



# Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК 517.958:532.51

## Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование полей температуры и давления

*Н. В. Бурмашева*<sup>1,2</sup>, *Е. Ю. Просвиряков*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19.

<sup>2</sup> Институт машиноведения УрО РАН, Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

### Аннотация

Изучается новое точное решение переопределенной системы уравнений Обербека—Буссинеска, которое описывает стационарное сдвиговое течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном слое. Приведенное точное решение является обобщением класса Остроумова—Бириха для слоистого однонаправленного потока. В предложенном решении горизонтальные скорости зависят только от поперечной координаты  $z$ . Поле температуры и поле давления являются трехмерными. В отличие от решения Остроумова—Бириха, в представленном в статье решении горизонтальные градиенты температуры являются линейными функциями от координаты  $z$ . Такая структура точного решения позволяет найти нетривиальное решение уравнений Обербека—Буссинеска посредством тождественного равенства нулю уравнения несжимаемости. Данное точное решение пригодно для исследования крупномасштабных течений вязкой несжимаемой жидкости квазидвумерными уравнениями.

### Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование полей температуры и давления // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 4. С. 736–751. doi: [10.14498/vsgtu1568](https://doi.org/10.14498/vsgtu1568).

### Сведения об авторах

*Наталья Владимировна Бурмашева*  <http://orcid.org/0000-0003-4711-1894>

кандидат технических наук; доцент; институт математики и компьютерных наук, каф. прикладной математики и механики<sup>1</sup>; научный сотрудник; сектор нелинейной вихревой гидродинамики<sup>2</sup>; e-mail: [nat\\_burm@mail.ru](mailto:nat_burm@mail.ru)

*Евгений Юрьевич Просвиряков*  <http://orcid.org/0000-0002-2349-7801>

доктор физико-математических наук; заведующий сектором; сектор нелинейной вихревой гидродинамики<sup>2</sup>; e-mail: [evgen\\_pros@mail.ru](mailto:evgen_pros@mail.ru)

Конвективное движение жидкости обусловлено заданием касательных напряжений на свободной границе слоя. Неоднородные тепловые источники заданы на обеих границах. Давление в жидкости на верхней границе совпадает с атмосферным давлением. В статье основное внимание уделяется исследованию полей температуры и давления, которые описываются многочленами трех переменных. Детально обсуждаются особенности распределения профилей температуры и давления, которые являются многочленами седьмой и восьмой степени соответственно. Для анализа свойств температуры и давления используются алгебраические методы для исследования числа корней на отрезке. Показано, что фоновая температура и фоновое давление являются немонотонными функциями. Температурное поле расслаивается на зоны, которые формируют термоклин и тепловой пограничный слой около границ слоя жидкости. Исследование свойств поля давления показали, что оно расслаивается на одну, две или три зоны относительно отсчетного значения (атмосферного давления).

**Ключевые слова:** система Обербека–Буссинеска, сдвиговое течение, конвекция, точное решение, полиномиальное решение, локализация корней, термоклин, расслоение полей.

Получение: 17 октября 2017 г. / Исправление: 15 декабря 2017 г. /  
Принятие: 18 декабря 2017 г. / Публикация онлайн: 29 декабря 2017 г.

**Введение.** Изучение конвективных течений вязкой несжимаемой жидкости является одной из главных проблем при описании природных явлений и конструировании технических устройств. Нелинейность процессов перемешивания, протекающих в жидкости или газе, требует повышенного внимания к методам, позволяющим изучить распределение гидродинамических полей в расчетной области. Понятно, что для описания потоков несжимаемых сред необходимо иметь определенный запас точных решений уравнений движения.

При описании неизотермических течений вязкой несжимаемой жидкости в условиях нормальной гравитации наибольшее распространение получила конвекция, описываемая уравнениями Обербека–Буссинеска [1–3]. Несмотря на приближенность уравнений Обербека–Буссинеска, в которых пренебрегают сжимаемостью вязкой жидкости, они очень сложно поддаются аналитическому исследованию.

Первый класс точных решений был предложен Г. А. Остроумовым [4] и Р. В. Бирихом [5]. Характерной особенностью семейства точных решений Остроумова–Бириха является равенство нулю вертикальной скорости и одной из горизонтальных скоростей. Таким образом, точное решение Остроумова–Бириха описывает однонаправленное конвективное течение  $(V_x; 0; 0)$  вязкой несжимаемой жидкости. Данное точное решение было получено повторно независимо от представителей пермской гидродинамической школы в статьях [6, 7].

К настоящему времени течение Остроумова–Бириха многократно обобщалось, использовалось при решении задач устойчивости и для описания гидрологических и технологических процессов [8–18]. Другим направлением, обобщающим класс течений типа Остроумова–Бириха, является представление поля скоростей суперпозицией однонаправленных горизонтальных течений. В этом случае слоистое движение жидкости  $(V_x; V_y; 0)$  имеет сдвиговый

характер [19–33]. Понятно, что указанное обобщение оказалось востребованным для решения задач геофизической гидродинамики. О новых свойствах конвективных течений вращающейся вязкой несжимаемой жидкости можно узнать из библиографических источников [34–37].

Точные решения типа Бириха—Остроумова и их модификации оказались эффективными для описания противотечений в вязкой несжимаемой жидкости. Известно, что при крупномасштабных течениях несжимаемых сред противотечения в жидкости могут иметь термическое происхождение, обусловленное нелинейным взаимодействием жидких частиц [10–17, 20–27, 29, 30, 34, 38]. Для моделирования геофизических течений вязкой несжимаемой жидкости в качестве граничных условий задаются касательные напряжения на границе атмосферы и океана. Очевидно, что тангенциальные силы могут быть вызваны различными факторами. Существенную роль играет и термокапиллярный эффект, влияние которого на противотечение было изучено в статьях [22–24, 29, 30].

Обобщение результатов, анонсированных в [22–24, 29, 30], осуществлено в статье [25]. Было показано, что поле скоростей может иметь две застойные точки, что является принципиальным отличием от слоистой конвекции Марангони. Учитывая нахождение новых физических эффектов при учете касательных напряжений при течении жидкости в бесконечном слое, в данной статье достаточно подробно изучаются поля температуры и давления.

