Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 4. С. 752–759
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1577

Краткие сообщения

УДК 517.956.3

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с некратными характеристиками

А. А. Андреев[1], ***Ю. О. Яковлева***[2]

[1] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
[2] Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Рассмотрена задача Коши для дифференциального гиперболического уравнения порядка n с некратными характеристиками. Приведено регулярное решение задачи Коши для дифференциального уравнения гиперболического типа порядка n с некратными характеристиками. Получено решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n, не содержащей производных меньше порядка n, с некратными характеристиками в случае коммутирующих матричных коэффициентов. Как результат исследований сформулирована теорема о существовании и единственности регулярного решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с некратными характеристиками.

Ключевые слова: гиперболическое дифференциальное уравнение порядка n, система уравнений гиперболического типа порядка n, некратные характеристики, метод общих решений, задача Коши, формула Даламбера.

Получение: 17 ноября 2017 г. / Исправление: 13 декабря 2017 г. / Принятие: 18 декабря 2017 г. / Публикация онлайн: 25 декабря 2017 г.

Краткое сообщение

Образец для цитирования

Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с некратными характеристиками // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 4. С. 752–759. doi: 10.14498/vsgtu1577.

Сведения об авторах

Александр Анатольевич Андреев http://orcid.org/0000-0002-6611-6685
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: andre01071948@yandex.ru

Юлия Олеговна Яковлева http://orcid.org/0000-0002-9839-3740
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. математики и бизнес-информатики; e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

Введение. Исследование краевых задач для дифференциальных уравнений гиперболического типа и систем гиперболических уравнений является одним из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Интерес многих исследователей к данной проблеме объясняется как теоретической важностью получаемых результатов, так и их значимыми практическими приложениями [1–4]. Краевые задачи, в том числе и задачу Коши, для уравнений гиперболического типа и систем уравнений гиперболического типа с некратными характеристиками в ряде случаев можно решить не только методом Римана [5,6], но и методом общих решений [7].

Предварительные сведения. В работе [8] рассмотрена и решена задача Коши для дифференциального уравнения гиперболического типа порядка n общего вида с некратными характеристиками

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^n}{\partial x^{n-k} \partial y^k} u(x,\, y) = 0, \tag{1}$$

где a_k — действительные ненулевые постоянные.

Уравнение (1) является строго гиперболическим по Петровскому [9], то есть имеет n некратных характеристик. Тогда характеристическое уравнение для уравнения (1)

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

имеет n различных действительных отличных от нуля корней $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_n$ таких, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = -\frac{a_1}{a_0}, \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \cdots + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n = -\frac{a_3}{a_0}, \quad \ldots,$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1} + \lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n + \cdots + \lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_n = (-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_0},$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

Известно [10–12], что общее решение уравнения (1) принадлежит классу n раз непрерывно дифференцируемых функций $C^n(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ и может быть представлено в виде

$$u(x, y) = f_1(y + \lambda_1 x) + f_2(y + \lambda_2 x) + \ldots + f_n(y + \lambda_n x).$$

Задача Коши. *Найти регулярное решение $u\,(x,\, y) \in C^n(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ уравнения (1) в плоскости независимых переменных $D = \{(x,\, y) : x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$, которое на линии $y = 0$ удовлетворяет условиям*

$$\frac{\partial^k u(x,\, y)}{\partial l^k}\Big|_{y=0} = \tau_{n-k}(x), \quad k = 0, 1, n-1, \tag{2}$$

где $\tau_1(x),\ \tau_2(x),\ \ldots,\tau_n(x) \in C^n(\mathbb{R})$, l *— нормаль к нехарактеристической линии* $y = 0$.

Функция $u\,(x,\ y) \in C^n(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, имеющая в плоскости D все непрерывные частные производные, которые входят в уравнение (1), и удовлетворяющая уравнению (1) и условиям задачи Коши (2) в обычном смысле, называется регулярным решением задачи Коши (1), (2) в плоскости независимых переменных [13].

