля напряжений у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине, находящейся в трех условиях: чистое растяжение; чистый поперечный сдвиг; смешанное нагружение. Показано, что наряду с главным членом асимптотического разложения и T -напряжением высшие приближения в полном асимптотическом разложении являются важными параметрами механики разрушения, учет которых необходим для аккуратной оценки полей напряжений в окрестности вершины дефекта и, следовательно, для аккуратной оценки несущей способности и долговечности образца. Аналитические выражения коэффициентов асимптотического разложения поля напряжений для любого наперед заданного числа удерживаемых слагаемых доступны лишь для пластины с одной трещиной конечной длины, поэтому важно расширить класс образцов, для которых имеются аналитические зависимости амплитудных множителей от приложенной нагрузки и геометрических параметров образца. Полученное в работе асимптотическое решение для бесконечной пластины с двумя трещинами равной длины может быть использовано в следующих случаях:

- 1) для проверки численной обработки экспериментальных данных, полученных с помощью поляризационно-оптических методов механики деформируемого твердого тела для образцов с трещинами;
- 2) для проверки численных алгоритмов, активно разрабатываемых в настоящее время для вычисления амплитудных коэффициентов многопараметрического поля напряжений.

Особенно важное значение высших приближений в полном асимптотическом разложении М. Уильямса приобретает при обработке экспериментальной информации вне зависимости от метода исследования полей у вершины трещины. Это остается справедливым как для классического метода фотоупругости, так и для новой техники, вошедшей в употребление — метода корреляции цифровых изображений. Поэтому в настоящей работе с помощью метода фотоупругости наряду с коэффициентами интенсивности напряжений и T -напряжениями определены коэффициенты высших приближений асимптотических разложений поля напряжений у вершины трещины в пластине с двумя коллинеарными трещинами одинаковой и различной длины.

1. Экспериментальная процедура и экспериментальное определение полей напряжений у вершины трещины методом фотоупругости. В настоящей работе была проведена серия экспериментов с помощью метода фотоупругости на проекционно-поляризационной установке ППУ-7 на различных образцах с трещинами: пластины с двумя коллинеарными горизонтальными и наклонными трещинами одинаковой и различной длины. Образцы были изготовлены из эпоксидной смолы ЭД20.

Образцы с трещинами различной конфигурации испытывались при разной амплитуде нагружения. На рис. 1 изображены картины изохроматических полос в пластинах с двумя коллинеарными трещинами одинаковой длины, находящихся под действием растягивающей нагрузки в 120, 125, 145 и 175 кг.

На рис. 2 показаны картины изохроматических полос в пластинах с двумя коллинеарными трещинами различной длины.

Интерференционная картина изохроматических полос с наклонными трещинами показана на рис. 3. Образец с наклонной трещиной является удобной моделью для экспериментального изучения смешанного нагружения, когда присутствуют обе моды нагружения.

Следует отметить, что корректная интерпретация интерференционных картин, получаемых при просвечивании в поляроскопе, вызывает значительные сложности. В настоящей работы полученные картины изохроматических полос будут использованы для определения коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершин двух трещин в линейно-упругой пластине (рис. 2).

Для определения цены изохроматической полосы (оптической постоянной материала) f_s использовался диск из того же материала (эпоксидная смола ЭД20), нагруженный поочередно силами 60, 70, 120, 140, 180 и 210 кг. Первый шаг любого экспериментального исследования с помощью метода фотоупругости предполагает определение оптической константы материала. Процесс определения цены изохроматической полосы (оптической константы материала) называют тарировкой. Для каждого шага нагружения фиксируется порядок полосы и приложенная нагрузка. Проводится измерение диаметра

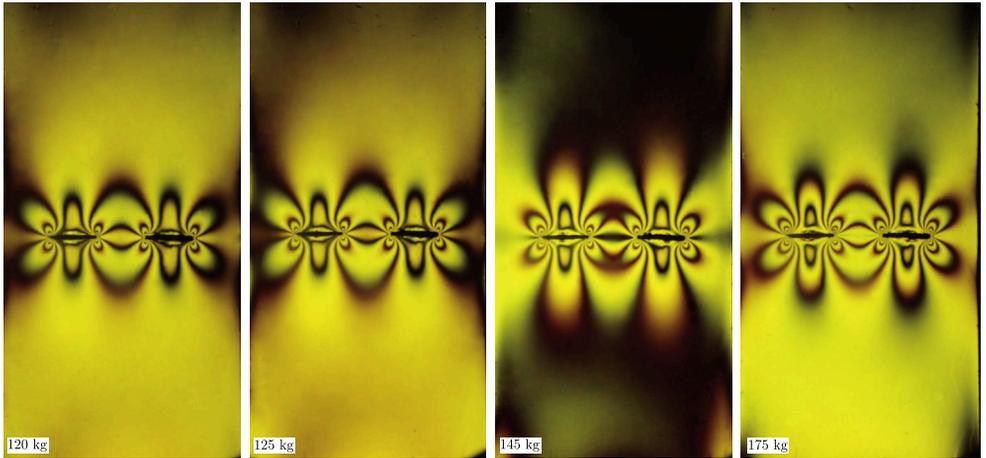


Рис. 1. Картина изохроматических полос в пластинах с двумя коллинеарными трещинами одинаковой длины [Figure 1. Isochromatic fringes for plates with two collinear cracks of equal lengths]

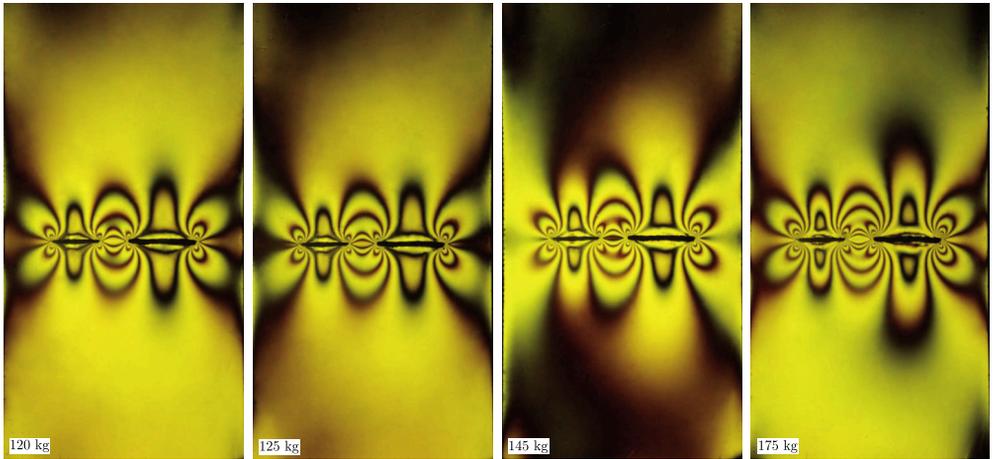


Рис. 2. Картина изохроматических полос в пластинах с двумя коллинеарными трещинами различной длины [Figure 2. Isochromatic fringes for plates with two collinear cracks of different lengths]