**1. Постановка задачи.** Система уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска [2] в случае стационарных сдвиговых течений  $(V_x; V_y; 0)$  принимает вид

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta V_x, \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V_y, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= g\beta T, \\ V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \chi \Delta T, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $P(x, y, z)$  — отклонение давления от гидростатического, деленное на постоянную среднюю плотность  $\rho$  жидкости;  $T(x, y, z)$  — отклонение от отсчетного значения температуры;  $\nu, \chi$  — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости соответственно;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа.

Система (1) переопределена, поскольку из пяти уравнений в частных производных необходимо вычислить четыре функции. В [25–30, 34] показано, что эта система разрешима в классе

$$V_x = u(z), \quad V_y = v(z). \tag{2}$$

Поле скоростей (2) тождественно удовлетворяет уравнению несжимаемости системы (1), что позволяет исключить «лишнее» уравнение.

Поля давления и температуры в этом случае линейны по горизонтальным (продольным) координатам  $x$  и  $y$ :

$$T = T_0(z) + T_1(z)x + T_2(z)y, \quad P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y. \quad (3)$$

Подстановка разложения (2), (3) в первое уравнение системы (1) приводит к уравнению

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x}(P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y) + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(z).$$

Совершая очевидные преобразования и пользуясь методом неопределенных коэффициентов, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее баланс вязких сил и градиента давления

$$\nu u'' = P_1.$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по координате  $z$ .

Аналогичным образом система уравнений тепловой конвекции может быть приведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} T_1'' &= 0, & T_2'' &= 0, \\ P_1' &= g\beta T_1, & P_2' &= g\beta T_2, \\ \nu u'' &= P_1, & \nu v'' &= P_2, \\ \chi T_0'' &= uT_1 + vT_2, \\ P_0' &= g\beta T_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Более подробно получение системы (4) изложено в [25]. Система уравнений (4) имеет общее решение, которое является полиномиальным [21–29].

Далее сформулируем граничные условия, определяющие конвективное течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном слое. Полагаем, что нижняя граница бесконечного слоя жидкости является абсолютно твердой и неподвижной, а верхняя — свободной. Будем считать, что свободная поверхность является недеформируемой.

В качестве краевых условий рассмотрим следующие граничные возмущения полей скорости, температуры и давления [25]:

- на нижней термоизолированной ( $T(x, y, 0) = 0$ ) границе ( $z = 0$ ) слоя жидкости выполняется условие прилипания:

$$V_x(0) = V_y(0) = 0;$$

- на верхней границе ( $z = h$ ) действует постоянное давление

$$P(x, y, h) = S,$$

а температура задается линейной функцией (нагрев или охлаждение)

$$T(x, y, h) = \vartheta + Cx + Dy;$$

– кроме того, на свободной поверхности  $z = h$  заданы касательные напряжения

$$\eta \frac{dV_x}{dz} = \xi_1, \quad \eta \frac{dV_y}{dz} = \xi_2.$$

Учитывая структуру класса точных решений (2), (3), сформулированные выше граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u(0) &= v(0) = 0, \\ T_0(0) &= 0, \quad T_1(0) = 0, \quad T_2(0) = 0, \\ T_0(h) &= \vartheta, \quad T_1(h) = C, \quad T_2(h) = D, \\ P_0(h) &= S, \quad P_1(h) = 0, \quad P_2(h) = 0, \\ \eta \frac{du}{dz}(h) &= \xi_1, \quad \eta \frac{dv}{dz}(h) = \xi_2. \end{aligned}$$

Без ограничения общности полагаем  $S = 0$ . Другими словами, будем вести отсчет приведенного давления от уровня, задаваемого на верхней границе слоя жидкости.

**2. Решение системы уравнений.** Интегрирование системы (4) в силу краевых условий дает точное решение [25]:

$$T_1 = C \frac{z}{h}, \quad T_2 = D \frac{z}{h},$$

$$\begin{aligned} T_0(z) &= \frac{z(-h^3(C\xi_1 + D\xi_2) + 12\chi\eta\vartheta + (C\xi_1 + D\xi_2)z^3)}{12\chi\eta h} + \\ &+ \frac{CDg\beta z(-16h^6 + 21h^2z^4 - 5z^6)}{840\chi h^2\nu}, \end{aligned}$$

$$P_1 = g\beta C \frac{z^2 - h^2}{2h}, \quad P_2 = g\beta D \frac{z^2 - h^2}{2h},$$

$$\begin{aligned} P_0(z) &= \frac{\beta g [(C\xi_1 + D\xi_2)(3h^5 - 5h^3z^2 + 2z^5) - 60\chi\eta\vartheta(h^2 - z^2)]}{120\chi\eta h} + \\ &+ \frac{\beta^2 CDg^2(41h^8 - 64h^6z^2 + 28h^2z^6 - 5z^8)}{6720\chi h^2\nu}. \end{aligned}$$

Далее решение, описывающее температуру  $T$  и давление  $P$ , будем рассматривать в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} T_1 &= Z, \quad T_2 = KZ, \\ T_0 &= Z(Z^3 - 1)\alpha + Z\gamma + \frac{\delta\text{Pe}}{840}Z(-16 + 21Z^4 - 5Z^6), \\ P_1 &= (Z^2 - 1)\frac{\delta}{2}, \quad P_2 = K(Z^2 - 1)\frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

$$P_0 = \frac{(\xi_1 + K\xi_2)h^4}{120\chi\eta l^2} (3 - 5Z^2 + 2Z^5) + \frac{\vartheta}{Cl} \frac{\delta}{2} (Z^2 - 1) + \frac{g\beta Dh^6}{6720\chi\nu l^2} (41 - 64Z^2 + 28Z^6 - 5Z^8).$$