Решением задачи (1), (2) является функция

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(y+\lambda_k x), \tag{3}$$

где

$$f_k(\lambda_k x) = \lambda_k^{n-1}\frac{(-1)^{n+k+1}}{(n-2)!}\frac{a_n}{a_0}\int_0^x \tau_1(s)(x-s)^{n-2}ds+$$
$$+\,\lambda_k^{n-1}\frac{(-1)^{n+k+1}}{(n-3)!}\frac{a_{n-1}}{a_0}\int_0^x \tau_2(s)(x-s)^{n-3}ds+\cdots+\lambda_k^{n-1}(-1)^{n+k+1}\tau_n(x). \tag{4}$$

Явная формула (3) регулярного решения рассмотренной задачи Коши [8] является естественным обобщением известной формулы Даламбера [14].

Справедлива

Теорема 1. *Существует единственное регулярное решение задачи Коши* (1), (2) $u\,(x,\ y) \in C^n(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, *имеющее вид* (3) *при условии, что функции* $\tau_1(x),\ \tau_2(x),\ldots,\tau_n(x) \in C^n(\mathbb{R})$.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа, не содержащей производных меньше порядка n. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с двумя независимыми переменными x, y на плоскости D, не содержащую производных порядка меньше n,

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \frac{\partial^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k}U(x,\ y) = 0, \tag{5}$$

где $U(x,y) = (u^1(x,y), u^2(x,y))^\top$ — двумерная вектор-функция, A_k — постоянные (2×2)-матрицы.

Будем предполагать, что матрицы $A_0,\ A_1,\ldots,A_n$ попарно коммутируют [15]. Следовательно, существует такое преобразование подобия T, которое одновременно приводит матрицы $A_0,\ A_1,\ldots,A_n$ к диагональной форме

$$T^{-1}A_0T = \Lambda_{A_0},\quad T^{-1}A_1T = \Lambda_{A_1},\quad \ldots,\quad T^{-1}A_nT = \Lambda_{A_n}.$$

Если матрицы $A_0,\ A_1,\ldots,A_n$ коммутирующие, то матрицы $\Lambda_{A_0},\ \Lambda_{A_1},\ \ldots,\ \Lambda_{A_n}$, полученные преобразованием подобия [16], также попарно коммутируют.

Пусть матрицы $\Lambda_{A_0},\ \Lambda_{A_1},\ \ldots,\ \Lambda_{A_n}$ таковы, что имеют различные ненулевые действительные собственные значения.

Задача Коши. *Найти регулярное решение $U(x,\,y) \in C^n(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ системы дифференциальных уравнений (5) в плоскости D, которое на линии $y=0$ удовлетворяет условиям*

$$\left.\frac{\partial^k U(x,\,y)}{\partial l^k}\right|_{y=0} = S_{n-k}(x), \quad k = 0, 1, n-1, \tag{6}$$

где $S_1(x)$, $S_2(x), \ldots, S_n(x) \in C^n(\mathbb{R})$ — заданные вектор-функции, l — нормаль к нехарактеристической линии $y=0$.

Рассмотрим замену

$$U = TV, \quad V(x,y) = (v^1(x,y), v^2(x,y))^\top$$

при $\det T \neq 0$, которая позволит совершить переход к системе вида

$$\Lambda_{A_0} V_{xxx\ldots x} + \Lambda_{A_1} V_{xx\ldots xy} + \ldots + \Lambda_{A_{n-1}} V_{n-1} u_{x\ldots yyy} + \Lambda_{A_n} V_n u_{yyy\ldots y} = 0. \tag{7}$$

Таким образом, исследуемая система разделена на отдельные уравнения:

$$\begin{aligned} a_0^1 v^1_{xxx\ldots x} + a_1^1 v^1_{xx\ldots xy} + \ldots + a^1_{n-1} v^1_{x\ldots yyy} + a^1_n v^1_{yyy\ldots y} = 0,\\ a_0^2 v^2_{xxx\ldots x} + a_1^2 v^2_{xx\ldots xy} + \ldots + a^2_{n-1} v^2_{x\ldots yyy} + a^2_n v^2_{yyy\ldots y} = 0. \end{aligned}$$

Каждое характеристическое уравнение системы (7) имеет n различных ненулевых корней λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_n$ соответственно.

Применяя приведенные выше исследования, для каждого уравнения указанной системы решение задачи Коши может быть получено в регулярном виде:

$$v^1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} f_k^1(y + \lambda_k x), \quad v^2(x,y) = \sum_{k=1}^{n} f_k^2(y + \mu_k x),$$

где f_k^1, f_k^2 определяются по формуле (4).