и толщины диска, а также поиск координат точки, лежащей на выбранной изохроматической полосе. Качественная связь между порядком полос и разностью главных напряжений устанавливается по следующей формуле [1, 2], представляющей собой математическое выражение закона Вертгейма [1]:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = N f_s / h, \quad (1)$$

где N — порядок полосы, h — толщина образца, а σ_1, σ_2 — главные напряжения. Отсюда следует, что f_s выражает значение разности главных напряжений при заданном номере изохроматической полосы и толщине образца. Это значение и называют ценой полосы материала. Определение значения f_s для данного материала осуществляется из экспериментов на образцах, для которых известно теоретическое решение и напряжения могут быть вычислены. Для определения f_s были проведены эксперименты на сжатие кругового дис-

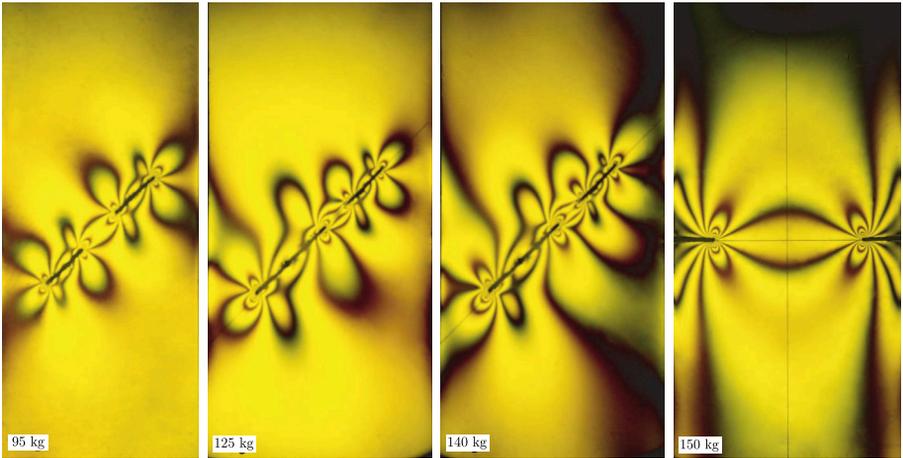


Рис. 3. Картины изохроматических полос в пластинах с двумя наклонными трещинами и пластине с двумя боковыми надрезами [Figures 3. Isochromatic fringes for plates with two inclined cracks of equal lengths and two edge cracks]

ка парой сосредоточенных сил, направленных строго в вертикальной плоскости при условии, что начало координат совпадает с центром диска радиуса R . Для выбранной полосы порядка N , которая проходит через точку $(x_1, 0)$ диаметра диска, совпадающего с горизонтальным направлением оси абсцисс заданной системы координат, и для нагружения силами P , при просвечивании диска монохроматическим светом будет иметь место формула

$$f_s = |\sigma_{22} - \sigma_{11}|h/N,$$

так как в точках диаметра, совпадающего с осью абсцисс, напряжения σ_{11} и σ_{22} — главные. Вычисленное значение оптической константы для рассматриваемого материала — $f_\sigma = 18.23$ кг/см.

2. Многопараметрическое разложение М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины. Асимптотическое разложение поля напряжений в окрестности вершины трещины в изотропном линейно упругом материале имеет вид

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_k^{m,ij}(\theta) r^{k/2-1},$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; r, θ — полярные координаты с полюсом в вершине трещины; индекс m отвечает моде нагружения: нормальному отрыву соответствует значение $m = 1$, а поперечному сдвигу — $m = 2$; a_k^m — амплитудные (масштабные) множители, зависящие от системы приложенных сил и геометрии испытываемого образца; $f_k^{m,ij}(\theta)$ — угловые распределения компонент тензора напряжений, определяемые в ходе решения краевых задач [36]:

$$f_k^{1,11}(\theta) = k [(2 + k/2 + (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta] / 2,$$

$$f_k^{1,22}(\theta) = k [(2 - k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta] / 2,$$

$$f_k^{1,12}(\theta) = k [-(k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta] / 2,$$

$$\begin{aligned}
 f_k^{2,11}(\theta) &= -k \left[(2 + k/2 - (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\
 f_k^{2,22}(\theta) &= -k \left[(2 - k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\
 f_k^{2,12}(\theta) &= k \left[-(k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta \right] / 2.
 \end{aligned}$$

Поле перемещений в окрестности вершины трещины может быть представлено в форме [37, 38]:

$$u_i(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu} a_k^m \tilde{u}_k^{m,i}(\theta) r^{k/2},$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_k^{1,1}(\theta) &= (\varkappa + k/2 + (-1)^k) \cos(\theta/2) - (k/2) \cos(k/2 - 2)\theta, \\
 \tilde{u}_k^{1,2}(\theta) &= (\varkappa - k/2 - (-1)^k) \sin(\theta/2) + (k/2) \sin(k/2 - 2)\theta, \\
 \tilde{u}_k^{2,1}(\theta) &= -(\varkappa + k/2 - (-1)^k) \sin(\theta/2) + (k/2) \sin(k/2 - 2)\theta, \\
 \tilde{u}_k^{2,2}(\theta) &= (\varkappa - k/2 + (-1)^k) \cos(\theta/2) + (k/2) \cos(k/2 - 2)\theta,
 \end{aligned}$$

\varkappa — константа плоской задачи теории упругости ($\varkappa = 3 - 4\nu$ для случая плоского деформированного состояния, $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния); $\mu = E/(2(1 + \nu))$ — модуль сдвига; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

Для каждого образца с трещиной и системы нагрузок существует своя система коэффициентов (масштабных, амплитудных) множителей a_m^k . В большинстве инженерных приложений в асимптотическом разложении М. Уильямса удерживается только первый или первые два слагаемых, коэффициенты при которых носят название коэффициентов интенсивности напряжений и T -напряжения:

$$K_I = \sqrt{2\pi} a_1^1 f_{1,22}^{(1)}(0), \quad K_{II} = \sqrt{2\pi} a_1^2 f_{2,12}^{(1)}(0), \quad T = a_2^1 f_{1,11}^{(2)}(0).$$

Однако в последние годы в механике хрупкого разрушения сложилось ясное понимание необходимости удержания высших приближения в асимптотическом разложении М. Уильямса [31–41]. В этих работах отмечается потребность развития методов и подходов, позволяющих получать аналитические зависимости коэффициентов от геометрии образца и системы приложенных нагрузок, и, следовательно, расширить таблицы, содержащие найденные оценки для коэффициентов интенсивности напряжений для различных образцов, выражениями для коэффициентов высших приближений. Численные значения коэффициентов многопараметрических разложений могут быть найдены с помощью компьютерного имитационного моделирования в пакетах, реализующих метод конечного элемента. Однако значение наличия коэффициентов высших приближений, определенных экспериментально, сложно переоценить. Поэтому в настоящей работе с помощью основного закона фотоупругости и серии экспериментов определены коэффициенты высших приближений полного асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершин двух трещин в пластине с двумя коллинеарными трещинами.