Здесь  $K = D/C$ ,  $\delta = h/l$ ,  $Pe = Pr Gr$  — число Пекле,  $Pr = \nu/\chi$  — число Прандтля,  $Gr = Dhg\beta h^3/\nu^2$  — число Грасгофа,  $h$  — толщина слоя жидкости,  $l$  — характерный размер вдоль горизонтальных координат. В формулах для безразмерных точных решений сохранены обозначения такие же, как и для размерных полей температуры и давления. Отметим, что коэффициенты  $\frac{\delta Pe}{840}$ ,  $\frac{(\xi_1 + K\xi_2)h^4}{120\chi\eta l^2}$ ,  $\frac{\vartheta\delta}{2Cl}$ ,  $\frac{g\beta Dh^6}{6720\chi\nu l^2} = \frac{\delta^2 Gr Pr}{6720}$ , стоящие в разложении функции  $T_0$  и  $P_0$ , являются безразмерными. Процедура перехода к безразмерным гидродинамическим полям подробно изложена в работах [25–28].

**3. Исследование стратификации температурного поля.** Поскольку поле температуры  $T$  является полиномиальным, следовательно, непрерывным, то исследование его структуры можно свести к изучению нулей функции  $T_0$ . Многочлен  $T_0$  в силу граничных условий можно представить в мультипликативном виде:

$$T_0(Z) = \frac{\delta Pe}{840} Z f(Z),$$

где

$$f(Z) = aZ^3 - 5Z^6 + 21Z^4 - 16 + b, \quad a = \frac{840\alpha}{\delta Pe}, \quad b = \frac{840\gamma}{\delta Pe} - a. \quad (5)$$

Заметим, что  $f(0) = b - 16$ ,  $f(1) = a + b$ .

Поскольку введенная выше переменная  $Z$  определена на отрезке  $[0, 1]$ , для определения количества нулей многочлена  $f(Z)$  можно воспользоваться теоремой Декарта [39]. Согласно этой теореме, число положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами равно количеству перемен знаков в ряду его коэффициентов или на четное число меньше этого количества.

Представим многочлен  $f(Z)$  в стандартном виде

$$f(Z) = -5Z^6 + 21Z^4 + aZ^3 + (b - 16)$$

и посчитаем число перемен знаков в получившемся ряду коэффициентов  $\{-5; 21; a; (b - 16)\}$ , которое зависит от значений параметров  $a$  и  $b$ . Несложно убедиться, что перемен знаков (следовательно, и число положительных корней многочлена  $f(Z)$ ) может быть равно 1, 2 или 3. И, следовательно, число положительных корней многочлена  $f(Z)$  может быть равно 0, 1, 2 или 3. Таким образом, на положительной полуоси ( $Z > 0$ ) у функции  $T_0$  может быть не более трех нулевых значений. Данное условие является необходимым для существования стратификации температурного поля относительно поперечной координаты  $Z$ .

Для того чтобы получить достаточное условие для оценки числа нулей многочлена  $f(Z)$  на интервале  $(0, 1)$ , исследуем функцию  $f(Z)$  на наличие

экстремумов. Очевидно, что внутри интервала  $(0, 1)$  их не более трех. Известно, что число экстремумов функции одной переменной определяется числом нулей ее производной:

$$f'(Z) = -30Z^5 + 84Z^3 + 3aZ^2 = Z^2 (-30Z^3 + 84Z + 3a).$$

Здесь в выражении для  $f'(Z)$  в круглых скобках стоит полином третьей степени, следовательно, число его действительных нулей не превосходит трех. При исследовании многочлена на экстремум в зависимости от значений параметров возможны различные случаи. Если у функции  $f$  нет экстремумов на интервале  $(0, 1)$  (строго монотонна), то все определяется значениями функции на концах отрезка  $[0, 1]$ :

- если  $f(0)f(1) \geq 0$ , то расслоений не возникает;
- если  $f(0)f(1) < 0$ , то имеет место одна точка расслоения.

Аналогичным образом могут быть проанализированы ситуации, когда у функции  $f(Z)$  есть один, два или три экстремума. Как отмечено выше, число экстремумов функции определяется числом нулей ее производной:

$$f'(Z) = -30Z^5 + 84Z^3 + 3aZ^2 = 3Z^2(-10Z^3 + 28Z + a) = 0;$$

$$Z = 0 \quad \text{или} \quad 10Z^3 - 28Z - a = 0.$$

Если при некоторых условиях на  $a$  последнее соотношение выполняется хотя бы в одной точке на интервале  $(0, 1)$ , то у функции  $f$  на интервале  $(0, 1)$  есть экстремумы (столько, сколько точек, в которых выполняется условие  $10Z^3 - 28Z - a = 0$ ), иначе функция  $f$  на этом интервале строго монотонна.

Рассмотрим семейство функций  $g_a(Z) = 10Z^3 - 28Z - a$  и обозначим через  $g(Z)$  функцию этого семейства при  $a = 0$ . Все функции семейства  $g_a(Z)$  имеют на интервале  $(0, 1)$  единственный экстремум в точке  $Z_{\text{extr}} = \sqrt{14/15}$ . Зная число экстремумов функций семейства  $g_a(Z)$ , можно, согласно приведенным выше рассуждениям, определить число нулей функций  $g_a(Z)$  на интервале  $(0, 1)$ . А каждый такой нуль есть суть экстремум функции  $f(Z)$  на этом интервале:

- если  $a < g(Z_{\text{extr}}) = -\frac{56}{3}\sqrt{\frac{14}{15}}$ , то  $g_a(Z) \neq 0$  на интервале  $(0, 1)$ , а функция  $f(Z)$  — строго монотонна на интервале  $(0, 1)$ ;
- если  $a = g(Z_{\text{extr}})$ , то  $g_a(Z)$  обращается в нуль в единственной точке, а функция  $f(Z)$  в этой точке имеет экстремум;
- если  $g(Z_{\text{extr}}) < a < g(1) = -18$ , то  $g_a(Z)$  имеет 2 нуля на интервале  $(0, 1)$ , а  $f(Z)$  в этих двух точках имеет экстремумы;
- если  $g(1) \leq a \leq g(0) = 0$ , то  $g_a(Z)$  обращается в нуль в единственной точке, а  $f(Z)$  в этой точке имеет экстремум;
- если  $g(0) < a$ , то  $g_a(Z) \neq 0$  на интервале  $(0, 1)$ , а функция  $f(Z)$  — строго монотонна на интервале  $(0, 1)$ .