Решение матричного уравнения $U = TV$ является решением задачи Коши (5), (6).

Таким образом, существование решения задачи Коши (5), (6) доказано конструктивно. Существование и единственность решения задачи Коши для линейной системы уравнений гиперболического типа с аналитическими коэффициентами доказано Хольмгреном [17].

Приведенные исследования позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *В плоскости D существует единственное регулярное решение $U(x,\,y) \in C^n(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ задачи Коши (5), (6) при условии, что вектор-функции $S_1(x)$, $S_2(x), \ldots, S_n(x) \in C^n(\mathbb{R})$.*

Полученный результат является обобщением результатов, полученных авторами в работах [8, 11, 12].

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Ali Raeisian S. M. Effective Solution of Riemann Problem for Fifth Order Improperly Elliptic Equation on a Rectangle // *AJCM*, 2012. vol. 2, no. 4. pp. 282–286. doi: 10.4236/ajcm.2012.24038.
2. Бицадзе А. В. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1982. 336 с.
3. Kinoshita T. Gevrey Wellposedness of the Cauchy Problem for the Hyperbolic Equations of Third Order with Coefficients Depending Only on Time // *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 1998. vol. 34, no. 3. pp. 249–270. doi: 10.2977/prims/1195144695.
4. Nikolov A., Popivanov N. Singular solutions to Protter's problem for (3+1)-D degenerate wave equation (8–13 June 2012; Sozopol, Bulgaria) / AIP Conf. Proc., 1497, 2012. pp. 233–238. doi: 10.1063/1.4766790.
5. Rieman B. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite (Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1860.) / *Bernard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*; eds. R. Dedekind, H. M. Weber. United States: BiblioLife, 2009. pp. 145–164 (In German). doi: 10.1017/cbo9781139568050.009.
6. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* Казань: Казанское математическое общество, 2001. 226 с.
7. Мусхелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* М.: Наука, 1966. 707 с.
8. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Задача Коши для уравнения гиперболического типа порядка n общего вида с некратными характеристиками // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 2. С. 241–248. doi: 10.14498/vsgtu1490.
9. Петровский И. Г. *Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия.* М.: Наука, 1986. 500 с.
10. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Ле Тхи Тху Решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характеристик // *Тр. Ин-та матем.*, 2010. Т. 18, № 2. С. 36–54.
11. Яковлева Ю. О. Аналог формулы Даламбера для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 1(26). С. 247–250. doi: 10.14498/vsgtu1028.
12. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Задача Коши для системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка общего вида с некратными характеристиками // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 4(37). С. 7–15. doi: 10.14498/vsgtu1349.
13. А. А. Андреев, Ю. О. Яковлева Характеристическая задача для одного гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка с некратными характеристиками // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2013. Т. 13, № 1(2). С. 3–6.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1972. 736 с.
15. Bellman R. *Introduction to matrix analysis*: 2nd ed., Reprint of the 1970 Orig. / Classics in Applied Mathematics. vol. 19. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. xxviii+403 pp.
16. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1988. 549 с.
17. Holmgren E. Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre deux variables indépendantes à caractéristiques réelles et distinetes // *Arkiv f. Mat., Astr. och Fys.*, 1909. vol. 5, no. 1. 13 pp. (In Swedish)

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 752–759
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1577

MSC: 35L56

The Cauchy problem for a system of the hyperbolic differential equations of the n-th order with the nonmultiple characteristics

A. A. Andreev[1]**, *J. O. Yakovleva***[2]

[1] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.
[2] Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

In the paper the Cauchy problem is considered for the hyperbolic differential equation of the n-th order with the nonmultiple characteristics. The regular solution of the Cauchy problem for the hyperbolic differential equation of the n-th order with the nonmultiple characteristics is considered. In the paper the solution of the Cauchy problem for the system of the hyperbolic differential equations of the n-th order with the nonmultiple characteristics is considered. The existence and uniqueness theorem for the regular solution of the Cauchy problem for the system of the hyperbolic differential equations of the n-th order with the nonmultiple characteristics is considered as the result of the research.