Создан и отлажен комплекс программ для анализа и численной обработки всей совокупности экспериментальной информации. В первой программе данные фотоупругих измерений собраны для выбранного количества точек в исследуемом образце. Алгоритм программы базируется на том факте, что каждый пиксель фотографии имеет значение интенсивности в диапазоне от 0 до 255. Поэтому пиксель, соответствующий значению 0, на фотографии изображается черным цветом, а пиксель со значением 255 изображается белым цветом. Следовательно, пиксели с более низкими значениями интенсивности отвечают более темному цвету. Созданная программа используется для определения значений интенсивности точек, лежащих внутри изохроматических полос. Эта процедура выполняется несколько раз для различных линий в радиальных направлениях. В результате определяется наиболее темная точка каждой изохромы. Вычисленные координаты этих наиболее темных точек используются как входные данные для работы второй программы. Программы объединены в единый комплекс, позволяющий определить поля напряжений в исследуемом образце. В алгоритме реализована возможность учета высших членов в асимптотическом решении задачи (в полном решении М. Уильямса) и применения высших приближений в оптико-механическом законе. Для определения коэффициентов высших приближений был использован переопределенный метод, суть которого описана ниже.

Если в асимптотическом разложении М. Уильямса удерживать K слагаемых, отвечающих нормальному отрыву, и M слагаемых, отвечающих поперечному сдвигу, то оптико-механический закон (1) примет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{Nf\sigma}{h}\right)^2 &= \frac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2 = \\ &= \left[\sum_{k=1}^K a_k^1 r^{k/2-1} f_{1,11}^{(k)}(\theta) + \sum_{k=1}^M a_k^2 r^{k/2-1} f_{2,11}^{(k)}(\theta) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^K a_k^1 r^{k/2-1} f_{1,22}^{(k)}(\theta) - \sum_{k=1}^M a_k^2 r^{k/2-1} f_{2,22}^{(k)}(\theta) \right]^2 + \\ &\quad + \left[\sum_{k=1}^K a_k^1 r^{k/2-1} f_{1,12}^{(k)}(\theta) + \sum_{k=1}^M a_k^2 r^{k/2-1} f_{2,12}^{(k)}(\theta) \right]^2. \quad (2) \end{aligned}$$

Таким образом, получена система $K + M$ нелинейных алгебраических уравнений относительно масштабных (амплитудных) множителей $a_1^1, a_2^1, \dots, a_K^1$ и $a_1^2, a_2^2, \dots, a_M^2$. Решение сформулированной системы нелинейных алгебраических уравнений представляет самостоятельный интерес. Для решения системы уравнений (2) был использован переопределенный метод [39], широко применяемый в настоящее время [40–42].

В соответствии с переопределенным методом в рассмотрение вводится функция

$$g_m = \left\{ \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right\}_m^2 + (\sigma_{12})_m^2 - \left\{ \frac{N_m f \sigma}{h} \right\}^2.$$

Очевидно, что если для масштабных множителей $a_k^1, a_2^1, \dots, a_K^1$ и $a_1^2, a_2^2, \dots, a_M^2$ выбраны некоторые начальные приближения, то, в общем случае, введенная

функция g_m не будет обращаться в нуль, поскольку априори амплитудные множители неизвестны. Для уточнения значений масштабных множителей $a_k^1, a_2^1, \dots, a_K^1$ и $a_1^2, a_2^2, \dots, a_M^2$ в рамках переопределенного метода вводится итерационная процедура, основанная на разложении функции g_m в ряд Тейлора. Разложение функции g_m в ряд Тейлора имеет вид

$$(g_m)_{i+1} = (g_m)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_1^1}(\Delta a_1^1)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_2^1}(\Delta a_2^1)_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_K^1}(\Delta a_K^1)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_1^2}(\Delta a_1^2)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_2^2}(\Delta a_2^2)_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_M^2}(\Delta a_M^2)_i, \quad (3)$$

где i — номер итерации; разности между амплитудными множителями $(\Delta a_1^1)_i, (\Delta a_2^1)_i, \dots, (\Delta a_K^1)_i, (\Delta a_1^2)_i, (\Delta a_2^2)_i, \dots, (\Delta a_M^2)_i$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} (\Delta a_k^1)_i &= a_{k(i+1)}^1 - a_{k(i)}^1, \quad k = 1, 2, \dots, K; \\ (\Delta a_m^2)_i &= a_{m(i+1)}^2 - a_{m(i)}^2, \quad m = 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

Уточненные значения масштабных множителей a_1^1, \dots, a_K^1 и a_1^2, \dots, a_M^2 определяются таким образом, чтобы

$$(g_m)_{i+1} = 0,$$

и в силу этого уравнение (3) приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -(g_m)_i &= \frac{\partial g_m}{\partial a_1^1}(\Delta a_1^1)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_2^1}(\Delta a_2^1)_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_K^1}(\Delta a_K^1)_i + \\ &+ \frac{\partial g_m}{\partial a_1^2}(\Delta a_1^2)_i + \frac{\partial g_m}{\partial a_2^2}(\Delta a_2^2)_i + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial a_M^2}(\Delta a_M^2)_i. \quad (4) \end{aligned}$$

Разрешая полученную систему линейных алгебраических уравнений (4), можно получить новые уточненные значения масштабных множителей $a_k^1, a_2^1, \dots, a_K^1$ и $a_1^2, a_2^2, \dots, a_M^2$. Следует отметить, что в ходе вычислений легко найти все частные производные, фигурирующие в системе (4):

$$\frac{\partial g_m}{\partial a_N^1} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})_m \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_N^1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_N^1} \right)_m + 2 \left(\sigma_{12} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_N^1} \right)_m.$$

Частные производные компонент тензора напряжений по амплитудным множителям вычисляются по формулам

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_k^1} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_k^1} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_k^1} \end{array} \right\} = \frac{k}{2} r^{\frac{k-2}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \left[2 + (-1)^k + \frac{k}{2} \right] \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta - \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \\ \left[2 - (-1)^k - \frac{k}{2} \right] \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \\ - \left[(-1)^k + \frac{k}{2} \right] \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \end{array} \right\}$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_k^2} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_k^2} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_k^2} \end{array} \right\} = -\frac{k}{2} r^{\frac{k-2}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \left[2 - (-1)^k + \frac{k}{2} \right] \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta - \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \\ \left[2 + (-1)^k - \frac{k}{2} \right] \sin\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \\ - \left[(-1)^k - \frac{k}{2} \right] \cos\left(\frac{k}{2} - 1\right)\theta + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{k}{2} - 3\right)\theta \end{array} \right\}.$$

Итерационная процедура завершается при выполнении принятого критерия сходимости расчета. На практике применялись два критерия. Первый критерий основан на оценке значений разности между амплитудными множителями на i -той и $i + 1$ -й итерациями. Итерационный процесс завершается, если выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^K (\Delta a_k^1)_i^2 + \sum_{m=1}^M (\Delta a_m^2)_i^2 < 10^{-6}, \quad (5)$$

Проведенные вычисления показали, что если в качестве нулевого приближения в рассматриваемом алгоритме используются значения амплитудных множителей, вычисленные с помощью аналитического решения для бесконечной пластины, ослабленной двумя коллинеарными трещинами, то итерационный процесс быстро сходится и достаточно всего 8–10 итераций для выполнения условия (5). Выбранные начальные приближения для масштабных множителей a_k^m позволяют найти коэффициенты высших слагаемых в асимптотическом разложении М. Уильямса.