Теперь, зная число экстремумов у функции  $f(Z)$ , можно выписать условия, при которых эта функция имеет нули на интервале  $(0, 1)$ . Эти нули, в свою очередь, определяют точки расслоения фоновой температуры. В качестве наглядной иллюстрации на рис. 1 приведены ситуации, соответствующие различным значениям параметров  $a$  и  $b$ , при которых функция температуры допускает различное число расслоений.

**4. Исследование расслоений для поля давления.** Исследуем теперь расслоение поля давления. Поле давления  $P$  перепишем в виде

$$P(Z) = \frac{\delta^2 \text{Pe}}{6720}(Z-1)q(Z),$$

где

$$\begin{aligned} q(Z) &= -5Z^7 - 5Z^6 + 23Z^5 + 23Z^4 + 23Z^2 - 41Z - 41 + \\ &\quad + \phi(2Z^4 + 2Z^3 + 2Z^2 - 3Z - 3) + \psi(Z+1) = \\ &= -5Z^7 - 5Z^6 + 23Z^5 + (23+2\phi)Z^4 + (23+2\phi)Z^3 + \\ &\quad + (23+2\phi)Z^2 + (-41+\psi-3\phi)Z + (-41+\psi-3\phi), \\ \phi &= \frac{672\alpha}{\text{Pe}}, \quad \psi = \frac{3360\gamma}{\delta \text{Pe}}. \end{aligned}$$

Согласно теореме Декарта [39], число нулей полинома  $q(Z)$  не превосходит трех, так как именно столько перемен знаков может быть в этом ряду при различных сочетаниях значений выражений  $(23+2\phi)$  и  $(-41+\psi-3\phi)$ .

На рис. 2 представлено геометрическое место точек, в которых функция  $q(Z)$  обращается в нуль. Получившаяся поверхность седловая. На рис. 3 представлено поведение функций  $q_1(Z) = -5Z^7 - 5Z^6 + 23Z^5$ ,  $q_2(Z) = Z^4 + Z^3 + Z^2$ ,  $q_3(Z) = Z + 1$ , входящих в состав функции  $q(Z)$ :

$$q(Z) = q_1(Z) + (23+2\phi)q_2(Z) + (-41+\psi-3\phi)q_3(Z).$$

Отметим, что все три функции положительны и строго возрастают на отрезке  $[0, 1]$ . Поэтому выражения  $(3+2\phi)$  и  $(-41+\psi-3\phi)$  не могут быть одновременно положительными, иначе у функции  $q(Z)$  на интересующем отрезке не будет нулей (она будет строго положительна).

На рис. 4 приведены различные случаи распределения фонового давления. Каждая из приведенных кривых иллюстрирует локализацию давления на верхней и нижней границах. Давление заметно отличается от гидростатического, что говорит о стратификации поля давления, обусловленной нелинейными механизмами переноса импульса в жидкости при конвективном перемешивании.

**Заключение.** В статье получено новое точное решение уравнений Обербека—Буссинеска, описывающее конвективное сдвиговое течение вязкой несжимаемой жидкости. Конвекция в жидкости индуцируется заданием теплового источника и касательных напряжений на верхней (свободной) границе бесконечного слоя вязкой несжимаемой жидкости. Приведенное в статье точное решение позволяет автоматически разрешить переопределенную систему уравнений переноса импульсов в теплопроводящей несжимаемой жидкости. Анализ полей температуры и давления, которые являются полиномиальными, показывает, что в вязкой несжимаемой жидкости происходит стратификация этих полей. Другими словами, характер распределения фоновой температуры не является монотонным, она может принимать одно или два нулевых значения, принятых за отсчетную конфигурацию. При определенных значениях граничных условий при течении жидкости могут наблюдаться локализованные решения, описывающие термоклин и пикноклин в несжимаемой жидкости.



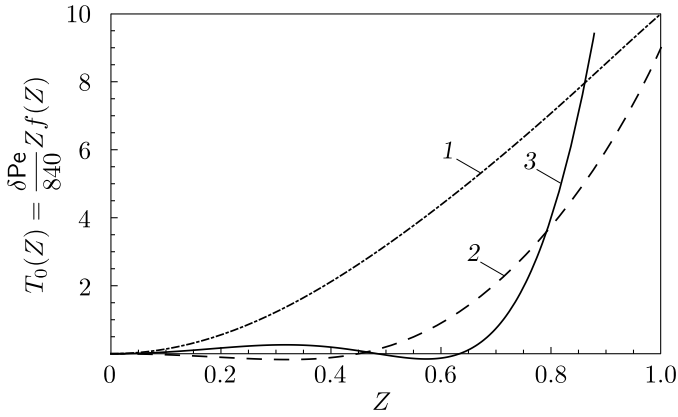


Рис. 1. Поведение функции  $T_0(Z)$ : нет расслоений ( $a = -20, b = 30$ ; линия 1), одно расслоение ( $a = -20, b = 17$ ; линия 2), два расслоения ( $a = -14, b = 16.5$ ; линия 3);  $a$  и  $b$  см. в (5)

[Figure 1. The behavior of the function  $T_0(Z)$ : no stratifications ( $a = -20, b = 30$ ; line 1), one stratification ( $a = -20, b = 17$ ; line 2), and two stratifications ( $a = -14, b = 16.5$ ; line 3);  $a$  and  $b$  see in Eq. (5)]