Keywords: n-th order hyperbolic differential equation, system of the hyperbolic differential equations of the n-th order, nonmultiple characteristics, method of the general solutions, Cauchy problem, D'Alembert formula.

Received: 17th November, 2017 / Revised: 13th December, 2017 / Accepted: 18th December, 2017 / First online: 25th December, 2017

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interests with the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely

Short Communication

Please cite this article in press as:
Andreev A. A., Yakovleva J. O. The Cauchy problem for a system of the hyperbolic differential equations of the n-th order with the nonmultiple characteristics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 752–759. doi: 10.14498/vsgtu1577 (In Russian).

Authors' Details:
Aleksandr A. Andreev http://orcid.org/0000-0002-6611-6685
Cand. Phys. & Math. Sci., Professor; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: andre01071948@yandex.ru
Julia O. Yakovleva http://orcid.org/0000-0002-9839-3740
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Mathematics & Business Informatics; e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

References

1. Ali Raeisian S. M. Effective Solution of Riemann Problem for Fifth Order Improperly Elliptic Equation on a Rectangle, *AJCM*, 2012, vol. 2, no. 4, pp. 282–286. doi: 10.4236/ajcm.2012.24038.
2. Bitsadze A. V. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1982, 336 pp. (In Russian)
3. Kinoshita T. Gevrey Wellposedness of the Cauchy Problem for the Hyperbolic Equations of Third Order with Coefficients Depending Only on Time, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 1998, vol. 34, no. 3, pp. 249–270. doi: 10.2977/prims/1195144695.
4. Nikolov A., Popivanov N. Singular solutions to Protter's problem for (3+1)-D degenerate wave equation (8–13 June 2012; Sozopol, Bulgaria), AIP Conf. Proc., 1497, 2012, pp. 233–238. doi: 10.1063/1.4766790.
5. Rieman B. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite (Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1860.), In: *Bernard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*; eds. R. Dedekind, H. M. Weber. United States, BiblioLife, 2009, pp. 145–164 (In German). doi: 10.1017/cbo9781139568050.009.
6. Zhegalov V. I., Mironov A. N. *Differentsial'nye uravneniia so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential equations with highest partial derivatives]. Kazan', Kazanskoe matematicheskoe obshchestvo, 2001, 226 pp. (In Russian)
7. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1966, 707 pp. (In Russian)
8. Andreev A. A., Yakovleva J. O. The Cauchy problem for a general hyperbolic differential equation of the n-th order with the nonmultiple characteristics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 2, pp. 241–248 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1490.
9. Petrovsky I. G. *Izbrannye trudy. Sistemy uravnenii s chastnymi proizvodnymi. Algebraicheskaia geometriia* [Selected works. Systems of partial differential equations. Algebraic geometry]. Moscow, Nauka, 1986, 504 pp. (In Russian)
10. Korzyuk V. I., Cheb E. S., Le Thi Thu Solution of the mixed problem for the biwave equation by the method of characteristics, *Tr. Inst. Mat.*, 2010, vol. 18, no. 2, pp. 36–54 (In Russian).
11. Yakovleva J. O. The analogue of D'Alembert formula for hyperbolic differential equation of the third order with nonmultiple characteristics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 1(26), pp. 247–250 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1028.
12. Andreev A. A., Yakovleva J. O. Cauchy Problem For the System Of the General Hyperbolic Differential Equations Of the Forth Order With Nonmultiple Characteristics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 4(37), pp. 7–15 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1349.
13. Andreev A. A., Yakovleva J. O. The Characteristic Problem for one Hyperbolic Differential Equation of the Third Order with Nonmultiple Characteristics, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 1(2), pp. 3–6 (In Russian).
14. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1972, 736 pp. (In Russian)

15. Bellman R. *Introduction to matrix analysis*, 2nd ed., Reprint of the 1970 Orig., Classics in Applied Mathematics, vol. 19. Philadelphia, PA, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997, xxviii+403 pp.
16. Gantmakher F. R. *Teoriia matrits* [Theory of matrices]. Moscow, Nauka, 1988, 549 pp. (In Russian)
17. Holmgren E. Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre deux variables indépendantes à caractéristiques réelles et distinetes, *Arkiv f. Mat., Astr. och Fys.*, 1909, vol. 5, no. 1, 13 pp. (In Swedish)