Второй критерий [39] основан на дополнительной оценке порядка изохроматической полосы N^l , где $l = 1, 2, \dots, L$; L — общее количество анализируемых изохроматических полос. Новые уточненные значения масштабных множителей используются для вычисления порядка изохроматической полосы на каждой итерации N_{theory}^l и сравниваются с экспериментально определенным порядком изохроматической полосы N_{exp}^l . Итерационный процесс завершается, если выполнен критерий

$$\frac{1}{Q} \sum_{l=1}^L |N_{\text{theory}}^l - N_{\text{exp}}^l| \leq 10^{-6},$$

где Q — общее количество экспериментальных точек.

3. Результаты вычислений. Принимая в качестве начального приближения для масштабных множителей — коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса a_k^m точное аналитическое решение задачи о деформировании бесконечной пластины с двумя коллинеарными трещинами [35], можно получить экспериментально определенные значения амплитудных множителей. Результаты вычислений сведены в таблицу. Принятые обозначения и размеры приведены на рис. 4.

На рис. 5 синим цветом показаны выбранные экспериментальные точки на изохроматических полосах с номерами $N = 2$ и $N = 3$. Красным цветом показаны построенные с помощью вычисленных коэффициентов линии

k	$z = a$	$z = c$	$z = b$	$z = d$	Коэффициенты $\tilde{a}_k^1 = a_k^1/\sigma_{22}^\infty$ ($\text{cm}^{-(k+2)/2}$) полного асимптотического разложения М. Уильямса для вершины трещины z [Coefficients $\tilde{a}_k^1 = a_k^1/\sigma_{22}^\infty$ ($\text{cm}^{-(k+2)/2}$) of the asymptotic Williams' series expansion in the vicinity of the crack tip z
1	0.5139	0.52398	0.52397	0.56275	
2	-0.250	-0.2500	-0.250	-0.2500	
3	0.2512	0.27936	0.2512	0.31993	
5	-0.0646	-0.04384	-0.0646	-0.02563	
7	0.0330	0.04700	0.0330	0.06089	
9	-0.0208	-0.00820	-0.0208	-0.00065	
11	0.0145	0.00234	0.0145	0.00299	
13	-0.0109	-0.00279	-0.0109	-0.00117	
15	0.0086	0.001468	0.0086	0.001853	
17	-0.0069	-0.00126	-0.0069	0.00122	
19	0.0058	0.01027	0.0058	0.01286	
21	-0.0049	-0.00068	-0.0049	0.00106	
23	0.00426	0.00769	0.00426	0.00958	
25	-0.0037	-0.00041	-0.0037	0.00901	
27	0.0033	0.00603	0.0033	0.00749	
29	-0.0029	-0.00027	-0.0029	0.00766	
31	0.0026	0.00489	0.0026	0.00060	
33	-0.0024	-0.00018	-0.0024	0.00065	
35	0.0022	0.00407	0.0022	0.00504	
37	-0.0020	-0.00013	-0.0020	0.00057	
39	0.0018	0.000345	0.0018	0.00027	
41	-0.0017	-0.00009	-0.0017	0.00050	
43	0.0016	0.00298	0.0016	0.00368	
45	-0.0015	-0.00007	-0.0015	0.00044	
47	0.0014	0.00260	0.0014	0.00321	

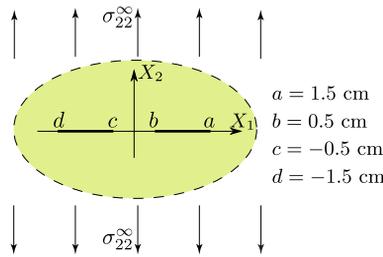


Рис. 4. Схематичное изображение образца и приложенной нагрузки
[Figure 4. Schematic view of cracked specimen and the load applied]

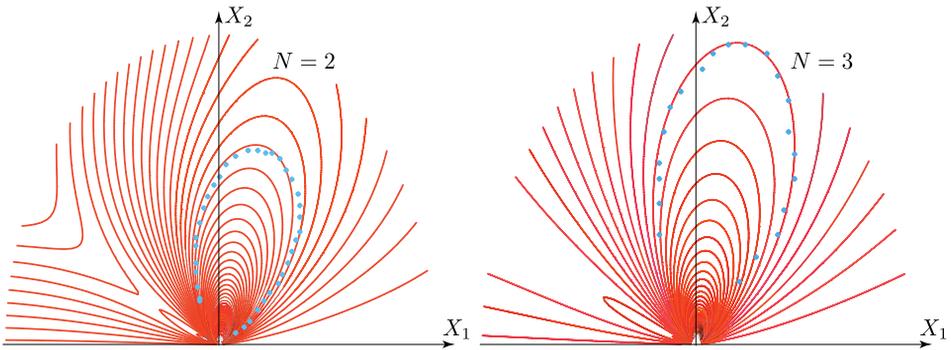


Рис. 5. Экспериментальные точки и теоретически построенные картины изохроматических полос (онлайн в цвете) [Figure 5. Experimental points and theoretically reconstructed isochromatic fringe pattern (color online)]

равных значений интенсивности напряжений. Сравнение экспериментальных и теоретических изохроматических полос показывает, что полосы проходят ровно через экспериментальные точки.

На рис. 6 показаны теоретически реконструированные изохроматические полосы, построенные у вершины трещины нормального отрыва с помощью двучленного асимптотического разложения интенсивности напряжений (слева), с помощью пятичленного разложения интенсивности напряжений (в центре) и девятичленного асимптотического разложения интенсивности напряжений (справа). Видно, что построенные картины полностью воспроизводят экспериментально полученные интерференционные картины (рис. 1). Из рис. 1 видно, что многопараметрическое асимптотическое разложение М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины приводит к более аккуратному описанию поля напряжений.