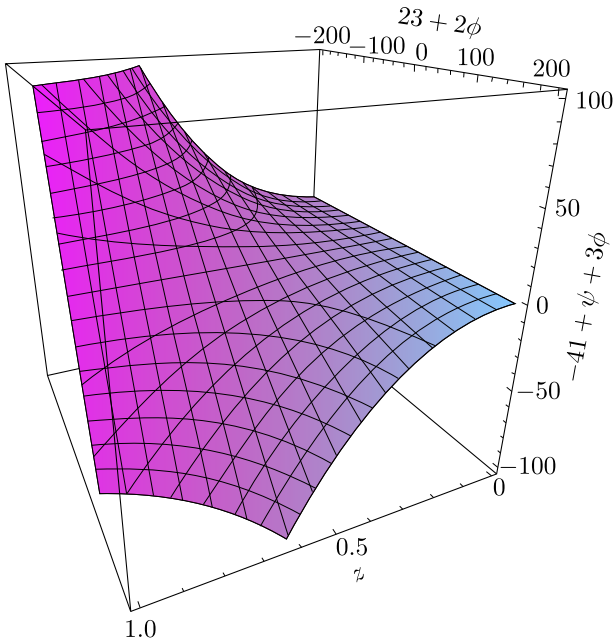


Рис. 2. Геометрическое место точек, удовлетворяющих условию  $q(Z) = 0$   
 [Figure 2. The geometric locus of points satisfying condition  $q(Z) = 0$ ]

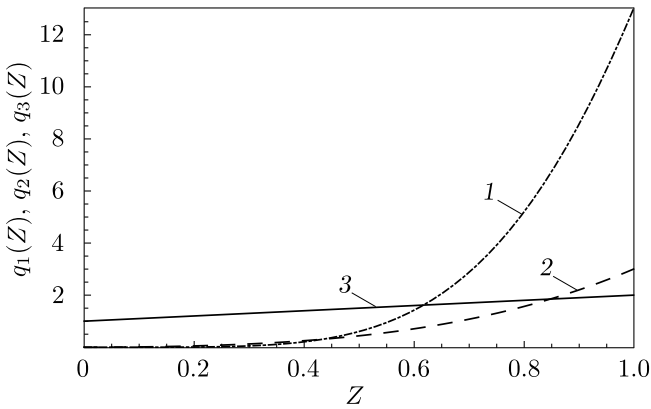


Рис. 3. Графики функций  $q_1(Z) = -5Z^7 - 5Z^6 + 23Z^5$  (линия 1),  $q_2(Z) = Z^4 + Z^3 + Z^2$  (линия 2),  $q_3(Z) = Z + 1$  (линия 3)

[Figure 3. The graphs of functions  $q_1(Z) = -5Z^7 - 5Z^6 + 23Z^5$  (line 1),  $q_2(Z) = Z^4 + Z^3 + Z^2$  (line 2), and  $q_3(Z) = Z + 1$  (line 3)]

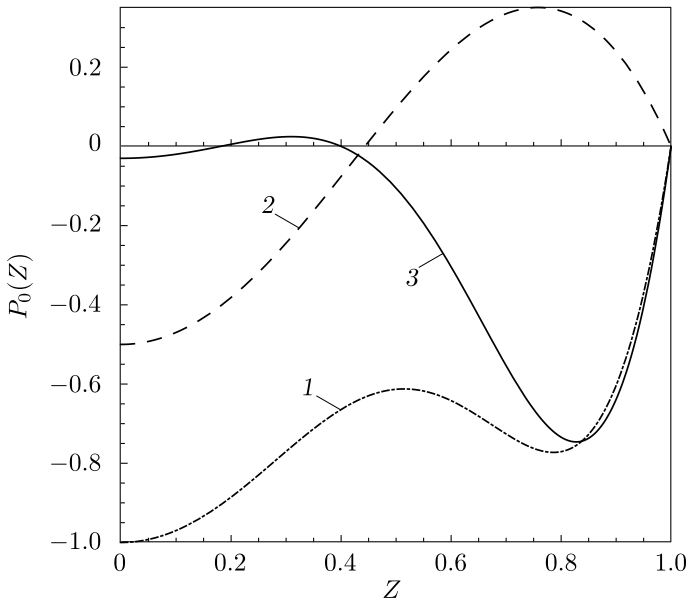


Рис. 4. Поведение функции  $P_0(Z)$ : нет расслоений (линия 1), одно расслоение (линия 2), два расслоения (линия 3)

[Figure 4. The behavior of the function  $P_0(Z)$ : no stratifications (line 1), one stratification (line 2), and two stratifications (line 3)]

**Конкурирующие интересы.** Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

**Авторский вклад и ответственность.** Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Каждый из нас одобрил окончательную версию рукописи.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере (программа УМНИК), договор № 12281ГУ/2017.

## Библиографический список

1. Joseph D. D. *Stability of fluid motions*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1976. 282 pp.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. *Устойчивость конвективных течений*. М.: Наука, 1989. 320 с.
3. Пухначёв В. В. Иерархия моделей в теории конвекции / *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 32 / Зап. научн. сем. ПОМИ, Т. 288. СПб.: ПОМИ, 2002. С. 152–177.
4. Остроумов Г. А. *Свободная конвекция в условиях внутренней задачи*. М.: Гостехиздат, 1952. 256 с.
5. Бирих Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // *ПМТФ*, 1966. Т. 7, № 3. С. 69–72.
6. Smith M. K., Davis S. H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Pt. 1. Convective instabilities // *J. Fluid Mech.*, 1983. vol. 132. pp. 119–144. doi: [10.1017/S0022112083001512](https://doi.org/10.1017/S0022112083001512).
7. Ortiz-Pérez A. S., Dávalos-Orozco L. A. Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient // *Phys. Fluids*, 2011. vol. 23, no. 8. pp. 084107–084111. doi: [10.1063/1.3626009](https://doi.org/10.1063/1.3626009).
8. Андреев В. К. *Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения*. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2010. 68 с.
9. Андреев В. К., Бекежанова В. Б. Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // *ПМТФ*, 2013. Т. 54, № 2. С. 3–20.
10. Андреев В. К., Степанова И. В. Однонаправленные течения бинарных смесей в модели Обербека–Буссинеска // *Изв. РАН. МЖГ*, 2016. Т. 51, № 2. С. 13–24.
11. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н., Резанова Е. В., Шефер И. А. Устойчивость двухслойных течений жидкости с испарением на границе раздела // *Изв. РАН. МЖГ*, 2017. № 2. С. 23–35. doi: [10.7868/S0568528117020062](https://doi.org/10.7868/S0568528117020062).
12. Бирих Р. В., Денисова М. О., Костарев К. Г. Возникновение конвекции Марангони, вызванной локальным внесением поверхностно активного вещества // *Изв. РАН. МЖГ*, 2011. № 6. С. 56–68.
13. Бирих Р. В., Денисова М. О., Костарев К. Г. Развитие концентрационно-капиллярной конвекции на межфазной поверхности // *Изв. РАН. МЖГ*, 2015. № 3. С. 56–67.
14. Бирих Р. В., Пухначёв В. В. Осевое конвективное течение во вращающейся трубе с продольным градиентом температуры // *Докл. РАН*, 2011. Т. 436, № 3. С. 323–327.
15. Бирих Р. В., Пухначёв В. В. Конвективное течение в горизонтальном канале с ньютоновской реологией поверхности при нестационарном продольном градиенте температуры // *Изв. РАН. МЖГ*, 2015. № 1. С. 192–198.
16. Гончарова О. Н., Кабов О. А. Гравитационно-термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое при спутном потоке газа // *Докл. РАН*, 2009. Т. 426, № 2. С. 183–188.
17. Гончарова О. Н., Резанова Е. В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях с испарением на границе раздела // *ПМТФ*, 2014. № 2. С. 68–79.
18. Пухначёв В. В. Нестационарные аналоги решения Бириха // *Известия АлтГУ*, 2011. № 1–2. С. 62–69.
19. Аристов С. Н. *Вихревые течения в тонких слоях жидкости*: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.02.05. Владивосток: ИАПУ, 1990. 32 с.
20. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Неоднородное конвективное течение Куэтта // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*, 2016. № 5. С. 3–9. doi: [10.7868/S0568528116050030](https://doi.org/10.7868/S0568528116050030).
21. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости // *Изв. РАН. МЖГ*, 2016. № 2. С. 25–31.
22. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // *Нелинейная динам.*, 2013. Т. 9, № 4. С. 651–657. doi: [10.20537/nd1304004](https://doi.org/10.20537/nd1304004).

23. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю., Спесак Л. Ф. Нестационарная конвекция Бенара–Марангони слоистых течений вязкой несжимаемой жидкости // *Теоретические основы химической технологии*, 2016. Т. 50, № 2. С. 137–146. doi: [10.7868/S0040357116020019](https://doi.org/10.7868/S0040357116020019).
24. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю., Спесак Л. Ф. Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция Марангони вязкой несжимаемой жидкости // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2015. Т. 8, № 4. С. 445–456. doi: [10.7242/1999-6691/2015.8.4.38](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.4.38).
25. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование поля скоростей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 180–196. doi: [10.14498/vsgtu1527](https://doi.org/10.14498/vsgtu1527).
26. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for layered large-scale convection induced by tangential stresses specified on the free boundary of a fluid layer // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2017. vol. 208, 012010. doi: [10.1088/1757-899X/208/1/012010](https://doi.org/10.1088/1757-899X/208/1/012010).
27. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точные решения для естественной конвекции слоистых течений вязкой несжимаемой жидкости при задании тангенциальных сил и линейного распределения температуры на границах слоя // *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*, 2017. № 4. С. 16–31. doi: [10.17804/2410-9908.2017.4.016-031](https://doi.org/10.17804/2410-9908.2017.4.016-031).
28. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution for the layered convection of a viscous incompressible fluid at specified temperature gradients and tangential forces on the free boundary // *AIP Conference Proceedings*, 2017. vol. 1915, 040005. doi: [10.1063/1.5017353](https://doi.org/10.1063/1.5017353).
29. Горшков А. В., Просвиряков Е. Ю. Слоистая конвекция Бенара–Марангони при теплообмене по закону Ньютона–Рихмана // *Компьютерные исследования и моделирование*, 2016. Т. 8, № 6. С. 927–940.
30. Горшков А. В., Просвиряков Е. Ю. Аналитические решения стационарной сложной конвекции, описывающие поле касательных напряжений разного знака / Тр. ИММ УрО РАН, Т. 23, 2017. С. 32–41. doi: [10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41](https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41).
31. Князев Д. В. Плоские течения вязкой бинарной жидкости между подвижными твердыми границами // *ПМТФ*, 2011. Т. 52, № 2. С. 66–72.
32. Сидоров А. Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // *ПМТФ*, 1989. Т. 30, № 2. С. 34–40.
33. Шварц К. Г. Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами // *Изв. РАН. МЖГ*, 2014. № 4. С. 26–30.
34. Аристов С. Н., Шварц К. Г. *Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости*. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2006. 155 с.
35. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Адвективное течение во вращающейся жидкой пленке // *ПМТФ*, 2016. Т. 57, № 1. С. 216–223. doi: [10.15372/PMTF20160121](https://doi.org/10.15372/PMTF20160121).
36. Шварц К. Г. Влияние вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое жидкости при малом значении числа Прандтля // *Изв. РАН. МЖГ*, 2005. № 2. С. 29–38.
37. Шварц К. Г. Моделирование крупномасштабных и мезомасштабных процессов в бароклинной атмосфере и океане // *Географический вестник*, 2013. № 1(24). С. 72–77.
38. Shtern V. *Counterflows. Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 469 pp. doi: [10.1017/CB909781139226516](https://doi.org/10.1017/CB909781139226516).
39. Descartes R. *La géométrie. Nouvelle éd. Avec le portrait de Descartes d'après Frans Hals*. Paris: J. Hermann, 1927. 91 pp. (In French)

MSC: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05


## A large-scale layered stationary convection of a incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Temperature and pressure field investigation