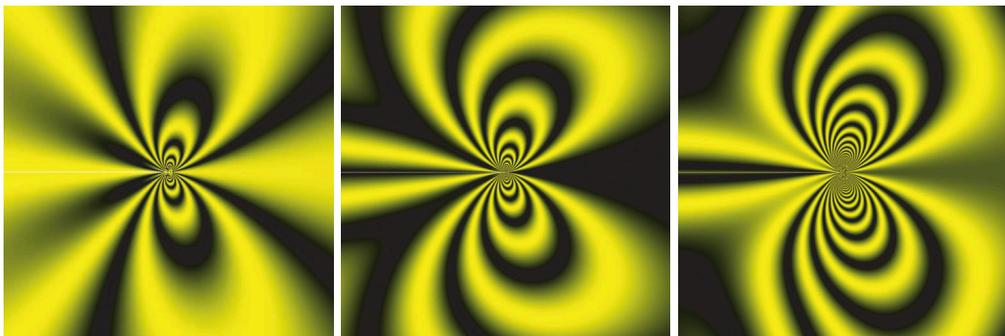


Рис. 6. Теоретически построенные картины изохроматических полос
[Figure 6. Theoretically reconstructed isochromatic fringe pattern]

Выводы. В работе выполнена серия экспериментов на смешанное нагружение оптически чувствительных образцов с трещинами, надрезами и угловыми вырезами с помощью интерференционно-оптического метода механики деформируемого твердого тела — метода фотоупругости. В результате проведенных экспериментов получены картины интерференционных полос: изохром и изоклин для образцов с двумя горизонтальными и наклонными коллинеарными трещинами одинаковой и различных длин. Выбранные типы образцов на смешанное нагружение позволяют эффективно исследовать смешанное деформирование образцов и моделировать смешанное нагружение образца с трещиной или угловым вырезом для всего диапазона значений параметра смешанности нагружения

$$M^e = \frac{2}{\pi} \arctg \left| \frac{\sigma_{22}(r, \theta)}{\sigma_{12}(r, \theta)} \right|_{\theta=0},$$

характеризующего вид нагружения: параметр смешанности нагружения изменяется от 0 (что отвечает поперечному сдвигу) до 1 (что соответствует трещине нормального отрыва). Дана интерпретация изохроматических полос для каждого типа образца. Проведена цифровая обработка результатов интерференционно-оптического метода (метода фотоупругости).

В работе впервые экспериментально определены коэффициенты высших приближений полного асимптотического разложения М. Уильямса поля на-

пряжений в окрестности вершины трещины в пластине с двумя коллинеарными трещинами. С помощью основного закона фотоупругости получена система уравнений относительно коэффициентов разложения М. Уильямса. Данная система линеаризована и решена относительно коэффициентов асимптотического разложения, в котором удерживаются высшие приближения.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16–08–00571_a).

Библиографический список

1. Разумовский И. А. *Интерференционно-оптические методы механики деформируемого твердого тела*. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. 240 с.
2. Албаут Г.Н. *Нелинейная фотоупругость в приложениях к задачам механики разрушения*. Новосибирск: ИГАСУ, 2002. 112 с.
3. Hendry A. W., Neal B. G. *Elements of Experimental Stress Analysis: Structures and Solid Body Mechanics Division*. New York: Pergamon Press, 2013.
4. Ayatollahi M. E., Nejati M. Experimental evaluation of stress field around the sharp notches using photoelasticity // *Materials and Design*, 2011. vol. 32, no. 2. pp. 561–569. doi: [10.1016/j.matdes.2010.08.024](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2010.08.024).
5. Freddi A., Olmi G., Cristofolini L. *Experimental Stress Analysis for Materials and Structures. Stress Analysis Models for Developing Design Methodologies* / Springer Series in Solid and Structural Mechanics. vol. 4. Switzerland: Springer International Publ., 2015. xxii+498 pp. doi: [10.1007/978-3-319-06086-6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-06086-6).
6. Briñez J. C., Martinez A. R., Branch J. W. Computational hybrid phase shifting technique applied to digital photoelasticity // *Optik — International Journal for Light and Electron Optics*, 2018. vol. 157. pp. 287–297. doi: [10.1016/j.ijleo.2017.11.060](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2017.11.060).
7. Patil P., Vyasarayani C. P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity // *Optics and Lasers in Engineering*, 2017. vol. 93. pp. 182–194. doi: [10.1016/j.optlaseng.2017.02.003](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.02.003).
8. Yang J., Zhangyu R., Li W., Lingtao M., Chiang Fu-Pen Photoelastic method to quantitatively visualise the evolution of whole-field stress in 3D printed models subject to continuous loading processes // *Optic and Lasers in Engineering*, 2018. vol. 100. pp. 248–258. doi: [10.1016/j.optlaseng.2017.09.004](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.09.004).
9. Shang W., Ji X., Yang X. Study on several problems of automatic full-field isoclinic parameter measurement by digital phase shifting photoelasticity // *Optik – International Journal for Light and Electron Optics*, 2015. vol. 126, no. 19. pp. 1981–1985. doi: [10.1016/j.ijleo.2015.05.053](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2015.05.053).
10. Frankovsky P., Ostertag O., Ostertegova E. Automation of experiments in photoelasticity // *Procedia Engineering*, 2012. vol. 48. pp. 153–157. doi: [10.1016/j.proeng.2012.09.499](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.09.499).
11. Lei Z., Jun H., Kang Y. Automatic evaluation of photoelastic fringe constant by the nonlinear least-squares method // *Optics and Laser Technology*, 2009. vol. 41, no. 8. pp. 985–989. doi: [10.1016/j.optlastec.2009.04.010](https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2009.04.010).
12. Ajovalasit A., Petrucci G., Scafidì M. Review of RGB photoelasticity // *Optics and Lasers in Engineering*, 2015. vol. 68. pp. 58–73. doi: [10.1016/j.optlaseng.2014.12.008](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2014.12.008).