*N. V. Burmasheva*<sup>1,2</sup>, *E. Yu. Prosviryakov*<sup>2</sup><sup>1</sup> Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin, 19, Mira st., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation.<sup>2</sup> Institute of Engineering Science, Urals Branch, Russian Academy of Sciences, 34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

### Abstract

In this paper a new exact solution of an overdetermined system of Oberbeck–Boussinesq equations that describes a stationary shear flow of a viscous incompressible fluid in an infinite layer is under study. The given exact solution is a generalization of the Ostroumov–Birich class for a layered unidirectional flow. In the proposed solution, the horizontal velocities depend only on the transverse coordinate  $z$ . The temperature field and the pressure field are three-dimensional. In contradistinction to the Ostroumov–Birich solution, in the solution presented in the paper the horizontal temperature gradients are linear functions of the  $z$  coordinate. This structure of the exact solution allows us to find a nontrivial solution of the Oberbeck–Boussinesq equations by means of the identity zero of the incompressibility equation. This exact solution is suitable for investigating large-scale flows of a viscous incompressible fluid by quasi-two-dimensional equations. Convective fluid motion is caused by the setting of tangential stresses on the free boundary of the layer. Inhomogeneous thermal sources are given on both boundaries. The pressure in the fluid at the upper boundary coincides with the atmospheric pressure. The paper focuses on the study of temperature and pressure fields, which are described by polynomials of three variables. The features of the distribution of the temperature and pressure profiles, which are polynomials of the seventh and eighth degree, respectively, are discussed in detail. To analyze the properties of temperature and pressure, algebraic methods are used to study the number of roots on a segment. It

### Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A large-scale layered stationary convection of a incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Temperature and pressure field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 736–751. doi: [10.14498/vsgtu1568](https://doi.org/10.14498/vsgtu1568) (In Russian).

#### Authors' Details:

*Natalya V. Burmasheva*  <http://orcid.org/0000-0003-4711-1894>

Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Institute of Mathematics and Computer Science, Dept. of Applied Mathematics and Mechanics<sup>1</sup>; Researcher; Sector of Nonlinear Vortex Hydrodynamics<sup>2</sup>; e-mail: [nat\\_burm@mail.ru](mailto:nat_burm@mail.ru)

*Evgeny Yu. Prosviryakov*  <http://orcid.org/0000-0002-2349-7801>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Head of Sector; Sector of Nonlinear Vortex Hydrodynamics<sup>2</sup>; e-mail: [evgen\\_pros@mail.ru](mailto:evgen_pros@mail.ru)

is shown that the background temperature and the background pressure are nonmonotonic functions. The temperature field is stratified into zones that form the thermocline and the thermal boundary layer near the boundaries of the fluid layer. Investigation of the properties of the pressure field showed that it is stratified into one, two or three zones relative to the reference value (atmospheric pressure).

**Keywords:** Oberbeck–Boussinesq system, shear flow, convection, exact solution, polynomial solution, root localization, thermocline, field stratification.

Received: 17<sup>th</sup> October, 2017 / Revised: 15<sup>th</sup> December, 2017 /

Accepted: 18<sup>th</sup> December, 2017 / First online: 29<sup>th</sup> December, 2017

---

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interests in the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** We are fully responsible for submitting the final manuscript in print. Each of us has approved the final version of manuscript.

**Funding.** This work was supported by the Foundation for Assistance to Small Innovative Enterprises in Science and Technology (the UMNİK program), agreement no. 12281GU/2017.

## References

1. Joseph D. D. *Stability of fluid motions*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer–Verlag, 1976, 282 pp.
2. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M., Nepomniashchii A. A. *Ustoichivost' konvektivnykh techenii*. Moscow, Nauka, 1989, 320 pp. (In Russian)
3. Pukhnachov V. V. Hierarchy of Models in Convection Theory, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2004, vol. 123, no. 6, pp. 4607–4620. doi: [10.1023/B:JOTH.0000041478.45024.64](https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000041478.45024.64).
4. Ostroumov G. A. *Svobodnaia konveksiia v usloviakh vnutrennei zadachi* [Free Convection Under the Conditions of the Internal Problem]. Moscow, Gostekhizdat, 1952, 256 pp. (In Russian)
5. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, vol. 7, no. 3, pp. 43–44. doi: [10.1007/BF00914697](https://doi.org/10.1007/BF00914697).
6. Smith M. K., Davis S. H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Pt. 1. Convective instabilities, *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 132, pp. 119–144. doi: [10.1017/S0022112083001512](https://doi.org/10.1017/S0022112083001512).
7. Ortiz-Pérez A. S., Dávalos-Orozco L. A. Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient, *Phys. Fluids*, 2011, vol. 23, no. 8, pp. 084107–084111. doi: [10.1063/1.3626009](https://doi.org/10.1063/1.3626009).
8. Andreev V. K. *Resheniia Birikha uravnenii konveksii i nekotorye ego obobshcheniia* [Birikh Solutions to Convection Equations and Some of its Extensions]. Krasnoyarsk, IVM SO RAN Publ., 2010, 68 pp. (In Russian)
9. Andreev V. K., Bekezhanova V. B. Stability of non-isothermal fluids (Review), *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 171–184. doi: [10.1134/S0021894413020016](https://doi.org/10.1134/S0021894413020016).
10. Andreev V. K., Stepanova I. V. Unidirectional flows of binary mixtures within the framework of the Oberbeck–Boussinesq model, *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 136–147. doi: [10.1134/S0015462816020022](https://doi.org/10.1134/S0015462816020022).
11. Bekezhanova V. B., Shefer I. A., Goncharova O. N., Rezanova E. B. Stability of two-layer fluid flows with evaporation at the interface, *Fluid Dyn.*, 2017, vol. 52, no. 2, pp. 189–200. doi: [10.1134/S001546281702003X](https://doi.org/10.1134/S001546281702003X).
12. Birikh R. V., Denisova M. O., Kostarev K. G. The development of Marangoni convection induced by local addition of a surfactant, *Fluid Dyn.*, 2011, vol. 46, no. 6, pp. 890–900. doi: [10.1134/S0015462811060068](https://doi.org/10.1134/S0015462811060068).

13. Biriĥ R. V., Denisova M. O., Kostarev K.G. Development of concentration-capillary convection on an interfacial surface, *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, no. 3, pp. 361–370. doi: [10.1134/S0015462815030060](https://doi.org/10.1134/S0015462815030060).
14. Biriĥ R. V., Puhnachev V. V. An axial convective flow in a rotating tube with a longitudinal temperature gradient, *Dokl. Phys.*, 2011, vol. 56, no. 1, pp. 47–52. doi: [10.1134/S1028335811010095](https://doi.org/10.1134/S1028335811010095).
15. Biriĥ R. V., Puhnachev V. V. Convective flow in a horizontal channel with non-newtonian surface rheology under time-dependent longitudinal temperature gradient, *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, no. 1, pp. 173–179. doi: [10.1134/S0015462815010172](https://doi.org/10.1134/S0015462815010172).
16. Goncharova O.N., Kabov O.A. Gravitational-thermocapillary convection of fluid in the horizontal layer in co-current gas flow, *Dokl. Phys.*, 2009, vol. 54, no. 5, pp. 242–247. doi: [10.1134/S1028335809050061](https://doi.org/10.1134/S1028335809050061).
17. Goncharova O. N., Rezanova E. V. Example of an exact solution of the stationary problem of two-layer flows with evaporation at the interface, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 2, pp. 247–257. doi: [10.1134/S0021894414020072](https://doi.org/10.1134/S0021894414020072).
18. Puhnachev V. V. Non-stationary analogues of the Biriĥ solution, *Izvestiya AltGU*, 2011, no. 1–2, pp. 62–69 (In Russian).
19. Aristov S. N. *Vortex flows in thin layers of a liquid*, Dr. Sci. Thesis (Phys. & Math.). Vladivostok, 1990, 32 pp. (In Russian)
20. Aristov S.N., Prosviryakov E. Yu. Nonuniform convective Couette flow, *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 5, pp. 581–587. doi: [10.1134/S001546281605001X](https://doi.org/10.1134/S001546281605001X).
21. Aristov S.N., Prosviryakov E. Yu. Unsteady layered vortical fluid flows, *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 148–154. doi: [10.1134/S0015462816020034](https://doi.org/10.1134/S0015462816020034).
22. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. On laminar flows of planar free convection, *Nelin. Dinam.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651–657 (In Russian). doi: [10.20537/nd1304004](https://doi.org/10.20537/nd1304004).
23. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu., Spevak L.F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 2, pp. 137–146. doi: [10.1134/S0040579516020019](https://doi.org/10.1134/S0040579516020019).
24. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu., Spevak L.F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid, *Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 445–456 (In Russian). doi: [10.7242/1999-6691/2015.8.4.38](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.4.38).
25. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A large-scale layered stationary convection of a incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, T. 21, №1, C. 180–196 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1527](https://doi.org/10.14498/vsgtu1527).
26. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for layered large-scale convection induced by tangential stresses specified on the free boundary of a fluid layer, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2017, vol. 208, 012010. doi: [10.1088/1757-899X/208/1/012010](https://doi.org/10.1088/1757-899X/208/1/012010).
27. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for natural convection of layered flows of a viscous incompressible fluid with specified tangential forces and the linear distribution of temperature on the layer boundaries, *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*, 2017, no. 4, pp. 16–31 (In Russian). doi: [10.17804/2410-9908.2017.4.016-031](https://doi.org/10.17804/2410-9908.2017.4.016-031).
28. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution for the layered convection of a viscous incompressible fluid at specified temperature gradients and tangential forces on the free boundary, *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1915, 040005. doi: [10.1063/1.5017353](https://doi.org/10.1063/1.5017353).
29. Gorshkov A. V., Prosviryakov E. Yu. Layered Bénard–Marangoni convection during heat transfer according to the Newton’s law of cooling, *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 6, pp. 927–940 (In Russian).
30. Gorshkov A. V., Prosviryakov E. Yu. Analytic solutions of stationary complex convection describing a shear stress field of different signs, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 23, 2017, pp. 32–41 (In Russian). doi: [10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41](https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41).

31. Knyazev D. V. Two-dimensional flows of a viscous binary fluid between moving solid boundaries, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2011, vol. 52, no. 2, pp. 212–217. doi: [10.1134/S0021894411020088](https://doi.org/10.1134/S0021894411020088).
32. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203. doi: [10.1007/BF00852164](https://doi.org/10.1007/BF00852164).
33. Schwarz E. G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries, *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, no. 4, pp. 438–442. doi: [10.1134/S0015462814040036](https://doi.org/10.1134/S0015462814040036).
34. Aristov S. N., Shvarts K. G. *Vikhrevye techeniia advektivnoi prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortical Flows of Advective Nature in a Rotating Fluid Layer]. Perm, Perm State Univ., 2006, 155 pp. (In Russian)
35. Aristov S. N., Shvarts K. G. Advective flow in a rotating liquid film, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 188–194. doi: [10.1134/S0021894416010211](https://doi.org/10.1134/S0021894416010211).
36. Schwarz K. G. Effect of rotation on the stability of advective flow in a horizontal fluid Layer at a small Prandtl number, *Fluid Dyn.*, 2005, vol. 40, no. 2, pp. 193–201. doi: [10.1007/s10697-005-0059-7](https://doi.org/10.1007/s10697-005-0059-7).
37. Shvarts K. G. Modeling of large-scale and meso-scale processes in the baroclinic atmosphere and ocean, *Geographical Bulletin*, 2013, no. 1(24), pp. 72–77 (In Russian).
38. Shtern V. *Counterflows. Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena*. Cambridge, Cambridge University Press, 2012, 469 pp. doi: [10.1017/CB09781139226516](https://doi.org/10.1017/CB09781139226516).
39. Descartes R. *La géométrie. Nouvelle éd. Avec le portrait de Descartes d'après Frans Hals*. Paris, J. Hermann, 1927, 91 pp. (In French)