13. Swain D., Thomas B., Philip J., Pillai S. A. Novel calibration and color adaptation scheme in three-fringe RGB photoelasticity // *Optics and Lasers in Engineering*, 2015. vol. 66. pp. 320–329. doi: [10.1016/j.optlaseng.2014.10.007](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2014.10.007).
14. Ramesh K., Vivek R., Dore P. T., Sanyal D. A simple approach to photoelastic calibration of glass using digital photoelasticity // *Journal of Non-Crystalline Solids*, 2013. vol. 378. pp. 7–14. doi: [10.1016/j.jnoncrsol.2013.06.004](https://doi.org/10.1016/j.jnoncrsol.2013.06.004).
15. Ramji M., Prasath R. G. R. Sensitivity of isoclinic data using various phase shifting techniques in digital photoelasticity towards generalized error sources // *Optics and Lasers in Engineering*, 2011. vol. 49, no. 9–10. pp. 1153–1167. doi: [10.1016/j.optlaseng.2011.05.007](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2011.05.007).
16. Zhang Y.-T., Huang M.-J., Liang H.-R., Lao F.-Y. Branch cutting algorithm for unwrapping photoelastic phase map with isotropic point // *Optic and Lasers in Engineering*, 2012. vol. 50, no. 5. pp. 619–631. doi: [10.1016/j.optlaseng.2011.10.013](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2011.10.013).
17. Zhang R., Guo R., Cheng H. Numerical-experimental hybrid method for stress separation in digital gradient sensing method // *Optic and Lasers in Engineering*, 2015. vol. 66. pp. 122–127. doi: [10.1016/j.optlaseng.2014.08.017](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2014.08.017).
18. Khaleghian S., Emami A., Tehrani M., Soltani N. Analysis of effective parameters for stress intensity factors in the contact problem between an asymmetric wedge and a half-plane using an experimental method of photoelasticity // *Materials and Design*, 2013. vol. 43. pp. 447–453. doi: [10.1016/j.matdes.2012.07.038](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2012.07.038).
19. Ayatollahi M. R., Dehghani M., Mirsayar M. M. A comprehensive photoelastic study for mode I sharp V-notches // *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2013. vol. 37. pp. 216–230. doi: [10.1016/j.euromechsol.2012.07.001](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2012.07.001).
20. Guagliano M., Sangirardia M., Sciuccati A., Zakeri M. Multiparameter Analysis Of The Stress Field Around A Crack Tip // *Procedia Engineering*, 2011. vol. 10. pp. 2931–2936. doi: [10.1016/j.proeng.2011.04.486](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.04.486).
21. Ayatollahi M. R., Sedighiani K. A T -stress controlled specimen for mixed mode fracture experiments on brittle materials // *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2012. vol. 36. pp. 83–93. doi: [10.1016/j.euromechsol.2012.02.008](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2012.02.008).
22. James M. N., Christopher C. J., Janivei L., Patterson E. A. Local crack plasticity and its influence on the global elastic stress field // *International Journal of Fatigue*, 2013. vol. 46. pp. 4–15. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2012.04.015](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2012.04.015).
23. Surendra K. V. N., Simha K. R. Y. Design and analysis of novel compression fracture specimen with constant form factor: Edge cracked semicircular disk (ECSD) // *Engineering Fracture Mechanics*, 2013. vol. 102. pp. 235–248. doi: [0.1016/j.engfracmech.2013.02.014](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2013.02.014).
24. Ezrin M. Failure Analysis and Test Procedures / *Plastic Failure Guide* (Second Edition). Munich: Carl Hanser Verlag, 2013. pp. 321–394. doi: [10.3139/9783446428829.007](https://doi.org/10.3139/9783446428829.007).
25. Hacıan R., Bilek A., Larbi S., Said D. Photoelastic and numerical analysis of a sphere/plan contact problem // *Procedia Engineering*, 2015. vol. 144. pp. 277–283. doi: [10.1016/j.proeng.2015.08.069](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.08.069).
26. Sui T., Lunt A. J. G., Baipas N., Sandholzer M. A., Hu J., Dolbnya I. P., Landini G., Korsunsky A. M. Hierarchical modelling of in situ elastic deformation of human enamel based on photoelastic and diffraction analysis of stresses and strains // *Acta Biomaterialia*, 2014. vol. 10, no. 1. pp. 343–354. doi: [10.1016/j.actbio.2013.09.043](https://doi.org/10.1016/j.actbio.2013.09.043).
27. Raghuvanshi N. K., Patey A. Mesh stiffness measurement of cracked spur gear by photoelasticity technique // *Measurements*, 2015. vol. 73. pp. 439–452. doi: [10.1016/j.measurement.2015.05.035](https://doi.org/10.1016/j.measurement.2015.05.035).
28. Takacs I. A., Botean A. I., Hardau M., Chindris S. Displacement-stress distribution in a femoral bone by optical methods // *Procedia Technology*, 2015. vol. 19. pp. 901–908. doi: [10.1016/j.protcy.2015.02.129](https://doi.org/10.1016/j.protcy.2015.02.129).
29. Rodrigues D. C., Moreira Falci S. G., Lauria A., Marchiori É. C., Fernandes Moreira R. W. Mechanical and photoelastic analysis of four different fixation methods for mandibular body fractures // *Journal of Cranio-Maxillofacial Surgery*, 2015. vol. 43, no. 3. pp. 306–311. doi: [10.1016/j.jcms.2014.11.021](https://doi.org/10.1016/j.jcms.2014.11.021).

30. Misseroni L. D., Dal Corso F., Shahzad S., Bigoni D. Stress concentration near stiff inclusions: Validation of rigid inclusion model and boundary layers by means of photoelasticity // *Engineering Fracture Mechanics*, 2014. vol. 121–122. pp. 87–97. doi: [10.1016/j.engfracmech.2014.03.004](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.03.004).
31. Степанова Л. В., Росляков П. С. Полное асимптотическое разложение М. Уильямса у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2015. № 4. С. 188–225. doi: [10.15593/perm.mech/2015.4.12](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.4.12).
32. Stepanova L., Roslyakov P. Complete Williams asymptotic expansion of the stress field near the crack tip: Analytical solutions, interference–optic methods and numerical experiments // *AIP Conference Proceedings*, 2016. vol. 1785, 030029. doi: [10.1063/1.4967050](https://doi.org/10.1063/1.4967050).
33. Veselý V., Frantík P., Sobek J., Malíková, Seitl S. Multi-parameter crack tip stress state description for evaluation of nonlinear zone width in silicate composite specimens in component splitting/bending test geometry // *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 2015. vol. 38, no. 2. pp. 200–214. doi: [10.1111/ffe.12170](https://doi.org/10.1111/ffe.12170).
34. Veselý V., Sobek J., Šestáková L., Frantík P., Seitl S. Multi-parametric crack tip stress state description for estimation of fracture process zone extent in silicate composite WST specimens // *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2013. vol. 25. pp. 69–78. doi: [10.3221/IGF-ESIS.25.11](https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.25.11).
35. Stepanova L., Roslyakov P. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytical determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*, 2016. vol. 100–101. pp. 11–28. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032).
36. Hello G., Tahar M. B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*, 2012. vol. 49, no. 3–4. pp. 556–566. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024).
37. Karihaloo B. L., Xiao Q. Z. Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a notched three-point bend beam // *International Journal of Fracture*, 2011. vol. 112, no. 2. pp. 111–128. doi: [10.1023/A:1013392324585](https://doi.org/10.1023/A:1013392324585).
38. Karihaloo B. L., Abdalla H. M., Xiao Q. Z. Coefficients of the crack tip asymptotic field for wedge splitting specimens // *Engineering Fracture Mechanics*, 2003. vol. 70, no. 17. pp. 2407–2420. doi: [10.1016/S0013-7944\(03\)00005-5](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00005-5).
39. Ramesh K., Gupta M., Kelkar A. A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity—Revisited // *Engineering Fracture Mechanics*, 1997. vol. 56, no. 1. pp. 25–41, 43–45. doi: [10.1016/S0013-7944\(96\)00098-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7).
40. Gupta M., Alderliesten R. C., Benedictus R. A review of T -stress and its effects in fracture mechanics // *Engineering Fracture Mechanics*, 2015. vol. 134. pp. 218–241. doi: [10.1016/j.engfracmech.2014.10.013](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013).
41. Stepanova L., Roslyakov P., Gerasimova T. Complete Williams asymptotic expansion near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane // *Solid State Phenomena*, 2017. vol. 258. pp. 209–212. doi: [10.4028/www.scientific.net/SSP.258.209](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.258.209).
42. Surendra K. V. N., Simha K. R. Y. Digital image analysis around isotropic points for photoelastic pattern recognition // *Optic Engineering*, 2015. vol. 54, no. 8. pp. 57–64. doi: [10.1117/1.OE.54.8.081209](https://doi.org/10.1117/1.OE.54.8.081209).

MSC: 74B10, 74G70, 74R10

Digital processing of the results of optoelectronic measurements. The photoelasticity method and its application for determination of coefficients of the multiparameter asymptotic Williams expansion of the stress field

L. V. Stepanova, V. S. Dolgikh

Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

The study is aimed at experimental and computational determination of the coefficients in crack tip asymptotic expansions for a wide class of specimens under mixed mode loading conditions. Multiparametric presentation of the stress field near the crack tips for a wide class of specimens is given. Theoretical, experimental and computational results obtained in this research show that the isochromatic fringes in the vicinity of the crack tip require to keep the higher order stress terms in the asymptotic expansion of the stress field around the crack tip since the contribution of the higher order stress terms (besides the stress intensity factors and the T -stress) is not negligible in the crack tip stress field. One can see that the higher – order terms of the asymptotic expansion are important when the stress distribution has to be known also farther from the crack tip and it is necessary to extend the domain of validity of the Williams solution. It is shown that at large distances from the crack tips the effect of the higher order terms of the Williams series expansion becomes more considerable. The knowledge of more terms of the stress asymptotic expansions will allow us to approximate the stress field near the crack tips with high accuracy.

Keywords: complete Williams series expansion of the stress field, fracture mechanics, photoelasticity method, two collinear cracks.

Received: 4th May, 2017 / Revised: 15th November, 2017 /

Accepted: 18th December, 2017 / First online: 24th December, 2017

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Stepanova L. V., Dolgikh V. S. Digital processing of the results of optoelectronic measurements. The photoelasticity method and its application for determination of coefficients of the multiparameter asymptotic Williams expansion of the stress field, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 717–735. doi: [10.14498/vsgtu1544](https://doi.org/10.14498/vsgtu1544) (In Russian).

Authors' Details:

Larisa V. Stepanova  <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Dept. Mathematical Modelling in Mechanics;
e-mail: StepanovaLV2015@yandex.ru

Vadim S. Dolgich

Postgraduate Student; Dept. of Dept. Mathematical Modelling in Mechanics;
e-mail: Vadek13@rambler.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interests with the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-08-00571_a).

References

1. Razumovsky I. A. *Interference-Optical Methods of Solid Mechanics*, Foundations of Engineering Mechanics. New York, Springer, 2011, xiii+180 pp. doi: [10.1007/978-3-642-11222-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-11222-5).
2. Albaut G.N. *Nelineinaiia fotouprugost' v prilozhenii k zadacham mekhaniki razrusheniia* [Nonlinear photoelasticity in application of fracture mechanics problems]. Novosibirsk, Novosibirsk State University of architecture and Civil Engineering, 2002, 112 pp. (In Russian)
3. Hendry A. W., Neal B. G. *Elements of Experimental Stress Analysis: Structures and Solid Body Mechanics Division*. New York, Pergamon Press, 2013.
4. Ayatollahi M. E., Nejati M. Experimental evaluation of stress field around the sharp notches using photoelasticity, *Materials and Design*, 2011, vol. 32, no. 2, pp. 561–569. doi: [10.1016/j.matdes.2010.08.024](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2010.08.024).
5. Freddi A., Olmi G., Cristofolini L. *Experimental Stress Analysis for Materials and Structures. Stress Analysis Models for Developing Design Methodologies*, Springer Series in Solid and Structural Mechanics, vol. 4. Switzerland, Springer International Publ., 2015, xxii+498 pp. doi: [10.1007/978-3-319-06086-6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-06086-6).
6. Briñez J. C., Martinez A. R., Branch J. W. Computational hybrid phase shifting technique applied to digital photoelasticity, *Optik — International Journal for Light and Electron Optics*, 2018, vol. 157, pp. 287–297. doi: [10.1016/j.ijleo.2017.11.060](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2017.11.060).
7. Patil P., Vyasrayani C. P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity, *Optics and Lasers in Engineering*, 2017, vol. 93, pp. 182–194. doi: [10.1016/j.optlaseng.2017.02.003](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.02.003).
8. Yang J., Zhangyu R., Li W., Lingtao M., Chiang Fu-Pen Photoelastic method to quantitatively visualise the evolution of whole-field stress in 3D printed models subject to continuous loading processes, *Optic and Lasers in Engineering*, 2018, vol. 100, pp. 248–258. doi: [10.1016/j.optlaseng.2017.09.004](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.09.004).
9. Shang W., Ji X., Yang X. Study on several problems of automatic full-field isoclinic parameter measurement by digital phase shifting photoelasticity, *Optik – International Journal for Light and Electron Optics*, 2015, vol. 126, no. 19, pp. 1981–1985. doi: [10.1016/j.ijleo.2015.05.053](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2015.05.053).
10. Frankovsky P., Ostertag O., Ostertegova E. Automation of experiments in photoelasticity, *Procedia Engineering*, 2012, vol. 48, pp. 153–157. doi: [10.1016/j.proeng.2012.09.499](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.09.499).
11. Lei Z., Jun H., Kang Y. Automatic evaluation of photoelastic fringe constant by the non-linear least-squares method, *Optics and Laser Technology*, 2009, vol. 41, no. 8, pp. 985–989. doi: [10.1016/j.optlastec.2009.04.010](https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2009.04.010).
12. Ajovalasit A., Petrucci G., Scafidi M. Review of RGB photoelasticity, *Optics and Lasers in Engineering*, 2015, vol. 68, pp. 58–73. doi: [10.1016/j.optlaseng.2014.12.008](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2014.12.008).
13. Swain D., Thomas B., Philip J., Pillai S. A. Novel calibration and color adaptation scheme in three-fringe RGB photoelasticity, *Optics and Lasers in Engineering*, 2015, vol. 66, pp. 320–329. doi: [10.1016/j.optlaseng.2014.10.007](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2014.10.007).

14. Ramesh K., Vivek R., Dore P. T., Sanyal D. A simple approach to photoelastic calibration of glass using digital photoelasticity, *Journal of Non-Crystalline Solids*, 2013, vol. 378, pp. 7–14. doi: [10.1016/j.jnoncrysol.2013.06.004](https://doi.org/10.1016/j.jnoncrysol.2013.06.004).
15. Ramji M., Prasath R. G. R. Sensitivity of isoclinic data using various phase shifting techniques in digital photoelasticity towards generalized error sources, *Optics and Lasers in Engineering*, 2011, vol. 49, no. 9–10, pp. 1153–1167. doi: [10.1016/j.optlaseng.2011.05.007](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2011.05.007).
16. Zhang Y.-T., Huang M.-J., Liang H.-R., Lao F.-Y. Branch cutting algorithm for unwrapping photoelastic phase map with isotropic point, *Optic and Lasers in Engineering*, 2012, vol. 50, no. 5, pp. 619–631. doi: [10.1016/j.optlaseng.2011.10.013](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2011.10.013).
17. Zhang R., Guo R., Cheng H. Numerical-experimental hybrid method for stress separation in digital gradient sensing method, *Optic and Lasers in Engineering*, 2015, vol. 66, pp. 122–127. doi: [10.1016/j.optlaseng.2014.08.017](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2014.08.017).
18. Khaleghian S., Emami A., Tehrani M., Soltani N. Analysis of effective parameters for stress intensity factors in the contact problem between an asymmetric wedge and a half-plane using an experimental method of photoelasticity, *Materials and Design*, 2013, vol. 43, pp. 447–453. doi: [10.1016/j.matdes.2012.07.038](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2012.07.038).
19. Ayatollahi M. R., Dehghany M., Mirsayar M. M. A comprehensive photoelastic study for mode I sharp V-notches, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2013, vol. 37, pp. 216–230. doi: [10.1016/j.euromechsol.2012.07.001](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2012.07.001).
20. Guagliano M., Sangirardia M., Sciuccati A., Zakeri M. Multiparameter Analysis Of The Stress Field Around A Crack Tip, *Procedia Engineering*, 2011, vol. 10, pp. 2931–2936. doi: [10.1016/j.proeng.2011.04.486](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.04.486).
21. Ayatollahi M. R., Sedighiani K. A *T*-stress controlled specimen for mixed mode fracture experiments on brittle materials, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2012, vol. 36, pp. 83–93. doi: [10.1016/j.euromechsol.2012.02.008](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2012.02.008).
22. James M. N., Christopher C. J., Janivei L., Patterson E. A. Local crack plasticity and its influence on the global elastic stress field, *International Journal of Fatigue*, 2013, vol. 46, pp. 4–15. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2012.04.015](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2012.04.015).
23. Surendra K. V. N., Simha K. R. Y. Design and analysis of novel compression fracture specimen with constant form factor: Edge cracked semicircular disk (ECS D), *Engineering Fracture Mechanics*, 2013, vol. 102, pp. 235–248. doi: [10.1016/j.engfracmech.2013.02.014](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2013.02.014).
24. Ezrin M. Failure Analysis and Test Procedures, In: *Plastic Failure Guide* (Second Edition). Munich, Carl Hanser Verlag, 2013, pp. 321–394. doi: [10.3139/9783446428829.007](https://doi.org/10.3139/9783446428829.007).
25. Haciañ R., Bilek A., Larbi S., Said D. Photoelastic and numerical analysis of a sphere/plan contact problem, *Procedia Engineering*, 2015, vol. 144, pp. 277–283. doi: [10.1016/j.proeng.2015.08.069](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.08.069).
26. Sui T., Lunt A. J. G., Baipas N., Sandholzer M. A., Hu J., Dolbnya I. P., Landini G., Korsunsky A. M. Hierarchical modelling of in situ elastic deformation of human enamel based on photoelastic and diffraction analysis of stresses and strains, *Acta Biomaterialia*, 2014, vol. 10, no. 1, pp. 343–354. doi: [10.1016/j.actbio.2013.09.043](https://doi.org/10.1016/j.actbio.2013.09.043).
27. Raghuvanshi N. K., Patey A. Mesh stiffness measurement of cracked spur gear by photoelasticity technique, *Measurements*, 2015, vol. 73, pp. 439–452. doi: [10.1016/j.measurement.2015.05.035](https://doi.org/10.1016/j.measurement.2015.05.035).
28. Takacs I. A., Botean A. I., Hardau M., Chindris S. Displacement-stress distribution in a femoral bone by optical methods, *Procedia Technology*, 2015, vol. 19, pp. 901–908. doi: [10.1016/j.protcy.2015.02.129](https://doi.org/10.1016/j.protcy.2015.02.129).
29. Rodrigues D. C., Moreira Falci S. G., Lauria A., Marchiori É. C., Fernandes Moreira R. W. Mechanical and photoelastic analysis of four different fixation methods for mandibular body fractures, *Journal of Cranio-Maxillofacial Surgery*, 2015, vol. 43, no. 3, pp. 306–311. doi: [10.1016/j.jcms.2014.11.021](https://doi.org/10.1016/j.jcms.2014.11.021).
30. Misseroni L. D., Dal Corso F., Shahzad S., Bigoni D. Stress concentration near stiff inclusions: Validation of rigid inclusion model and boundary layers by means of photoelasticity, *Engineering Fracture Mechanics*, 2014, vol. 121–122, pp. 87–97. doi: [10.1016/j.engfracmech.2014.03.004](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.03.004).

31. Stepanova L. V., Roslyakov P. S. Complete asymptotic expansion m. williams near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane medium, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 4, pp. 188–225 (In Russian). doi: [10.15593/perm.mech/2015.4.12](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.4.12).
32. Stepanova L., Roslyakov P. Complete Williams asymptotic expansion of the stress field near the crack tip: Analytical solutions, interference–optic methods and numerical experiments, *AIP Conference Proceedings*, 2016, vol. 1785, 030029. doi: [10.1063/1.4967050](https://doi.org/10.1063/1.4967050).
33. Veselý V., Frantík P., Sobek J., Malíková, Seitl S. Multi-parameter crack tip stress state description for evaluation of nonlinear zone width in silicate composite specimens in component splitting/bending test geometry, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 2015, vol. 38, no. 2, pp. 200–214. doi: [10.1111/ffe.12170](https://doi.org/10.1111/ffe.12170).
34. Veselý V., Sobek J., Šestáková L., Frantík P., Seitl S. Multi-parametric crack tip stress state description for estimation of fracture process zone extent in silicate composite WST specimens, *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2013, vol. 25, pp. 69–78. doi: [10.3221/IGF-ESIS.25.11](https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.25.11).
35. Stepanova L., Roslyakov P. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium, *International Journal of Solids and Structures*, 2016, vol. 100–101, pp. 11–28. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032).
36. Hello G., Tahar M. B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium, *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, no. 3–4, pp. 556–566. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024).
37. Karihaloo B. L., Xiao Q. Z. Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a notched three-point bend beam, *International Journal of Fracture*, 2011, vol. 112, no. 2, pp. 111–128. doi: [10.1023/A:1013392324585](https://doi.org/10.1023/A:1013392324585).
38. Karihaloo B. L., Abdalla H. M., Xiao Q. Z. Coefficients of the crack tip asymptotic field for wedge splitting specimens, *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, vol. 70, no. 17, pp. 2407–2420. doi: [10.1016/S0013-7944\(03\)00005-5](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00005-5).
39. Ramesh K., Gupta M., Kelkar A. A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity—Revisited, *Engineering Fracture Mechanics*, 1997, vol. 56, no. 1, pp. 25–41, 43–45. doi: [10.1016/S0013-7944\(96\)00098-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7).
40. Gupta M., Alderliesten R. C., Benedictus R. A review of T -stress and its effects in fracture mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, vol. 134, pp. 218–241. doi: [10.1016/j.engfracmech.2014.10.013](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013).
41. Stepanova L., Roslyakov P., Gerasimova T. Complete Williams asymptotic expansion near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane, *Solid State Phenomena*, 2017, vol. 258, pp. 209–212. doi: [10.4028/www.scientific.net/SSP.258.209](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.258.209).
42. Surendra K. V. N., Simha K. R. Y. Digital image analysis around isotropic points for photoelastic pattern recognition, *Optic Engineering*, 2015, vol. 54, no. 8, pp. 57–64. doi: [10.1117/1.OE.54.8.081209](https://doi.org/10.1117/1.OE.54.8.081209).